ชุดฝึกหัด 13
การหาค่าลิมิตรูปอินดิเทอร์มิเนต

จงพิจารณาว่าลิมิตในข้อ 1-20 อยู่ในรูปอินดิเทอร์มิเนตหรือไม่ ถ้าเป็น จำเป็นต้องคำนวณค่าลิมิตนั้น ๆ ด้วยกฎของโลปิตาลหรือไม่ พร้อมทั้งแสดงการคำนวณค่าลิมิตนั้น ๆ

1. $\lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 81}{x-3}$

2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2-4}$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x}$

4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x}$

5. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{e^x}$

6. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$

7. $\lim_{x\to \pi^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x-\pi}}$

8. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2}$

9. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2}$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 3^x}{x}$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln(e^x-1)}$

12. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$

13. $\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x-2}$

14. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\ln(1-x)}$

15. $\lim_{x\to -2} \frac{\ln(x^2+e^x)}{x+2}$

16. $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$

17. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$

18. $\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2 + x+1} - \sqrt{x^2 - x})$

19. $\lim_{x\to 0} (\cot x)^{\sec x}$

20. $\lim_{x\to \pi/2} (\cos 3x)^{\sec^2 x}$

จงพิจารณาว่า ลิมิตในข้อ 21-40 เป็นอินดิเทอร์มิเนตรูปแบบใด พร้อมคำนวณค่าลิมิตนั้น ๆ

21. $\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin^{-1}x}{2\tan^{-1}x - x}$

22. $\lim_{x\to 0} (1 - e^{-x})^{x}$

23. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\ln(e^{x}-1)}$

24. $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

25. $\lim_{x\to +\infty} (1 + \frac{2}{x})^{4x}$

26. $\lim_{x\to 0} (e^{2x} - 1) \cot x$

27. $\lim_{x\to 0^+} 3^{\sin x \csc 5x}$

28. $\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(\ln x)}{1/(1-x)}$

29. $\lim_{x\to 0} \frac{\tanh^{-1}x}{x}$

30. $\lim_{x\to \pi/2} (\sin x - \cos x)^{\tan x}$

31. $\lim_{x\to 0} (x^2 \csc x \cot x)$

32. $\lim_{x\to 0} x^{x^2}$

33. $\lim_{x\to +\infty} (1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2})^{x}$

34. $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x})^{\sin x}$

35. $\lim_{x\to \pi/2^-} (\tan x)^{\cos x}$

36. $\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x)$

37. $\lim_{x\to \pi/2} (\sec^3 x - \tan^3 x)$

38. $\lim_{x\to 0} (\frac{\sin x}{x})^{1/x}$

39. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \tan x}$

40. $\lim_{x\to 0} (\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x})$

จงคำนวณลิมิตทางซ้ายมือของข้อ 41-50 และแสดงว่า ค่าลิมิตที่คำนวณได้เท่ากับค่าที่ให้ไว้ทางขวามือ

41. $\lim_{x\to 0^+} (\cos x + 2\sin x)^{\cot x} = e^2$

42. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e^{2a}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง

43. $\lim_{x\to -1} \frac{\ln(2+x)}{x+1} = 1$

44. $\lim_{x\to 0} \frac{2\tan^{-1} x - x}{2x - \sin^{-1} x} = 1$

45. $\lim_{x\to 0} \frac{8^x - 2^x}{4x} = \frac{1}{2}\ln 2$

46. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \cot x}{e^{\csc^2 x}} = 0$

47. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

48. $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

49. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n} = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

50. $\lim_{n\to +\infty} n(\sqrt[n]{x}-1) = \ln x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวก

เฉลยชุดฝึกหัด 13

1. เมื่อ $x \to 3$ ลิมิตของตัวเศษ และตัวส่วนเข้าใกล้ 0 ลิมิตจึงอยู่ในรูปอินดิเทอร์มิเนต $\frac{0}{0}$ ซึ่งสามารถหาค่าลิมิตได้ด้วยกฎของโลปิตาล ดังนี้

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{4x^3}{1} = \lim_{x \to 3} 4x^3 = (4)(27) = 108$$

หรืออาจพิจารณาการหาค่าลิมิตได้อีกแบบหนึ่ง ดังนี้

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x+3)(x^2+9) = (6)(18) = 108$$

ซึ่งแสดงว่า การคำนวณค่าลิมิตในข้อนี้ ไม่จำเป็นต้องใช้กฎของโลปิตาล

2. เช่นเดียวกับข้อ 1. ลิมิตอยู่ในรูปอินดิเทอร์มิเนต $\frac{0}{0}$ ซึ่งสามารถคำนวณค่าลิมิตได้ด้วยกฎของโลปิตาล ดังนี้

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{2x+1}{2x} = \frac{2(2) + 1}{2(2)} = \frac{5}{4}$$

หรืออาจพิจารณาการหาค่าลิมิตได้อีกแบบหนึ่ง ดังนี้

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}$$

ซึ่งแสดงว่า การคำนวณค่าลิมิตในข้อนี้ ไม่จำเป็นต้องใช้กฎของโลปิตาล

3. ลิมิตของข้อนี้อยู่ในรูปอินดิเทอร์มิเนต $\frac{0}{0}$ จึงใช้กฎโลปิตาลได้ทันที ดังนี้

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x} = \frac{3}{-1} = -3$$

$(\because \lim_{x \to 0} (1+2\cos 2x) = 1+2\cos 0 = 1+2 = 3$ และ

$\lim_{x \to 0} (1-2\cos 2x) = 1-2\cos 0 = 1-2 = -1)$

ข้อนี้จำเป็นต้องใช้กฎของโลปิตาลในการคำนวณค่าลิมิต

4. ลิมิตในข้อนี้อยู่ในรูปอินดิเทอร์มิเนต $\frac{\infty}{\infty}$ ซึ่งจำเป็นต้องคำนวณค่าลิมิตด้วยกฎของโลปิตาล ดังนี้

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x}$$ (ยังคงอยู่ในรูปอินดิเทอร์มิเนต $\frac{\infty}{\infty}$ จึงใช้กฎของโลปิตาลต่อไป)

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x}$$ (ไม่เป็นรูปอินดิเทอร์มิเนต) $= 0$

5. เมื่อ $x \to +\infty$ ค่าของ $\sin x$ อยู่ในช่วง $[-1, 1]$ แต่ $e^x \to +\infty$ ลิมิตจึงไม่ใช่รูปอินดิเทอร์มิเนต แต่อย่างไรก็ตามเราสามารถคำนวณค่าลิมิตได้ โดยใช้ squeezing theorem ดังนี้

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{e^x} \leqslant \frac{\sin x}{e^x} \leqslant \frac{1}{e^x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^x}\right) \leqslant \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{e^x} \leqslant \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)$$

ซึ่ง $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right) = 0$ ทำให้ได้ว่า $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{e^x} = 0$

6. ลิมิตเป็นรูปอินดิเทอร์มิเนต $\frac{\infty}{\infty}$ ซึ่งจำเป็นต้องคำนวณค่าด้วยกฎของโลปิตาล ดังนี้

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

7. ลิมิตเป็นรูปอินดิเทอร์มิเนต $\frac{0}{0}$ ซึ่งจำเป็นต้องคำนวณค่าด้วยกฎของโลปิตาล ดังนี้

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x-\pi}} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\cos x}{1/2\,(x-\pi)^{-1/2}} = \lim_{x\to\pi^+} 2(x-\pi)^{1/2}\cos x \quad \text{(ไม่เป็นรูปอินดิเทอร์มิเนต)}$$

$$= 0$$

[หมายเหตุ : ลิมิตในข้อนี้มีความหมายเฉพาะเมื่อ $x \to \pi^+$ เพราะจะทำให้ $\sqrt{x-\pi}$ เป็นจำนวนจริง]

8. ลิมิตอยู่ในรูปอินดิเทอร์มิเนต $\frac{0}{0}$ ซึ่งจำเป็นต้องคำนวณค่าด้วยกฎของโลปิตาล ดังนี้

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2x} \quad \text{(ไม่เป็นรูปอินดิเทอร์มิเนต)} = \infty$$

9. ลิมิตอยู่ในรูปอินดิเทอร์มิเนต $\frac{0}{0}$ ซึ่งอาจใช้กฎของโลปิตาลในการคำนวณค่าลิมิตหรือไม่ก็ได้

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x-2)(x^2-x+1)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{(2)^2+2+1}{(2)^2-2+1} = \frac{7}{3}$$

10. ลิมิตอยู่ในรูปอินดิเทอร์มิเนต $\frac{0}{0}$ ซึ่งจำเป็นต้องคำนวณค่าลิมิตด้วยกฎของโลปิตาล ดังนี้

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^x - 3^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{5^x\ln 5 - 3^x\ln 3}{1} = \ln 5 - \ln 3 = \ln\frac{5}{3}$$

11. ลิมิตอยู่ในรูปอินดิเทอร์มิเนต $\frac{\infty}{\infty}$ ซึ่งจำเป็นต้องคำนวณค่าลิมิตด้วยกฎของโลปิตาล ดังนี้

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{e^x/(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0}) \quad = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+xe^x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = 1$$

12. สำหรับอินดิเทอร์มิเนตรูป $\frac{\infty}{\infty}$ ในข้อนี้หากใช้กฎของโลปิตาลในการคำนวณค่าลิมิตจะต้องใช้ซ้ำกันไปเรื่อย ๆ อย่างไม่มีที่สิ้นสุด ดังนี้

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \ldots..$$

ซึ่งแสดงว่า กฎโลปิตาลไม่ช่วยในการคำนวณค่าลิมิตสำหรับกรณีนี้ อย่างไรก็ตามเราสามารถนำวิธีการทางพีชคณิตมาช่วยในการคำนวณค่าลิมิต ดังนี้

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{x^2}+1} = 1$$

13. ลิมิตเป็นอินดิเทอร์มิเนตรูป $\frac{0}{0}$ ซึ่งใช้กฎของโลปิตาลในการคำนวณค่าได้ ดังนี้

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2} = \lim_{x\to 2} e^x = e^2$$

[หมายเหตุ : เราอาจพิจารณาลิมิตในข้อนี้เป็นอนุพันธ์ของ e^x ที่ $x = 2$ ก็ได้]

14. แม้ว่าลิมิตจะเป็นอินดิเทอร์มิเนตรูป $\frac{0}{0}$ แต่หากใช้กฎของโลปิตาลในการคำนวณโดยตรงจะมีความยุ่งยากในการหาอนุพันธ์ของทั้งเศษและส่วน เราจึงอาจพิจารณาแยกเป็นผลคูณของลิมิตรูปอินดิเทอร์มิเนต $\frac{0}{0}$ ย่อยกับลิมิตที่ไม่เป็นรูปอินดิเทอร์มิเนต ดังนี้

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\ln(1-x)} = \left[\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1+x}\right]\left[\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\ln(1-x)}\right] \quad (\text{วงเล็บหลังเป็นรูป } \tfrac{0}{0})$$

$$= (1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{-1/(1-x)} = \lim_{x\to 0}(1-x)e^x = 1$$

15. ลิมิตไม่เป็นรูปอินดิเทอร์มิเนต จึงไม่ใช้กฎของโลปิตาลในการคำนวณ

$\lim_{x\to -2}\ln(x^2+e^x) = \ln(4+e^{-2})$ เป็นค่าคงที่ และ $\lim_{x\to -2}(x+2) = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to -2}\frac{\ln(x^2+e^x)}{(x+2)} = \infty$

16. ลิมิตไม่เป็นรูปอินดิเทอร์มิเนต เพราะอยู่ในรูป $0^{-\infty}$

ให้ $y = x^{\ln x}$ แล้ว $\ln y = (\ln x)^2$ ทำให้ได้

$$\ln\left(\lim_{x\to0^+} y\right) = \lim_{x\to0^+} \ln y = \lim_{x\to0^+} (\ln x)^2 = +\infty$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to0^+} x^{\ln x} = \lim_{x\to0^+} y = \exp\left(2 \lim_{x\to0^+} \ln x\right) = +\infty$

17. แม้ว่าลิมิตจะเป็นรูปอินดิเทอร์มิเนต $\frac{0}{0}$ แต่เราจะใช้ squeezing theorem เข้าช่วยด้วย เพื่อความสะดวกและชัดเจนในการคำนวณค่าลิมิต ดังนี้

เพราะว่า $-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1$ ทำให้ได้ $\frac{-x^2}{\sin x} \leqslant \frac{x^2 \sin 1/x}{\sin x} \leqslant \frac{x^2}{\sin x}$

ซึ่ง $\lim_{x\to0^+} \frac{-x^2}{\sin x}$ และ $\lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{\sin x}$ ต่างเป็นอินดิเทอร์มิเนตรูป $\frac{0}{0}$ เมื่อใช้กฎของโลปิตาลในการคำนวณค่าลิมิต จะได้

$$\lim_{x\to0^+} \frac{-x^2}{\sin x} = \lim_{x\to0^+} \frac{-2x}{\cos x} = 0 \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x}{\cos x} = 0$$

ทำให้ได้ $\lim_{x\to0^+} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = 0$

18. แม้ว่าลิมิตจะอยู่ในรูปอินดิเทอร์มิเนตรูป $\infty - \infty$ แต่เราไม่จำเป็นต้องใช้กฎของโลปิตาลในการคำนวณ ดังนี้

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+x+1)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+1)/x}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+1/x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{2}{2} = 1$$

19. ลิมิตไม่เป็นรูปอินดิเทอร์มิเนต เพราะอยู่ในรูป ∞^∞ $\therefore \lim_{x\to+\infty} (\cot x)^{\sec x} = \infty$

20. ลิมิตไม่เป็นรูปอินดิเทอร์มิเนต เพราะอยู่ในรูป 0^∞ โดยวิธีการเดียวกับข้อ 16. จะได้

$$\lim_{x\to\pi/2} (\cos 3x)^{\sec^2 x} = \infty$$

21. รูป $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to0} \frac{2x-\sin^{-1}x}{2\tan^{-1}x-x} = \lim_{x\to0} \frac{2-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{2}{1+x^2}-1} = \lim_{x\to0} \frac{(2\sqrt{1-x^2}-1)(1+x^2)}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{(1)(1)}{1} = 1$$

22. รูป 0^0

ให้ $y = (1-e^{-x})^x$ แล้ว $\ln y = x\ln(1-e^{-x})$ ซึ่งทำให้ได้

$$\ln(\lim_{x\to 0} y) = \lim_{x\to 0}(\ln y) = \lim_{x\to 0} x\ln(1-e^{-x}) \quad (\text{รูป } 0.\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-e^{-x})}{1/x} \quad (\text{รูป } \tfrac{\infty}{\infty})$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)\cdot\frac{1}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2e^{-x}}{e^{-x}-1} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0})$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x\,e^{-x} - x^2e^{-x}}{-e^{-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(2x-x^2)e^{-x}}{-e^{-x}} = \lim_{x\to 0}(x^2-2x) = 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 0}(1-e^{-x})^x = \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$

23. รูป $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln(e^x-1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{e^x/(e^x-1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{xe^x} \quad (\text{รูป } \tfrac{\infty}{\infty})$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+x\,e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x(1+x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x} = 0$$

24. รูป 0^0

ให้ $y = (\sin x)^{\tan x}$ แล้ว $\ln y = \tan x\ln(\sin x)$ ซึ่งทำให้ได้

$$\ln(\lim_{x\to 0^+} y) = \lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}(\tan x)\ln(\sin x) \quad (\text{รูป } 0.\infty)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\cot x} \quad (\text{รูป } \tfrac{\infty}{\infty})$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x/\sin x}{-\csc^2 x} = \lim_{x\to 0^+}(-\cos x\,.\,\sin x) = 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$

25. รูป 1^∞

ให้ $y = (1+\frac{2}{x})^{4x}$ แล้ว $\ln y = 4x\ln(1+\frac{2}{x})$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\ln(\lim_{x\to+\infty} y) = \lim_{x\to+\infty}\ln y = \lim_{x\to+\infty}4x\ln(1+\tfrac{2}{x}) \quad (\text{รูป } \infty.0)$$

$$= 4\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2/x)}{1/x} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0}) = 4\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)\left(\frac{x-2-x}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{-1/x^2}$$

$$= 4\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+2} = (4)(2) = 8$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2}{x})^{4x} = \lim_{x\to+\infty} y = e^8$

26. รูป $0.\infty$

$$\lim_{x\to 0}(e^{2x}-1)\cot x = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0}) = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\sec^2 x} = 0$$

27. รูป $0.\infty$

เพราะว่า $\lim_{x\to 0^+} 3^{\sin x\csc 5x} = 3^{\lim_{x\to 0^+}\sin x\csc 5x}$ และ

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x\csc 5x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sin 5x} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0}) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{5\cos 5x} = \frac{1}{5}$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 0^+} 3^{\sin x\csc 5x} = \sqrt[5]{3}$

28. รูป $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(\ln x)}{1/(1-x)} = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\left(-\frac{(-1)}{(1-x)^2}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x(1-x)^2\ln x} = +\infty$$

29. รูป $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tanh^{-1}x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x^2} = 1$$

30. รูป 1^{∞}

ให้ $y = (\sin x - \cos x)^{\tan x}$ แล้ว $\ln y = \tan x\ln(\sin x - \cos x)$ ซึ่งทำให้ได้

$$\ln(\lim_{x\to\pi/2} y) = \lim_{x\to\pi/2}(\ln y) = \lim_{x\to\pi/2}\tan x\ln(\sin x - \cos x) \quad (\text{รูป } \infty.0)$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(\sin x - \cos x)}{\cot x} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0}) = \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}\right)\cdot\frac{1}{(-\csc^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{1+\sin 2x}{(-\cos 2x)}\cdot(-\sin^2 x) = \frac{(1+0)(-1)}{-(-1)} = -1$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to\pi/2}(\sin x - \cos x)^{\tan x} = \lim_{x\to\pi/2} y = e^{-1} = \frac{1}{e}$

31. รูป $0.\infty$

$$\lim_{x\to 0} x^2(\csc x\cot x) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin^2 x} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0})$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right) = (1)^2(1) = 1$$

[หมายเหตุ : ขอให้สังเกตุว่า การคำนวณค่าลิมิตในข้อนี้ ไม่จำเป็นต้องใช้กฎของโลปิตาล]

32. รูป 0^0

ให้ $y = x^{x^2}$ แล้ว $\ln y = x^2 \ln x$ ดังนั้น

$$\ln(\lim_{x\to 0} y) = \lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} x^2 \ln x \quad (\text{รูป } 0.\infty) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x^2} \quad (\text{รูป } \tfrac{\infty}{\infty})$$

$$= \lim_{x\to 0} (\tfrac{1}{x}).(\tfrac{x^3}{-2}) = \lim_{x\to 0} (\tfrac{-x^2}{2}) = 0$$

เพราะฉะนั้น $= \lim_{x\to 0} x^{x^2} = \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$

33. รูป 1^∞

ให้ $y = (1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2})^x$ แล้ว $\ln y = x \ln(1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2})$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\ln(\lim_{x\to +\infty} y) = \lim_{x\to +\infty} (\ln y) = \lim_{x\to +\infty} x \ln(1 + \tfrac{5}{x} + \tfrac{3}{x^2}) \quad (\text{รูป } 0.\infty)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{1/x} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0}) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(-\frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}\right)}{\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right) x^2}{\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(5 + \frac{6}{x}\right)}{\left(1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} = 5$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to +\infty} y = e^5$

34. รูป ∞^0

ให้ $\lim_{x\to +\infty} y = (\frac{1}{x})^{\sin x}$ แล้ว $\ln y = \sin x . \ln(\frac{1}{x}) = -\sin x \ln x$ ซึ่งทำให้ได้

$$\ln(\lim_{x\to 0^+} y) = \lim_{x\to 0^+} \ln y = -\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x \quad (\text{รูป } 0.\infty)$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} \quad (\text{รูป } \tfrac{\infty}{\infty}) = -\lim_{x\to 0^+} \frac{(1/x)}{-\csc x \cot x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x \tan x}{x} = \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0^+} \tan x\right) = (1)(0) = 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x})^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$

35. รูป ∞^0

ให้ $y = (\tan x)^{\cos x}$ แล้ว $\ln y = \cos x \ln \tan x$ ดังนั้น

$$\ln(\lim_{x\to\pi/2^-} y) = \lim_{x\to\pi/2^-} \ln y = \lim_{x\to\pi/2^-} \cos x \ln \tan x \quad (\text{รูป } 0.\infty)$$

$$= \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\ln \tan x}{\sec x} \quad (\text{รูป } \tfrac{\infty}{\infty}) = \lim_{x\to\pi/2^-} (\frac{\sec^2 x}{\tan x})(\frac{1}{\sec x \tan x})$$

$$= \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\sec x}{\tan^2 x} = \lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{0}{1} = 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to\pi/2^-} (\tan x)^{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2^-} y = e^0 = 1$

36. รูป $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x) = \lim_{x\to 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}) = \lim_{x\to 0} (\frac{1 - \cos x}{\sin x}) \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0})$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \tan x = 0$$

37. รูป $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\pi/2} (\sec^3 x - \tan^3 x) = \lim_{x\to\pi/2} (\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}) = \lim_{x\to\pi/2} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^3 x} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0})$$

$$= \lim_{x\to\pi/2} \frac{-3 \sin^2 x \cos x}{-3 \cos^2 x \sin x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x} = \infty$$

38. รูป 1^∞

ให้ $y = (\frac{\sin x}{x})^{1/x}$ แล้ว $\ln y = \frac{1}{x}\ln(\frac{\sin x}{x})$ ดังนั้น

$$\ln(\lim_{x\to 0} y) = \lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0})$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} (\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}) = \lim_{x\to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0})$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0})$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{- \sin x - x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 0} (\frac{\sin x}{x})^{1/x} = \lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$

39. รูป $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \tan x} = \lim_{x\to 0^+} (\frac{\cos x}{\sin x})(\frac{\tan x}{\sec^2 x}) = \lim_{x\to 0^+} \cos^2 x = 1$$

40. รูป $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{1-\cos^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2-(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

[หมายเหตุ : ลิมิตในข้อนี้คำนวณค่าได้โดยไม่จำเป็นต้องใช้กฎของโลปิตาล]

41. รูป 1^∞

ให้ $y = (\cos x + 2\sin x)^{\cot x}$ แล้ว $\ln y = \cot x \ln(\cos x + 2\sin x)$ ดังนั้น

$$\ln(\lim_{x\to 0^+} y) = \lim_{x\to 0^+}(\ln y) = \lim_{x\to 0^+}\cot x\ln(\cos x + 2\sin x) \quad (\text{รูป } 0.\infty)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} = \frac{\ln(\cos x + 2\sin x)}{\tan x} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0})$$

$$= \lim_{x\to 0^+} = \left(\frac{2\cos x - \sin x}{\cos x + 2\sin x}\right)\left(\frac{1}{\sec^2 x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\cos x - \sin x}{\cos x + 2\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0^+}\cos^2 x\right) = \frac{(2)(1)-0}{(1)+2(0)}.(1) = 2$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 0^+}(\cos x + 2\sin x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} y = e^2$

42. รูป 1^∞

ให้ $y = \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$ แล้ว $\ln y = x\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)$ ดังนั้น

$$\ln(\lim_{x\to+\infty} y) = \lim_{x\to+\infty}\ln y = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right) \quad (\text{รูป } 0.\infty)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right)}{1/x} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0}) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)\left[\frac{x-a - x-a}{(x-a)^2}\right].(-x^2)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(-2a)(-x^2)}{(x+a)(x-a)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2ax^2}{x^2-a^2} = 2a$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} y = e^{2a}$

43. รูป $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\ln(2+x)}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{1}{2+x} = 1$$

44. รูป $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\tan^{-1}x - x}{2x - \sin^{-1}x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+x^2} - 1}{2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{(2-1-x^2)}{(1+x^2)}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{(2\sqrt{1-x^2}-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)^{3/2}}{(1+x^2)(2\sqrt{1-x^2}-1)} = \frac{(1)}{(1)(2-1)} = 1$$

45. รูป $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{8^x - 2^x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{8^x \ln 8 - 2^x \ln 2}{4} = \frac{\ln 8 - \ln 2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{8}{2} = \frac{1}{4}\ln 4 = \frac{1}{2}\ln\sqrt{4} = \frac{1}{2}\ln 2$$

46. รูป $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \cot x}{e^{\csc^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{-\csc^2 x}{\cot x}\right) \cdot \frac{1}{(-2\csc^2 x \cot x)\, e^{\csc^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\cot^2 x\, e^{\csc^2 x}} = 0$$

47. รูป $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{ax^{a-1}}{be^{bx}} = \ldots..$$

ทำซ้ำไป n ครั้ง (โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกตัวน้อยสุด ซึ่ง $n \geqslant a$) จะได้

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\ldots..(a-n+1)}{b^n e^{bx} \cdot x^{n-a}} \quad (n \geqslant a) = 0$$

48. รูป $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = \lim_{x\to +\infty} \frac{b(\ln x)^{b-1}(1/x)}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{b(\ln x)^{b-1}}{ax^a} \quad (\text{รูป } \tfrac{\infty}{\infty} \text{ ถ้า } b > 1)$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

ทำซ้ำไป n ครั้ง (โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกตัวน้อยสุด ซึ่ง $n \geqslant b$) จะได้

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = \lim_{x\to +\infty} \frac{b(\ln x)^{b-n}}{a^n x^a} \quad (n \geqslant b)$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{b}{a^n x^a (\ln x)^{n-b}} \quad (n - b \geqslant 0) = 0$$

49. รูป $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{e^{1/x^2}} \quad (\text{รูป } \tfrac{\infty}{\infty}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(-1/x^2)}{(-2/x^2)e^{1/x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2e^{1/x^2}} = 0$$

50. $$\lim_{n\to +\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \lim_{n\to +\infty} \frac{x^{1/n} - 1}{1/n} \quad (\text{รูป } \tfrac{0}{0} \text{ โดยที่ n เป็นตัวแปร})$$

$$= \lim_{n\to +\infty} \frac{x^{1/n} \ln x (-1/n^2)}{(-1/n^2)} = \lim_{n\to +\infty} x^{1/n} \ln x = \ln x$$