บทที่ 6
ฟังก์ชันหลายตัวแปร
(Functions of Several Variables)

สถานการณ์แต่ละสถานการณ์จะเกิดขึ้นได้จำเป็นจะต้องมีปัจจัยบางอย่างมากระทำให้สถานการณ์นั้นเกิดขึ้น บางสถานการณ์อาจเกิดขึ้นจากปัจจัยมากกว่าหนึ่งปัจจัย ตัวอย่างเช่น สถานการณ์น้ำท่วมบ้าน อาจเกิดขึ้นจากระดับความสูงของบริเวณที่บ้านตั้งอยู่ และปริมาณที่น้ำไหลผ่านบ้านเป็นต้น ในทางคณิตศาสตร์เราอาจสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับสถานการณ์ข้างต้นโดยใช้ “ฟังก์ชันหลายตัวแปร” ซึ่งจะได้ศึกษาในบทนี้ ก่อนที่จะกล่าวรายละเอียดต่อไป เราจะตกลงให้ $\mathbb{R}^n$ แทน ผลคูณคาร์ทีเซียน $\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n}$ ซึ่งหมายถึง $\{(x_1,x_2,...,x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{R}$ สำหรับทุก $1\le i\le n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

6.1 ฟังก์ชันหลายตัวแปร

ถ้านักศึกษาต้องการเก็บสะสมเงินโดยฝากธนาคารทุก ๆ ปี เป็นปีละ n บาท โดยธนาคารให้อัตราดอกเบี้ย $r\%$ ต่อปี เมื่อสิ้นปีที่ t จำนวนเงินที่นักศึกษาจะได้รับเท่ากับ N บาท ซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนเงินที่ฝาก ระยะเวลาที่ฝาก และอัตราดอกเบี้ย สถานการณ์ดังกล่าวสามารถเขียนได้ในรูปของความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร N, n, r และ t ดังนี้

$$N = f(n,r,t)$$

ซึ่งแต่ละชุดของ n, r และ t จะให้ค่าของ N เพียงค่าเดียว ในที่นี้จะเรียก ตัวแปร n, r และ t ว่า ตัวแปรอิสระและเรียกตัวแปร N ว่า ตัวแปรตาม เรียก f ว่าฟังก์ชันหลายตัวแปร

ในการศึกษาฟังก์ชันที่ผ่านมานักศึกษาได้ทราบมาแล้วว่า ความสัมพันธ์ $f\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ จะเป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x_1,x_2,...,x_n,y)\in f$ และ $(x_1,x_2,...,x_n,z)\in f$ แล้ว $y=z$ และเป็นฟังก์ชันจากเซต $D\subseteq\mathbb{R}^n$ ซึ่ง $D\neq\varnothing$ ไปยังเซต $\mathbb{R}$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน และทุก ๆ $(x_1,x_2,...,x_n)\in D$ จะมี $y\in\mathbb{R}$ ซึ่ง $(x_1,x_2,...,x_n,y)\in f$ เราใช้สัญลักษณ์ $f:D\to\mathbb{R}$ แทนข้อความ “f เป็นฟังก์ชันจากเซต D ไปยังเซต $\mathbb{R}$” และเขียนแทนค่าของฟังก์ชัน f ที่ $(x_1,x_2,...,x_n)$ ด้วยสัญลักษณ์ $f(x_1,x_2,...,x_n)$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

บทนิยาม 6.1.1 ให้ $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ เรียกฟังก์ชัน $f : D \to \mathbb{R}$ ว่า **ฟังก์ชัน n ตัวแปร** (function of n variables) เรียก D ว่า **โดเมน** (domain) ของ f และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ D_f เรียก $\{f(x_1, x_2, ..., x_n) \mid (x_1, x_2, ..., x_n) \in D\}$ ว่า **เรนจ์** (range) ของ f และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ R_f สำหรับกรณีที่ $n \geq 2$ เราจะเรียก ฟังก์ชัน n ตัวแปร ว่า**ฟังก์ชันหลายตัวแปร** (function of several variables) และสำหรับกรณีที่ $n = 1$ จะเรียกฟังก์ชัน n ตัวแปร ว่าฟังก์ชันตัวแปรเดียว

จากบทนิยาม 6.1.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ไปยัง $\mathbb{R}$ แล้วสำหรับแต่ละ $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ จะมีค่า $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น เราเรียก $x_1, x_2, ..., x_n$ ว่า **ตัวแปรอิสระ** (independent variable) และเรียก y ซึ่ง $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ว่า **ตัวแปรตาม** (dependent variable) และในกรณีนี้เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร $x_1, x_2, ..., x_n$

ตัวอย่าง 6.1.2 ให้ $f = \{((x, y), z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z = x^2 + y^2\}$

1. จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน
2. จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน
3. จงหา $f(-1,3)$ และ $f(2,4)$

วิธีทำ 1. ให้ $((x, y), z_1) \in f$ และ $((x, y), z_2) \in f$ จะได้ว่า $z_1 = x^2 + y^2$ และ $z_2 = x^2 + y^2$ ดังนั้น $z_1 = z_2$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน

2. แต่ละ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ จะมี $z = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $((x, y), z) \in f$ ดังนั้น $D_f = \mathbb{R}^2$ สังเกตว่า $x^2 + y^2 \geq 0$ สำหรับทุก $(x, y) \in D_f$ ดังนั้นสำหรับจำนวนจริง z ใด ๆ ซึ่ง $z \geq 0$ เลือก $x = 0$ และ $y = \sqrt{z}$ จะได้ว่า $x^2 + y^2 = z$ แสดงว่า $((x, y), z) \in f$ ดังนั้น $R_f = \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}$

3. จะเห็นว่า $f(-1,3) = (-1)^2 + (3)^2 = 10$ และ $f(2,4) = 2^2 + 4^2 = 20$ ❍

ตัวอย่าง 6.1.3 จงตรวจสอบว่า $g = \{((x, y), z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid x + y = z^2\}$ เป็นฟังก์ชันหรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $((1,3),2) \in g$ และ $((1,3),-2) \in g$ เพราะ $1 + 3 = 2^2$ และ $1 + 3 = (-2)^2$ แสดงว่า g ไม่เป็นฟังก์ชัน ❍

ตัวอย่าง 6.1.4 ให้ $f = \{((x, y, z), w) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mid w = x^2 + y^2 + z^2\}$

1. จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน
2. จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f
3. จงหา $f(-1,0,2)$ และ $f(2,1,-1)$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

วิธีทำ 1. ให้ $((x,y,z),w_1)\in f$ และ $((x,y,z),w_2)\in f$ จะได้ว่า $w_1=x^2+y^2+z^2$ และ $w_2=x^2+y^2+z^2$ ดังนั้น $w_1=w_2$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน

2. แต่ละ $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ จะมี $w=x^2+y^2+z^2\in\mathbb{R}$ ซึ่ง $\big((x,y,z),w\big)\in f$ ดังนั้น $D_f=\mathbb{R}^3$ สังเกตว่า $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2\geq 0$ สำหรับทุก $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ และสำหรับจำนวนจริง w ใด ๆ ซึ่ง $w\geq 0$ เลือก $x=\sqrt{\frac{w}{3}}$, $y=\sqrt{\frac{w}{3}}$ และ $z=\sqrt{\frac{w}{3}}$ จะเห็นว่า

$$x^2+y^2+z^2=\frac{w}{3}+\frac{w}{3}+\frac{w}{3}=w$$

แสดงว่า $((x,y,z),w)\in f$ ดังนั้น $R_f=\{w\in\mathbb{R}\mid w\geq 0\}$

3. จะเห็นว่า $f(-1,0,2)=(-1)^2+0^2+2^2=5$ และ $f(2,1,-1)=2^2+1^2+(-1)^2=6$ ❍

ตัวอย่าง 6.1.5 ให้ $f=\{((x,y),z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\mid z=\frac{x}{y+2}\}$

1. จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน

2. จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f

วิธีทำ 1. ให้ $((x,y),z_1)\in f$ และ $((x,y),z_2)\in f$ จะได้ว่า $z_1=\frac{x}{y+2}$ และ $z_2=\frac{x}{y+2}$ ดังนั้น $z_1=z_2$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน

2. แต่ละ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ โดยที่ $y\neq -2$ จะมี $z=\frac{x}{y+2}\in\mathbb{R}$ ซึ่ง $\big((x,y),z\big)\in f$ ดังนั้น $D_f=\mathbb{R}^2$ โดยที่ $y\neq -2$ ดังนั้น $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\neq -2\}$ และสำหรับจำนวนจริง z ใด ๆ เลือก $x=z$ และ $y=-1$ จะเห็นว่า $\frac{x}{y+2}=\frac{z}{-1+2}=z$ นั่นคือ $((x,y),z)\in f$ ดังนั้น $R_f=\mathbb{R}$ ❍

แบบฝึกหัด 6.1

1. จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ f ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1.1 $f=\{((x,y),z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\mid z=\ln(2+x+y)\}$

1.2 $f=\{((x,y),z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\mid z^4=x^2+y^2\}$

1.3 $f=\{((x,y),z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\mid x+y^2+z^4=16\}$

1.4 $f=\{((x,y,z),w)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\mid w=2x+3y-z\}$

1.5 $f=\{((x,y,z),w)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\mid |x+y+z+w|=10\}$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

2. ให้ $f=\{((x,y),z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\mid z=\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\}$

2.1 จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน

2.2 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f

2.3 จงหา $f(4,9)$ และ $f(16,0)$

3. ให้ $f=\{((x,y),z)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\mid z=e^{x-y}\}$

3.1 จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน

3.2 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f

3.3 จงหา $f(1,2)$ และ $f(-3,1)$

4. ให้ $f=\{((x,y,z),w)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\mid w=\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}\}$

4.1 จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน

4.2 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f

4.3 จงหา $f(0,1,-2)$ และ $f(1,-1,2)$

5. ให้ $f=\{((x,y,z),w)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\mid w=\frac{-3}{x^2+y^2+z^2}\}$

5.1 จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน

5.2 จงหาโดเมนและเรนจ์ของ f

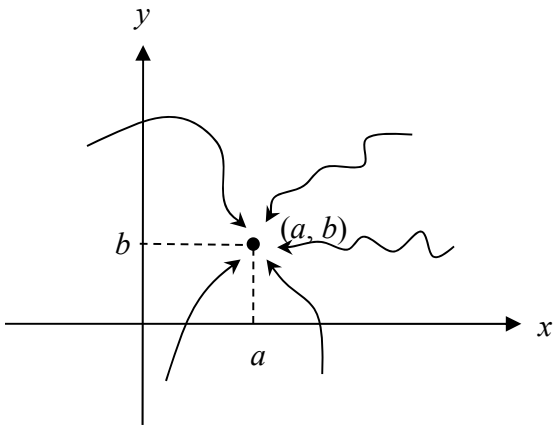
5.3 จงหา $f(1,-1,2)$ และ $f(2,0,-3)$

6.2 ลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร

ในการศึกษาที่ผ่านมาเราใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x\to a}f(x)=L$ แทนข้อความที่ว่า ถ้า x เข้าใกล้ a (ไม่ว่าจากทางซ้ายหรือทางขวาของ a) โดยที่ $x\neq a$ แล้ว $f(x)$ จะเข้าใกล้จำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียว เราจะขยายแนวคิดเรื่องลิมิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียวไปยังลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร นั่นคือ เราจะใช้สัญลักษณ์ $\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=L$ แทนข้อความที่ว่า ถ้า (x,y) เข้าใกล้ (a,b) (ไม่ว่าจะเข้าใกล้ (a,b) ในทิศทางใด) โดยที่ $(x,y)\neq(a,b)$ แล้ว $f(x,y)$ จะเข้าใกล้จำนวนจริง L เพียง

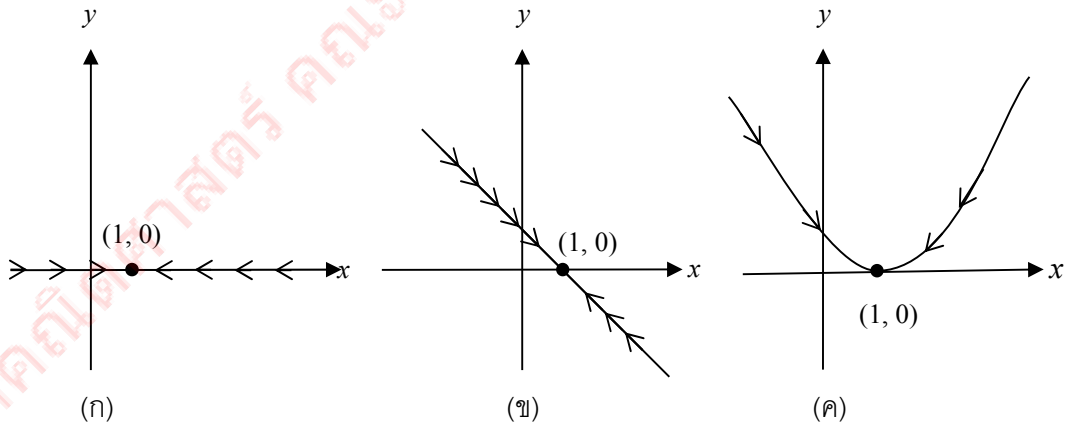
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

จำนวนเดียว แต่ในกรณีนี้ (x,y) และ (a,b) อยู่บนระนาบ xy ทั้งคู่ จึงทำให้ทิศทางที่ (x,y) เข้าใกล้ (a,b) มีได้มากมายนับไม่ถ้วน (ดูรูป 6.2.1)



รูป 6.2.1

ตัวอย่างเช่น หากเรากล่าวว่า (x,y) เข้าใกล้ $(1,0)$ จะเห็นว่า (x,y) อาจเข้าใกล้ $(1,0)$ ตามแนวแกน x ซึ่งจะหมายความว่า (x,y) เคลื่อนที่บนแกน x เข้าใกล้ $(1,0)$ ดังรูป 6.2.2 (ก) หรือ (x,y) อาจเข้าใกล้ $(1,0)$ ตามแนวเส้นตรง $y=1-x$ ซึ่งหมายความว่า (x,y) เคลื่อนที่บนเส้นตรง $y=1-x$ เข้าใกล้ $(1,0)$ ดังรูป 6.2.2 (ข) หรือ (x,y) อาจเข้าใกล้ $(1,0)$ ตามแนวเส้นโค้งพาราโบลา $y=(x-1)^2$ ซึ่งหมายความว่า (x,y) เคลื่อนที่บนเส้นโค้งพาราโบลา $y=(x-1)^2$ เข้าใกล้ $(1,0)$ ดังรูป 6.2.2 (ค)



รูป 6.2.2

เราจะให้บทนิยามที่ชัดเจนของลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร โดยเริ่มจากบทนิยามต่อไปนี้

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

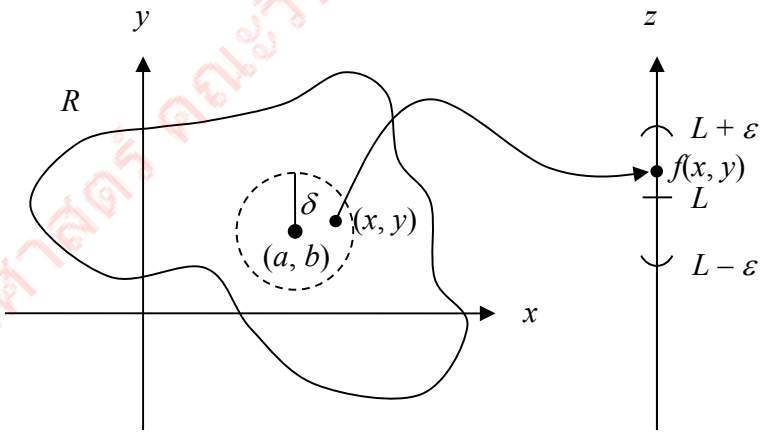
บทนิยาม 6.2.1 จะเรียกเซตของจุดที่อยู่ภายในวงกลมซึ่งไม่รวมจุดที่อยู่บนเส้นขอบวงกลมว่า**จานเปิด** (open disk) และเรียกเซตที่ประกอบไปด้วยจุดที่อยู่ภายในวงกลมและจุดที่อยู่บนเส้นขอบวงกลมว่า**จานปิด** (closed disk)

บทนิยาม 6.2.2 ให้ D เป็นจานเปิดใน $\mathbb{R}^2$ และ $(a,b)\in D$ ให้ $L\in\mathbb{R}$ และ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่นิยามบน $D-\{(a,b)\}$ เรากล่าวว่า L เป็น **ลิมิต**ของ $f(x,y)$ เมื่อ (x,y) เข้าใกล้ (a,b) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้

$$|f(x,y)-L|<\varepsilon$$

สำหรับทุก ๆ $(x,y)\in D$ ซึ่ง $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$

เราอาจอธิบายความหมายของข้อความ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ ในเชิงเรขาคณิตได้ดังนี้ สำหรับจำนวนจริงบวก ε พิจารณาช่วงเปิด $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ บนแกน z ถ้า $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ แล้ว จะมีจำนวนจริงบวก δ ซึ่งสำหรับทุก ๆ (x,y) ที่อยู่ภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (a,b) และรัศมีเท่ากับ δ โดยที่ $(x,y)\neq(a,b)$ จะได้ว่า $f(x,y)$ จะต้องอยู่ในช่วง $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$ (ดูรูป 6.2.3)



รูป 6.2.3

ทฤษฎีบท 6.2.3 จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x=a$ และ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y=b$

บทพิสูจน์ เราจะเริ่มโดยการแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x=a$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ให้ $\varepsilon > 0$ เราจะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ แล้ว

$$| f(x,y) - L | = | x - a | < \varepsilon$$

ก่อนอื่นขอให้สังเกตว่า $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \geq \sqrt{(x-a)^2} = | x - a |$ ดังนั้นถ้าเราเลือก $\delta = \varepsilon$ จะเห็นว่าถ้า $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ แล้ว $| x - a | = \sqrt{(x-a)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta = \varepsilon$ ตามต้องการ

สำหรับกรณี $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y = b$ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน □

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเป็นเครื่องมือในการหาลิมิตของฟังก์ชันสองตัวแปร ซึ่งเราจะกล่าวเฉพาะตัวทฤษฎีบทโดยละการพิสูจน์ ผู้สนใจบทพิสูจน์สามารถศึกษาได้จากหนังสือแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปร

ทฤษฎีบท 6.2.4 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร โดยที่ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1$ และ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2$ เมื่อ L_1 และ L_2 เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} cf(x,y) = c \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \big(f(x,y) + g(x,y)\big) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_1 + L_2$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \big(f(x,y)g(x,y)\big) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_1 L_2$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ เมื่อ $L_2 \neq 0$

โดยผลของทฤษฎีบท 6.2.3 ประกอบกับทฤษฎีบท 6.2.4 และอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 6.2.5 สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ จะได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x^n = a^n$ และ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y^n = b^n$

ตัวอย่าง 6.2.6 จงหาค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (x^2 + y^3)$

วิธีทำ $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (x^2 + y^3) = \lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} x^2 + \lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} y^3 = 2^2 + 3^3 = 31$ ❍

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ตัวอย่าง 6.2.7 จงหาค่าของ $\lim_{(x,y)\to(1,-1)}(x^3+3x^2y-y)$

วิธีทำ $\lim_{(x,y)\to(1,-1)}(x^3+3x^2y-y)=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}x^3+\lim_{(x,y)\to(1,-1)}3x^2y-\lim_{(x,y)\to(1,-1)}y$

$$=\lim_{(x,y)\to(1,-1)}x^3+3\lim_{(x,y)\to(1,-1)}x^2\lim_{(x,y)\to(1,-1)}y-\lim_{(x,y)\to(1,-1)}y$$

$$=1^3+3(1)^2(-1)-(-1)=-1$$ ❍

บทนิยาม 6.2.8 จะเรียกฟังก์ชันสองตัวแปร f ว่า**พหุนาม** (polynomial) ในตัวแปร x และ y เมื่อ f เขียนได้ในรูปของผลบวกของพจน์ที่อยู่ในรูป cx^ny^m โดยที่ c เป็นค่าคงตัวและ n และ m เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และจะเรียกฟังก์ชันสองตัวแปรที่เขียนในรูป $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ ว่า**ฟังก์ชันตรรกยะ** (rational function) ในตัวแปร x และ y เมื่อ $P(x,y)$ และ $Q(x,y)$ ต่างเป็นพหุนามในตัวแปร x และ y

ตัวอย่าง 6.2.9 x^3-4xy^2+y-x และ x^2y+y^2+4xy ต่างเป็นพหุนามในตัวแปร x และ y ในขณะที่ $\frac{x^2y+xy^2+3}{xy-1}$ และ $\frac{x^3y^4+2xy^2}{x^2y+5}$ ต่างเป็นฟังก์ชันตรรกยะ

โดยผลของทฤษฎีบท 6.2.4 และบทแทรก 6.2.5 จะได้ทฤษฎีบท 6.2.10 และทฤษฎีบท 6.2.11 ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.2.10 ถ้า $P(x,y)$ เป็นพหุนามในตัวแปร x และ y แล้ว $\lim_{(x,y)\to(a,b)}P(x,y)=P(a,b)$

ทฤษฎีบท 6.2.11 ถ้า $P(x,y)$ และ $Q(x,y)$ ต่างเป็นพหุนามในตัวแปร x และ y แล้ว

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=\frac{P(a,b)}{Q(a,b)}$$

เมื่อ $Q(a,b)\neq 0$

ตัวอย่าง 6.2.12 จงหา $\lim_{(x,y)\to(2,-1)}(x^3-4xy^2+y-x)$

วิธีทำ เนื่องจาก x^3-4xy^2+y-x เป็นพหุนามในตัวแปร x และ y โดยทฤษฎีบท 6.2.10 จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)}(x^3-4xy^2+y-x)=(2)^3-4(2)(-1)^2+(-1)-(2)=-3$$ ❍

ตัวอย่าง 6.2.13 จงหา $\lim_{(x,y)\to(-2,3)}\frac{x^2y+xy^2+3}{xy-1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{x^2y+xy^2+3}{xy-1}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ โดยทฤษฎีบท 6.2.11 จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(-2,3)} \frac{x^2y+xy^2+3}{xy-1} = \frac{(-2)^2(3)+(-2)(3)^2+3}{(-2)(3)-1} = \frac{3}{7}$$ ❍

หมายเหตุ จากบทนิยาม 6.2.2 และความจริงที่ว่า (a,b) เป็นจุดในระนาบ จะมีทิศทางที่ (x,y) เข้าใกล้ (a,b) ได้มากมายนับไม่ถ้วนดังรูป 6.2.1 ทิศทางดังกล่าวนี้อาจเป็นทิศทางไปตามเส้นตรงที่มีความชันต่าง ๆ กัน หรือตามเส้นโค้งที่มีรูปแบบแตกต่างกันไป กรณีที่ $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ จะได้ว่าค่าของ $f(x,y)$ จะต้องเข้าใกล้ L เสมอ ไม่ว่า (x,y) จะเข้าใกล้ (a,b) ในทิศทางใดก็ตาม ข้อสังเกตนี้จะช่วยในการแสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ หาไม่ได้ กล่าวคือ

1. ถ้า $f(x,y)$ เข้าใกล้ L_1 เมื่อ (x,y) เข้าใกล้ (a,b) ตามทิศทาง P_1 และ $f(x,y)$ เข้าใกล้ L_2 เมื่อ (x,y) เข้าใกล้ (a,b) ตามทิศทาง P_2 (ที่ต่างไปจาก P_1) โดยที่ $L_1 \neq L_2$ แล้ว $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ หาไม่ได้

หรือ

2. ถ้า $f(x,y)$ ไม่เข้าใกล้จำนวนจริงใดเลย เมื่อ (x,y) เข้าใกล้ (a,b) ตามทิศทาง P ทิศทางหนึ่ง แล้ว $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ หาไม่ได้

ตัวอย่าง 6.2.14 จงแสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ หาไม่ได้

วิธีทำ จะเห็นว่าถ้าให้ (x,y) เข้าใกล้ $(0,0)$ ตามแนวแกน x จะได้ว่า $y=0$ และ x มีค่าเข้าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0 ซึ่งทำให้

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ along\ y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0$$

ในขณะเดียวกันถ้าให้ (x,y) เข้าใกล้ $(0,0)$ ตามแนวเส้นตรง $y=x$ จะทำให้

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ along\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cdot x}{x^2+x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

แสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ หาไม่ได้ ❍

ตัวอย่าง 6.2.15 จงแสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y}{x+y-1}$ หาไม่ได้

วิธีทำ จะเห็นว่าถ้าให้ (x,y) เข้าใกล้ $(1,0)$ ตามแนวเส้นตรง $x=1$ จะได้ว่า $x=1$ และ y มีค่าเข้าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0 ซึ่งทำให้

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ along\ x=1}} \frac{y}{x+y-1} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y}{1+y-1} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} 1 = 1$$

ในขณะเดียวกันถ้าให้ (x,y) เข้าใกล้ $(1,0)$ ตามแนว $y=(x-1)^2$ จะทำให้

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ along\ y=(x-1)^2}} \frac{y}{x+y-1} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2}{(x-1)+(x-1)^2} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(1+(x-1))} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)}{x} = 0$$

แสดง $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y}{x+y-1}$ หาไม่ได้ ❍

ตัวอย่าง 6.2.16 จงแสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{y-2}{x^2-4}$ หาไม่ได้

วิธีทำ จะเห็นว่าถ้าให้ (x,y) เข้าใกล้ $(2,3)$ ตามแนวเส้นตรง $y=3$ จะได้ว่า $y=3$ และ x มีค่าเข้าใกล้ 2 แต่ไม่เท่ากับ 2 ซึ่งทำให้

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(2,3)\\ along\ y=3}} \frac{y-2}{x^2-4} = \lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{y-2}{x^2-4}\bigg|_{y=3} = \lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{3-2}{x^2-4} = \infty$$

แสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{y-2}{x^2-4}$ หาไม่ได้ ❍

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยในการหาลิมิตของฟังก์ชันผลประกอบ ซึ่งเราจะกล่าวเฉพาะทฤษฎีบทโดยละการพิสูจน์ ผู้สนใจบทพิสูจน์ศึกษาได้จากหนังสือแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปร

ทฤษฎีบท 6.2.17 ให้ M เป็นจำนวนจริง g เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=M$ และ f เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียวซึ่งต่อเนื่องที่ M แล้ว

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(g(x,y)) = f(M) = f(\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y))$$

ตัวอย่าง 6.2.18 จงหา $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \ln(xy+1)$

วิธีทำ ให้ $g(x,y)=xy+1$ และ $f(t)=\ln t$

จะเห็นว่า $\lim_{(x,y)\to(2,1)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,1)} xy+1 = 3$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 3 โดยทฤษฎี 6.2.17 จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \ln(xy+1) = \ln(\lim_{(x,y)\to(2,1)} (xy+1)) = \ln 3$$ ❍

ตัวอย่าง 6.2.19 จงหา $\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},\frac{1}{\pi})} \cos(x^2 y)$

วิธีทำ ให้ $g(x,y)=x^2y$ และ $f(t)=\cos t$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

จะเห็นว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},\frac{1}{\pi})} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},\frac{1}{\pi})} x^2y = \frac{\pi}{4}$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\frac{\pi}{4}$ โดยทฤษฎีบท 6.2.17 จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},\frac{1}{\pi})} \cos(x^2y) = \cos\left(\lim_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},\frac{1}{\pi})} x^2y\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ ❍

เราสามารถขยายนิยาม และทฤษฎีบทต่าง ๆ ข้างต้นไปสู่ฟังก์ชัน n ตัวแปร ซึ่ง $n \geq 3$ ได้ ในทำนองเดียวกับฟังก์ชันสองตัวแปร

บทนิยาม 6.2.20 ให้ D เป็นจานเปิดใน $\mathbb{R}^n$ และ $(a_1,a_2,...,a_n) \in D$ ให้ $L \in \mathbb{R}$ และ f เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปรที่นิยามบน $D-\{(a_1,a_2,...,a_n)\}$ เรากล่าวว่า L เป็น **ลิมิต**ของ $f(x_1,x_2,...,x_n)$ เมื่อ $(x_1,x_2,...,x_n)$ เข้าใกล้ $(a_1,a_2,...,a_n)$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(a_1,a_2,...,a_n)} f(x_1,x_2,...,x_n) = L$ ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้

$$|f(x_1,x_2,...,x_n)-L| < \varepsilon$$

สำหรับทุก ๆ $(x_1,x_2,...,x_n) \in D$ ซึ่ง $0 < \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+...+(x_n-a_n)^2} < \delta$

นักศึกษาที่สนใจสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสือแคลคูลัสของฟังก์ชัน n ตัวแปร

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงหาลิมิตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (3x^2y^2+2x-y)$

1.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \frac{x^2y}{4x^2-y}$

1.3 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x+y}{x^2-2xy}$

1.4 $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-2)} \frac{xy+1}{xy-1}$

2. จงแสดงว่าลิมิตของ f หาค่าไม่ได้ที่ (a,b) ในแต่ละข้อต่อไปนี้

2.1 $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, $(a,b) = (0,0)$

2.2 $f(x,y) = \frac{2x-y^2}{2x+y^2}$, $(a,b) = (0,0)$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

2.3 $f(x,y)=\dfrac{3x^3\sqrt{y}}{x^4+y^2}$, $(a,b)=(0,0)$ 2.4 $f(x,y)=\dfrac{4xy}{3y^2-x^2}$, $(a,b)=(0,0)$

2.5 $f(x,y)=\dfrac{2y^2}{(x-2)^2+y^2}$, $(a,b)=(2,0)$

3. จงใช้ทฤษฎีบท 6.2.18 ในการหาลิมิตในแต่ละข้อต่อไปนี้

3.1 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)}\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ 3.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(\ln 3,\ln 2)}e^{x-y}$

3.3 $\lim\limits_{(x,y)\to(4,2)}\sqrt{\dfrac{1}{3x-4y}}$ 3.4 $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,\frac{\sqrt{\pi}}{2})}\sin(5x+y^2)$

6.3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชันหลายตัวแปร

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาความต่อเนื่องของฟังก์ชันสองตัวแปรโดยขยายแนวคิดเรื่องความต่อเนื่องของฟังก์ชันตัวแปรเดียว เราได้ทราบมาแล้วว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียวที่ต่อเนื่องที่ a แล้ว $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ เราสามารถนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชันหลายตัวแปรได้ในทำนองเดียวกันดังนี้

บทนิยาม 6.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันหลายตัวแปร เรากล่าวว่า f **ต่อเนื่อง** (continuous) ที่ $(a_1,a_2,...,a_n)$ ถ้า f สอดคล้องเงื่อนไขทั้ง 3 ข้อต่อไปนี้

1. $f(a_1,a_2,...,a_n)$ หาได้
2. $\lim\limits_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(a_1,a_2,...,a_n)}f(x_1,x_2,...,x_n)$ หาได้
3. $\lim\limits_{(x_1,x_2,...,x_n)\to(a_1,a_2,...,a_n)}f(x_1,x_2,...,x_n)=f(a_1,a_2,...,a_n)$

ในกรณีที่ f ไม่สอดคล้องกับข้อใดข้อหนึ่งใน 3 ข้อข้างต้น เรากล่าวว่า f **ไม่ต่อเนื่อง** (discontinuous) ที่ $(a_1,a_2,...,a_n)$

ตัวอย่าง 6.3.2 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงแสดงว่าฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x,y)=x$ ต่อเนื่องที่ (a,b)

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 6.2.4 จะได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}x=a$ และเนื่องจาก $f(a,b)=a$ ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=f(a,b)$ แสดงว่า f ต่อเนื่องที่ (a,b) ❍

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ตัวอย่าง 6.3.3 จงแสดงว่าฟังก์ชันที่นิยามโดย $g(x,y)=x^2+2y$ ต่อเนื่องที่ $(1,2)$

วิธีทำ เนื่องจาก g เป็นพหุนาม โดยทฤษฎีบท 6.2.17 จะได้ว่า

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} g(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x^2+2y)=1^2+2(2)=5$ และเนื่องจาก $g(1,2)=1^2+2(2)=5$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} g(x,y)=g(1,2)$ แสดงว่า ❍

ตัวอย่าง 6.3.4 ให้ $f(x,y)=\dfrac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}$ จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่ $(0,0)$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $f(0,0)$ หาไม่ได้ ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$ ❍

ตัวอย่าง 6.3.5 ให้ $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & (x,y)\neq(2,3) \\ -1, & (x,y)=(2,3) \end{cases}$ จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่ $(2,3)$ หรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า $f(2,3)=-1$ แสดงว่า $f(2,3)$ หาได้

ต่อไปเราจะพิจารณา $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}(x^2+y^2)=2^2+3^2=13$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)\neq f(2,3)$ นั่นคือ f ไม่ต่อเนื่องที่ $(2,3)$ ❍

ทฤษฎีบท 6.3.6 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปรซึ่งต่อเนื่องที่ $(a_1,a_2,...,a_n)$ แล้ว

1. cf ต่อเนื่องที่ $(a_1,a_2,...,a_n)$ สำหรับทุกจำนวนจริง c
2. $f+g$ ต่อเนื่องที่ $(a_1,a_2,...,a_n)$
3. fg ต่อเนื่องที่ $(a_1,a_2,...,a_n)$
4. $\dfrac{f}{g}$ ต่อเนื่องที่ $(a_1,a_2,...,a_n)$ เมื่อ $g(a_1,a_2,...,a_n)\neq 0$

ตัวอย่าง 6.3.7 จงแสดงว่าฟังก์ชัน f และ g ต่อเนื่องที่ $(1,2)$ เมื่อให้

$$f(x,y)=(x^3y^2-x+1)(x^2+2y) \text{ และ } g(x,y)=\frac{x^3y^2-x+1}{x^2+2y}$$

วิธีทำ ให้ h เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $h(x)=x^3y^2-x+1$

เนื่องจาก $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} h(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(x^3y^2-x+1)=(1)^3(2)^2-(1)+1=4=h(1,2)$

แสดงว่า h ต่อเนื่องที่ $(1,2)$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ให้ $k(x,y)=x^2+2y$ จากตัวอย่าง 6.3.3 เราทราบมาแล้วว่า k ต่อเนื่องที่ $(1,2)$ โดยทฤษฎีบท 6.3.6(2) จะได้ว่า f ต่อเนื่องที่ $(1,2)$ และโดยทฤษฎีบท 6.3.6(3) จะได้ว่า g ต่อเนื่องที่ $(1,2)$ เนื่องจาก $k(1,2)=1^2+2(2)\neq 0$ ❍

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะช่วยในการพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันหลายตัวแปร เราจะกล่าวเฉพาะตัวทฤษฎีบทโดยละบทพิสูจน์ ผู้ที่สนใจบทพิสูจน์สามารถศึกษาได้จากหนังสือแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปร

ทฤษฎีบท 6.3.8 สามารถพิจารณาฟังก์ชันตัวแปรเดียวเป็นฟังก์ชัน n ตัวแปรแล้วใช้ทฤษฎีบท 6.3.6 ให้ h เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปรซึ่งต่อเนื่องที่ $(a_1,a_2,...,a_n)$ และ g เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียวซึ่งต่อเนื่องที่ $h(a_1,a_2,...,a_n)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปรที่นิยามโดย $f(x_1,x_2,...,x_n)=g(h(x_1,x_2,...,x_n))$ แล้ว f ต่อเนื่องที่ $(a_1,a_2,...,a_n)$

ตัวอย่าง 6.3.9 ให้ $g(x)=\sin x$ และ $h(x,y)=xy^4$ จะเห็นว่า h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ (a,b) สำหรับทุกจำนวนจริงใด ๆ a และ b และเนื่องจาก $h(a,b)=ab^4$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง g ต่อเนื่องที่ $h(a,b)=ab^4$ โดยทฤษฎีบท 6.3.8 จะได้ว่า $f(x,y)=(g\circ h)(x,y)=(g(xy^4))=\sin(xy^4)$ ต่อเนื่องที่ (a,b) ❍

บทนิยาม 6.3.10 ให้ f เป็นฟังก์ชันหลายตัวแปร เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องบน $R\subseteq\mathbb{R}^n$ ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด $(a_1,a_2,...,a_n)\in R$

โดยบทนิยาม 6.3.10 ทฤษฎีบท 6.2.10 และทฤษฎีบท 6.2.11 เราจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.3.11 ให้ P และ Q เป็นฟังก์ชันพหุนามใน n ตัวแปร จะได้ว่า

1. P เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^n$
2. ฟังก์ชันตรรกยะ $\dfrac{P}{Q}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^n$ ยกเว้นที่จุด $(a_1,a_2,...,a_n)$ ซึ่ง $Q(a_1,a_2,...,a_n)=0$

ตัวอย่าง 6.3.12 จงหาเซตของจุดในระนาบที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทำให้ฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2-y}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

วิธีทำ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันตรรกยะ โดยทฤษฎีบท 6.3.11(2) จะได้ว่า f ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \neq y\}$ ❍

ตัวอย่าง 6.3.13 จงหาเซตของจุดในระนาบที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทำให้ฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

วิธีทำ ให้ $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ และ $g(x) = \ln x$ จะเห็นว่า

$$g(h(x,y)) = \ln(x^2 + y^2 - 1) = f(x,y)$$

เนื่องจาก h เป็นพหุนาม จะได้ว่า h ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^2$ และเนื่องจาก g ต่อเนื่องบน $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ โดยทฤษฎีบท 6.3.8 จะได้ว่า f ต่อเนื่องบน $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 > 0\}$ หรือ f ต่อเนื่องบน $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ ซึ่งเซตดังกล่าวประกอบไปด้วยจุดในระนาบทุกจุดที่อยู่นอกวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ ❍

แบบฝึกหัด 6.3

1. จงพิจารณาว่า f ซึ่งกำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ (a,b) หรือไม่

1.1 $f(x,y) = \dfrac{xy+1}{x^2+y^2+1}$, $(a,b) = (0,0)$

1.2 $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}$, $(a,b) = (0,0)$

1.3 $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$, $(a,b) = (0,0)$

1.4 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-y^2}{2x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $(a,b) = (0,0)$

1.5 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $(a,b) = (0,0)$

2. จงหาเซตของจุดในระนาบที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทำให้ f ซึ่งกำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

2.1 $f(x,y)=\dfrac{2y^2}{(x-2)^2+y^2}$ 2.2 $f(x,y)=\dfrac{y\sin x}{x^2+y^2}$

2.3 $f(x,y)=4xy+\sin 3x^2y$ 2.4 $f(x,y)=e^{3x-4y}+x^2-y$

2.5 $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2-1}$ 2.6 $f(x,y)=\cos(\dfrac{xy}{2x+y-1})$

6.4 อนุพันธ์ย่อย (Partial Derivatives)

ในวิชาแคลคูลัส 1 เราได้ศึกษาถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวมาแล้ว ซึ่งอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวคืออัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าของฟังก์ชัน เมื่อเทียบกับตัวแปรอิสระ ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันหลายตัวแปร ซึ่งมีหลักการคล้ายกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียว

6.4.1 อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันหลายตัวแปร

เนื่องจากฟังก์ชันสองตัวแปรเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับจุด (x,y) บนระนาบ ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าของฟังก์ชันจึงพิจารณาได้หลายทิศทาง เช่นเราอาจพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงตามเส้นตรงที่ขนานกับแกนพิกัด ในกรณีนี้อัตราการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวจะหาได้จากการกำหนดให้ตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งคงตัวแล้วพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรที่เหลือ ในหัวข้อนี้เราจะเน้นการกล่าวถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงในรูปแบบนี้ซึ่งมีทั้งหมดสองรูปแบบคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน f เมื่อตัวแปร x เปลี่ยนแปลงไป (โดยตัวแปร y เป็นค่าคงตัว) และ อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน f เมื่อตัวแปร y เปลี่ยนแปลงไป (โดยตัวแปร x เป็นค่าคงตัว) จะเรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงทั้งสองนี้ว่า อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x และอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร y ตามลำดับ

บทนิยาม 6.4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าขึ้นอยู่กับตัวแปร x และ y ซึ่งมี D เป็นโดเมนและมี (a,b) เป็นจุดภายในของ D

1. เรากล่าวว่า f **มีอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร x ที่จุด (a,b)** (partial derivative of f with respect to x at (a,b)) ถ้า $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x,b)-f(a,b)}{\Delta x}$ หาได้ ในกรณีนี้เราเรียกค่าลิมิตนี้

ว่าอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปร x ที่จุด (a,b) และเขียนสัญลักษณ์แทนอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปร x ที่จุด (a,b) ด้วย

$$f_x(a,b)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x,b)-f(a,b)}{\Delta x}$$

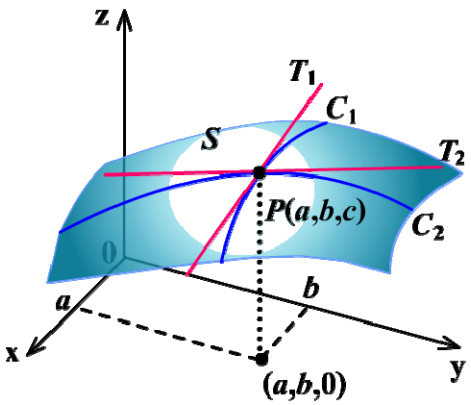
2. เรากล่าวว่า f **มีอนุพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร y ที่จุด** (a,b) (partial derivative of f with respect to y at (a,b)) ถ้า $\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(a,b+\Delta y)-f(a,b)}{\Delta y}$ หาได้ ในกรณีนี้เราเรียกค่าลิมิตนี้ว่าอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปร y ที่จุด (a,b) และเขียนสัญลักษณ์แทนอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปร y ที่จุด (a,b) ด้วย

$$f_y(a,b)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(a,b+\Delta y)-f(a,b)}{\Delta y}$$

หมายเหตุ อนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปร x ที่จุด (a,b) คืออนุพันธ์ของ f เทียบกับตัวแปร x ที่จุด $x=a$ โดยพิจารณาให้ตัวแปร y เป็นค่าคงตัว หรือตรึงให้ค่า $y=b$ ส่วนอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปร y ที่จุด (a,b) คืออนุพันธ์ของ f เทียบกับตัวแปร y ที่จุด $y=b$ โดยพิจารณาให้ตัวแปร x เป็นค่าคงตัว หรือตรึงให้ค่า $x=a$

สำหรับความหมายเชิงเรขาคณิตของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันจะสามารถอธิบายได้โดยอาศัยความหมายเชิงเรขาคณิตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว
ดังนี้

ให้ S แทนพื้นผิว $z=f(x,y)$ ในปริภูมิสามมิติ ถ้า $f(a,b)=c$ จะได้ว่าจุด $P(a,b,c)$ เป็นจุดบนพื้นผิว S ให้ C_1 แทนเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $y=b$ กับพื้นผิว S และ C_2 แทนเส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $x=a$ กับพื้นผิว S



รูป 6.4.1

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

จะเห็นว่าเส้นโค้ง C_1 นี้เป็นกราฟของฟังก์ชัน g ซึ่ง $g(x)=f(x,b)$ ดังนั้น $g'(a)=f_x(a,b)$ เพราะฉะนั้นอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปร x ที่จุด (a,b) เป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_1 ที่จุด P ทำนองเดียวกันเส้นโค้ง C_2 เป็นกราฟของฟังก์ชัน h ซึ่ง $h(y)=f(a,y)$ ดังนั้น $h'(b)=f_y(a,b)$ เพราะฉะนั้นอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปร y ที่จุด (a,b) เป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_2 ที่จุด P ดังรูป 6.4.1

ขอให้สังเกตว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มี x และ y เป็นตัวแปรอิสระ และมี z เป็นตัวแปรตาม และมีอนุพันธ์ย่อย f_x และ f_y ที่จุด (x,y) ใด ๆ ในโดเมนของ f แล้วเราเขียนแทนอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ด้วยสัญลักษณ์ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

$$f_x(x,y)=f_x=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}$$

และ

$$f_y(x,y)=f_y=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}$$

สำหรับที่จุด (a,b) ในโดเมนของ f เราเขียนแทนอนุพันธ์ย่อย f_x และ f_y ที่จุด (a,b) ด้วย

$$f_x(a,b)=\frac{\partial}{\partial x}f(a,b)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\Big|_{(a,b)}=\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(a,b)}$$

$$f_y(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}f(a,b)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\Big|_{(a,b)}=\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(a,b)}$$

ตัวอย่าง 6.4.2 กำหนดให้ $f(x,y)=5x^2y^3+3x-4y$ จงหา $f_x(1,2)$ และ $f_y(1,2)$

วิธีทำ วิธีที่ 1 ทำได้โดยใช้บทนิยาม 6.4.1

$$\begin{aligned}
f_x(1,2)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,2)-f(1,2)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[5(1+\Delta x)^2(2^3)+3(1+\Delta x)-4(2)]-[5(1^2)(2^3)+3(1)-4(2)]}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(40\Delta x+83)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}40\Delta x+83 \quad = \quad 83\\
f_y(1,2)&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(1,2+\Delta y)-f(1,2)}{\Delta y}\\
&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{[5(1^2)(2+\Delta y)^3+3(1)-4(2+\Delta y)]-[5(1^2)(2^3)+3(1)-4(2)]}{\Delta y}\\
&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y(5(\Delta y)^2+30\Delta y+56)}{\Delta y}\\
&=\lim_{\Delta y\to 0}5(\Delta y)^2+30\Delta y+56 \quad = \quad 56
\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 สำหรับการหาอนุพันธ์ย่อย f_x ที่จุด $(1,2)$ เราจะตรึงค่า y โดยให้ $y=2$ กล่าวคือ เราให้ $g(x)=f(x,2)=40x^2+3x-8$ เป็นฟังก์ชันของ x เพียงอย่างเดียว

ดังนั้น $g'(x) = 80x+3$ และ $g'(1) = 80(1)+3=83$

จึงได้ว่า $f_x(1,2) = 83$

ในทำนองเดียวกัน การหาอนุพันธ์ย่อย f_y ที่จุด $(1,2)$ เราจะตรึงค่า x โดยให้ $x=1$ กล่าวคือ เราให้ $h(y)=f(1,y)=5y^3+3-4y$ เป็นฟังก์ชันของ y เพียงอย่างเดียว

ดังนั้น $h'(y)=15y^2-4$ และ $h'(2)=15(2^2)-4 = 56$

จึงได้ว่า $f_y(1,2) = 56$ ❍

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 6.4.2 เราอาจหาอนุพันธ์ย่อยได้ดังนี้

1. ในการหาอนุพันธ์ย่อย f_x เราจะเปรียบตัวแปร y เสมือนค่าคงตัว แล้วพิจารณา f_x เป็นอนุพันธ์ของ f เทียบกับตัวแปร x เพียงตัวเดียว

2. ในการหาอนุพันธ์ย่อย f_y เราจะเปรียบตัวแปร x เสมือนค่าคงตัว แล้วพิจารณา f_y เป็นอนุพันธ์ของ f เทียบกับตัวแปร y เพียงตัวเดียว

ตัวอย่าง 6.4.3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$f(x,y)=2x^5y^2-x^4+3y-5$$

1. จงหา $f_x(x,y)$ และ $f_y(x,y)$

2. จงหา $f_x(-1,2)$ และ $f_y(-1,2)$

วิธีทำ

1. สำหรับการหา $f_x(x,y)$ เราเปรียบตัวแปร y ใน $f(x,y)$ เสมือนค่าคงตัวแล้วหาอนุพันธ์ของ f เทียบกับตัวแปร x ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$f_x(x,y) = 2(5)x^4y^2-4x^3+0-0 = 10x^4y^2-4x^3$$

ในการหา $f_y(x,y)$ เราเปรียบตัวแปร x ใน $f(x,y)$ เสมือนค่าคงตัวเมื่อเทียบกับ y แล้วหาอนุพันธ์ของ f เทียบกับตัวแปร y ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$f_y(x,y) = 2(2)x^5y-0+3-0 = 4x^5y+3$$

2. จากข้อ 1 เมื่อแทนค่า $x=-1$ และ $y=2$ จะได้

$$f_x(-1,2)=10(-1)^4 2^2-4(-1)^3=44$$

$$f_y(-1,2)=4(-1)^5(2)+3=-5$$ ❍

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ตัวอย่าง 6.4.4 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่กำหนดโดย $f(x,y)=\cos(\frac{x-2}{3y})$

จงหา $\frac{\partial f}{\partial x}$ และ $\frac{\partial f}{\partial y}$

วิธีทำ ถ้าเราพิจารณาการหาอนุพันธ์ย่อยโดยให้ตัวแปรหนึ่งคงตัวแล้ว จะเห็นว่า $\cos(\frac{x-2}{3y})$ เป็นฟังก์ชันประกอบที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรเพียงตัวเดียว ดังนั้นการหาอนุพันธ์ย่อยจึงจำเป็นต้องใช้กฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียวที่กล่าวไว้ในวิชาแคลคูลัส 1 ดังนี้

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\sin(\frac{x-2}{3y})\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-2}{3y})=-(\frac{1}{3y})\sin(\frac{x-2}{3y})$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\sin(\frac{x-2}{3y})\frac{\partial}{\partial y}(\frac{x-2}{3y})=-\sin(\frac{x-2}{3y})(\frac{-(x-2)}{3y^2})=(\frac{x-2}{3y^2})\sin(\frac{x-2}{3y})$$ ❍

ตัวอย่าง 6.4.5 จงหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ และ $\frac{\partial z}{\partial y}$ เมื่อกำหนดให้ $z=f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันโดยปริยายของตัวแปร x และ y ซึ่งกำหนดโดย

$$x^4+y^3+z^2+5xyz=x$$

วิธีทำ สมการนี้สามารถจัดรูปได้เป็น

$$x^4+y^3+z^2+5xyz-x=0$$

เราหา $\frac{\partial z}{\partial x}$ โดยการหาอนุพันธ์ย่อยโดยปริยายของฟังก์ชัน z เทียบกับ x ซึ่งเราจะใช้ความรู้เรื่องกฎลูกโซ่ในแคลคูลัส 1 โดยจะถือว่าตัวแปร y เป็นค่าคงตัว

$$4x^3+2z\frac{\partial z}{\partial x}+5yz+5xy\frac{\partial z}{\partial x}-1=0$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}(2z+5xy)=1-4x^3-5yz$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1-4x^3-5yz}{2z+5xy}$$

ทำนองเดียวกันสำหรับ $\frac{\partial z}{\partial y}$ โดยเราจะถือว่าตัวแปร x เป็นค่าคงตัว

$$3y^2+2z\frac{\partial z}{\partial y}+5xz+5xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3y^2+5xz}{2z+5xy}$$

❍

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

สำหรับอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันหลายตัวแปรสามารถนิยามได้ในทำนองเดียวกันกับอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร และเราจะได้วิธีการหาอนุพันธ์ย่อยดังนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชันของ n ตัวแปรในตัวแปร $x_1, x_2, ..., x_n$ และ $(a_1, a_2, ..., a_n) \in D_f$ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, ..., n$ และ ให้ f_i เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียวในตัวแปร x_i ที่นิยามโดย

$$f_i(x_i) = f(a_1, a_2, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n)$$

ถ้า f_i หาอนุพันธ์ได้ที่ a_i แล้ว $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(a_1, a_2, ..., a_n)} = f_i'(a_i)$

ตัวอย่าง 6.4.6 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปรที่กำหนดโดย $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 - 5x_3$ จงหา $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(0,1,2)}, \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(0,1,2)}$ และ $\left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{(0,1,2)}$

วิธีทำ ให้ $f_1(x_1) = f(x_1, 1, 2) = x_1 + 2(1) - 5(2) = x_1 - 8$ เราจะได้ $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(0,1,2)} = f_1'(0) = 1$

ให้ $f_2(x_2) = f(0, x_2, 2) = 0 + 2x_2 - 5(2) = 2x_2 - 10$ เราจะได้ $\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(0,1,2)} = f_2'(1) = 2$

ให้ $f_3(x_3) = f(0, 1, x_3) = 0 + 2(1) - 5x_3 = 2 - 5x_3$ เราจะได้ $\left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{(0,1,2)} = f_3'(2) = -10$ ❍

6.4.2 อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

สำหรับการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงจะขอกล่าวเพียงแนวคิดของอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงของฟังก์ชันสองตัวแปรเท่านั้น นักศึกษาสามารถขยายแนวคิดของการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสูงของฟังก์ชันสองตัวแปรไปสู่ฟังก์ชันหลายตัวแปรได้ในทำนองเดียวกัน

ถ้า f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรแล้วจะได้ว่าอนุพันธ์ย่อย f_x และ f_y ก็เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรเช่นกัน เราเรียกอนุพันธ์ย่อย f_x และ f_y ว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง ของ f ดังนั้นถ้าเราพิจารณาอนุพันธ์ย่อยของอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง ของ f ซึ่งคือ $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ และ $(f_y)_y$ เราเรียกอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง ของ f

กำหนดให้ $z = f(x, y)$ อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ดังนี้

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$
$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า f มีอนุพันธ์ย่อยอันดับสามหรือสูงกว่าเราก็สามารถเขียนอนุพันธ์ย่อยได้ในลักษณะเดียวกับอนุพันธ์ย่อยอันดับ 2 ตัวอย่างเช่น

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

หมายเหตุ สัญลักษณ์ f_{xy} หรือ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ หมายความว่าในการหาอนุพันธ์ย่อยอันดับ 2 ของ f ในรูปนี้เราหาอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x ก่อนจากนั้นจึงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่ได้เทียบกับ y สำหรับการหา f_{yx} ก็จะมีลำดับการหาที่ตรงกันข้ามกับ f_{xy}

ตัวอย่าง 6.4.7 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งกำหนดโดย $f(x,y) = e^{xy} + x^2y^3 + y - 2$ จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับ 2 ของ f

วิธีทำ ในที่นี้เราจะหาอนุพันธ์ย่อย $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ ซึ่งเราจะต้องหาอนุพันธ์ย่อยอันดับ 1 ของ f ก่อน

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} + x^2y^3 + y - 2) = ye^{xy} + 2xy^3$$
$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy} + x^2y^3 + y - 2) = xe^{xy} + 3x^2y^2 + 1$$

ดังนั้น

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy} + 2xy^3) = y^2e^{xy} + 2y^3$$
$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} + 2xy^3) = xye^{xy} + e^{xy} + 6xy^2$$
$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy} + 3x^2y^2 + 1) = xye^{xy} + e^{xy} + 6xy^2$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy} + 3x^2y^2 + 1) = x^2e^{xy} + 6x^2y$$

❍

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

จากตัวอย่างที่ 6.4.7 จะเห็นว่า $f_{xy} = f_{yx}$ ซึ่งไม่ใช่เรื่องบังเอิญ พบว่าโดยทั่วไปแล้วอนุพันธ์ย่อย f_{xy} และ f_{yx} จะมีค่าเท่ากันเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขบางประการดังจะกล่าวถึงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.4.8 (Clairaut's Theorem) กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่นิยามบนจานเปิด D และจุด (a,b) เป็นจุดที่อยู่ในจานเปิด D ถ้าอนุพันธ์ย่อย f_{xy} และ f_{yx} หาได้และต่อเนื่องบนจานเปิด D แล้ว

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

6.4.3 กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

ในแคลคูลัส 1 เราได้กล่าวถึงกฎลูกโซ่ในฟังก์ชันตัวแปรเดียว ซึ่งเป็นการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผลประกอบ กล่าวคือ ถ้า $y = f(x)$ และ $x = g(t)$ โดยที่ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว $f \circ g$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ (เทียบกับตัวแปร t) และ $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$

นั่นคือ
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงกฎลูกโซ่สำหรับฟังก์ชันที่มีมากกว่า 1 ตัวแปรอิสระ ซึ่งเราสามารถแบ่งการพิจารณาได้หลายกรณี ในกรณีแรกเราสนใจฟังก์ชันสองตัวแปร $z = f(x,y)$ โดยที่ x และ y เป็นฟังก์ชันในรูปตัวแปร t นั่นคือเราสามารถเขียน z ได้ในรูปของ $z = f(g(t),h(t))$ และหาอนุพันธ์ของ z เทียบกับตัวแปร t ได้

ทฤษฎีบท 6.4.9 (Chain Rule for Derivative) กำหนดให้ $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับ 1 ที่ต่อเนื่องบนโดเมนของ f และถ้า $x = g(t)$ และ $y = h(t)$ หาอนุพันธ์ได้แล้วฟังก์ชันในรูป $z = F(t) = f(g(t),h(t))$ หาอนุพันธ์ได้และ

$$\frac{dF}{dt} = f_x(g(t),h(t)) \cdot g'(t) + f_y(g(t),h(t)) \cdot h'(t)$$

หรือ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ตัวอย่าง 6.4.10 ให้ $z = 2x^3y$ โดยที่ $x = \sin t$ และ $y = \cos t$ จงหา $\frac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 0$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 6.4.9 เราสามารถหา $\frac{dz}{dt}$ ได้โดยกฎลูกโซ่ได้สองวิธีดังนี้

วิธีที่ 1 พิจารณา $z = 2x^3y = 2(\sin t)^3 \cos t = 2\sin^3 t \cos t$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{d(2\sin^3 t\cos t)}{dt} \\ &= 2\cdot 3(\sin^2 t)(\cos t)(\cot t) + 2(\sin^3 t)(-\sin t) \\ &= 6(\sin^2 t)(\cos^2 t) - 2\sin^4 t\end{aligned}$$

วิธีที่ 2

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (6x^2y)(\cos t) + (2x^3)(-\sin t) \\ &= (6\sin^2 t\cos t)(\cos t) - (2\sin^3 t)(\sin t) \\ &= 6(\sin^2 t)(\cos^2 t) - 2\sin^4 t\end{aligned}$$

ดังนั้น $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = 6\sin^2 0\cos^2 0 - 2\sin^4 0 = 0$ ❍

ตัวอย่าง 6.4.11 โมลของก๊าซสอดคล้องกับสมการ $PV = 8.31T$

เมื่อ P แทนความดันในหน่วยกิโลปาสคาล

V แทนปริมาตรในหน่วยลิตร และ

T แทนอุณหภูมิในหน่วยเคลวิน

กำหนดให้อัตราการเพิ่มของอุณหภูมิเป็น 0.1 เคลวินต่อวินาทีและอัตราการเพิ่มของปริมาตรเป็น 0.3 ลิตรต่อวินาที

1. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความดัน

2. จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของความดัน ในขณะที่ปริมาตรเป็น 100 ลิตรและอุณหภูมิเป็น 200 เคลวิน

วิธีทำ ให้ t แทนเวลาในหน่วยวินาที

1. เนื่องจาก $P = 8.31\frac{T}{V}$ จากกฎลูกโซ่เราได้ว่า

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{8.31}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{8.31T}{V^2}\frac{dV}{dt}$$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

2. จากโจทย์เราจะได้ว่า $\frac{dT}{dt}=0.1$, $\frac{dV}{dt}=0.3$ และจะได้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความดันเมื่อ $V=100,\quad T=200$ มีค่าเท่ากับ

$$\frac{dP}{dt}=\frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt}+\frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt}=\frac{8.31}{V}\frac{dT}{dt}-\frac{8.31T}{V^2}\frac{dV}{dt}=\frac{8.31}{100}(0.1)-\frac{8.31(200)}{(100)^2}(0.3)=-0.04155$$

ดังนั้น ความดันจะลดลงด้วยอัตรา 0.04155 กิโลปาสคาลต่อวินาที ❍

ต่อไปเราจะศึกษาการหาอนุพันธ์ย่อยของ $z=f(x,y)$ โดยที่ x และ y เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร นั่นคือ $x=g(s,t)$ และ $y=h(s,t)$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าเราสามารถเขียน z ให้อยู่ในรูปของตัวแปร s และ t ได้

ทฤษฎีบท 6.4.12 (Chain Rule for Partial Derivatives) กำหนดให้ $z=f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยอันดับ 1 ที่ต่อเนื่องบนโดเมนของ f และถ้า $x=g(s,t)$ และ $y=h(s,t)$ หาอนุพันธ์ได้แล้วจะได้ว่าฟังก์ชันในรูป $z=F(s,t)=f(g(s,t),h(s,t))$ หาอนุพันธ์ได้และ

$$\frac{\partial F}{\partial s}=f_x(g(s,t),h(s,t))\cdot g_s(s,t)+f_y(g(s,t),h(s,t))\cdot h_s(s,t)$$
$$\frac{\partial F}{\partial t}=f_x(g(s,t),h(s,t))\cdot g_t(s,t)+f_y(g(s,t),h(s,t))\cdot h_t(s,t)$$

หรือ

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$
$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

ตัวอย่าง 6.4.13 ให้ $z=e^{xy}$ โดยที่ $x=2s+t$ และ $y=\frac{s}{t}$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 6.4.12 เราสามารถหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$ ได้โดยกฎลูกโซ่ได้สองวิธีดังนี้

วิธีที่ 1 พิจารณา $z=e^{xy}=e^{(2s+t)\frac{s}{t}}=e^{\frac{2s^2+st}{t}}$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{d(e^{\frac{2s^2+st}{t}})}{ds}=e^{\frac{2s^2+st}{t}}\left(\frac{4s+t}{t}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{d(e^{\frac{2s^2+st}{t}})}{dt}=e^{\frac{2s^2+st}{t}}\cdot\left(\frac{st-(2s^2+st)}{t^2}\right)=e^{\frac{2s^2+st}{t}}\cdot\left(\frac{-2s^2}{t^2}\right)$$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

วิธีที่ 2

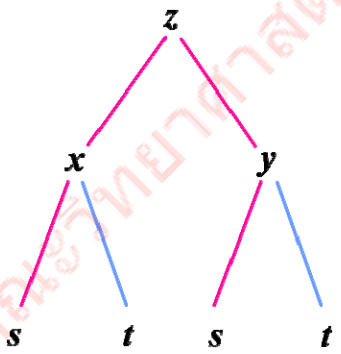
$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=(ye^{xy})(2)+(xe^{xy})(\frac{1}{t})$$

$$=\left(2y+\frac{x}{t}\right)e^{xy}=(\frac{2s}{t}+\frac{2s+t}{t})(e^{\frac{2s^2+st}{t}})=\frac{4s+t}{t}e^{\frac{2s^2+st}{t}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=(ye^{xy})(1)+(xe^{xy})(-\frac{s}{t^2})$$

$$=\left(y-\frac{xs}{t^2}\right)e^{xy}=(\frac{s}{t}-\frac{2s^2+st}{t^2})e^{\frac{2s^2+st}{t}}=-\frac{2s^2}{t^2}e^{\frac{2s^2+st}{t}}$$ ❍

เราอาจแบ่งตัวแปรในกฎลูกโซ่ได้เป็น 3 กลุ่มคือ s,t ซึ่งเป็นตัวแปรอิสระ (independent variables) x,y ซึ่งเราเรียกว่าตัวแปรระหว่างกลาง (intermediate variables) และ z ซึ่งเป็นตัวแปรตาม (dependent variable) เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของตัวแปรเหล่านี้ได้ดังแผนภาพต้นไม้ (tree diagram) ดังแสดงในรูป 6.4.2



รูป 6.4.2

จากแผนภูมิข้างต้นเราใช้เส้นเชื่อมจากตัวแปร z ไปยังตัวแปร x,y เป็นการแสดงว่า z เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x,y ในทำนองเดียวกันเราใช้เส้นเชื่อมจากตัวแปรระหว่างกลาง x และ y ไปยังตัวแปรอิสระ s และ t เพื่อแสดงให้เห็นว่า x และ y เป็นฟังก์ชันของตัวแปร s และ t สำหรับแต่ละเส้นเรากำกับอนุพันธ์ย่อยโดยใช้ตัวแปรที่จุดปลายของเส้นเชื่อมดังแสดงในรูป 6.4.2 เราสามารถหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ จากผลรวมของผลคูณของอนุพันธ์ย่อยที่ปรากฏอยู่บนแต่ละเส้นเชื่อมจาก z ไปยัง s ทั้งหมด ดังนั้นจากแผนภาพเราจะได้ว่า $\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$ ในทำนองเดียวกันเราสามารถหา $\frac{\partial z}{\partial t}$ จาก

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ผลรวมของผลคูณของอนุพันธ์ย่อยที่ปรากฏอยู่บนแต่ละเส้นเชื่อมจาก z ไปยัง t ทั้งหมด ดังนั้นจากแผนภาพเราจะได้ว่า $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

ต่อไปเราจะพิจารณากรณีทั่วไป นั่นคือ ให้ตัวแปรตาม u เป็นฟังก์ชันของตัวแปรระหว่างกลาง $x_1,x_2,...,x_n$ จำนวน n ตัวแปร โดยแต่ละ x_i เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ $t_1,t_2,...,t_m$ จำนวน m ตัวแปร

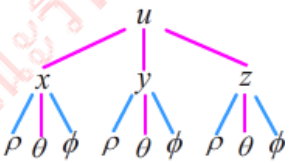
ทฤษฎีบท 6.4.14 กำหนดให้ $u=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และแต่ละ $k\in\{1,2,...,n\}$ ให้ $x_k=g_k\left(t_1,t_2,...,t_m\right)$ โดยที่ g_k หาอนุพันธ์ได้จะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial t_i}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i}+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

สำหรับ $i=1,2,...,m$

ตัวอย่าง 6.4.15 กำหนดให้ $u=x^2+y^2-z^2$ และ $x=\rho\sin\phi\cos\theta$, $y=\rho\sin\phi\sin\theta$, $z=\rho\cos\phi$ จงหา $\frac{\partial u}{\partial\rho}$, $\frac{\partial u}{\partial\theta}$ และ $\frac{\partial u}{\partial\phi}$

วิธีทำ



รูป 6.4.3

จากรูป 6.4.3 เราจะได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\rho}$$

$$=(2x)(\sin\phi\cos\theta)+(2y)(\sin\phi\sin\theta)+(-2z)(\cos\phi)$$

$$=2\rho\sin^2\phi\cos^2\theta+2\rho\sin^2\phi\sin^2\theta-2\rho\cos^2\phi$$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 2\rho\sin^2\phi(\cos^2\theta+\sin^2\theta) - 2\rho\cos^2\phi$$

$$= 2\rho\sin^2\phi - 2\rho\cos^2\phi$$

$$= 2\rho(\sin^2\phi - \cos^2\phi)$$

$$= -2\rho\cos 2\phi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$= (2x)(\rho\sin\phi)(-\sin\theta) + (2y)(\rho\sin\phi)(\cos\theta) + (-2z)(0)$$

$$= -2\rho^2(\sin^2\phi)(\sin\theta)(\cos\theta) + 2\rho^2(\sin^2\phi)(\sin\theta)(\cos\theta)$$
$$= 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \phi}$$

$$= (2x)(\rho\cos\phi\cos\theta) + (2y)(\rho\cos\phi\sin\theta) + (-2z)(-\rho\sin\phi)$$

$$= 2\rho^2\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta + 2\rho^2\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta + 2\rho^2\cos\phi\sin\phi$$

❍

ตัวอย่าง 6.4.16 กำหนดให้ $z = f(s^2-t^2, t^2-s^2)$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่งหาอนุพันธ์ได้ จงแสดงว่าสมการ $t\frac{\partial z}{\partial s} + s\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ เป็นจริง

วิธีทำ ให้ $x = s^2 - t^2$ และ $y = t^2 - s^2$

จะได้ $z = f(x,y)$ จากกฎลูกโซ่เราได้ว่า

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}(2s) + \frac{\partial z}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial z}{\partial y}(2t)$$

ดังนั้น

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

$$t\frac{\partial z}{\partial s}+s\frac{\partial z}{\partial t}=\left(2st\frac{\partial z}{\partial x}-2st\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\left(-2st\frac{\partial z}{\partial x}+2st\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$ ❍

แบบฝึกหัด 6.4

1. จงหาอนุพันธ์ย่อย $f_x(2,-3)$ และ $f_y(2,-3)$ โดยใช้บทนิยาม

1.1 $f(x,y)=xy^2-x^3y$ 1.2 $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y^2}$

2. จงหาอนุพันธ์ย่อยที่กำหนดให้ต่อไปนี้

2.1 $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$; $f_x(3,4)$

2.2 $f(x,y)=\arctan(\dfrac{y}{x})$; $f_x(2,3)$

2.3 $f(x,y,z)=\sqrt{\sin^2(x)+\sin^2(y)+\sin^2(z)}$; $f_x(0,0,\dfrac{\pi}{4})$

3. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของฟังก์ชันในแต่ละต่อไปนี้

3.1 $f(x,y)=y^5-3xy$ 3.2 $f(x,t)=e^{-t}\cos(\pi x)$

3.3 $f(x,t)=\sqrt{x}\ln(t)$ 3.4 $z=(2x+3)^{10}$

3.5 $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ 3.6 $z=x^y$

3.7 $f(x,y)=\tan(xy)$ 3.8 $f(r,s)=r\ln(r^2+s^2)$

3.9 $u=te^{w/t}$ 3.10 $f(x,y,z)=xy-5x^2y^3z^4$

3.11 $w=ze^{xyz}$ 3.12 $f(x,y,z)=xy\sin^{-1}(yz)$

4. กำหนดให้ $z=f(x,y)$ จงหาอนุพันธ์ย่อย $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ของฟังก์ชันโดยปริยายในแต่ละข้อต่อไปนี้

4.1 $x^2+y^2+z^2=3xyz$

4.2 $yz=\ln(x+z)$

4.3 $\sin(xyz)=x+2y+3z$

5. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

5.1 $f(x,y)=x^3y^5+2x^4y$ 5.2 $f(x,t)=\sin^2(mx+ny)$

5.3 $w=\sqrt{u^2+v^2}$ 5.4 $z=\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

6. จงหาอนุพันธ์ย่อยที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้

6.1 $f(x,y)=3xy^4+x^3y^2$; f_{xxy} , f_{yyy}

6.2 $f(x,t)=x^2e^{-ct}$; f_{ttt} , f_{txx}

6.3 $f(x,y,z)=\cos(4x+3y+2z)$; f_{xyz} , f_{yzz}

6.4 $f(r,s,t)=r\ln(rs^2t^3)$; f_{rss} , f_{rst}

7. จงหา $\frac{dw}{dt}$ โดยใช้กฎลูกโซ่

7.1 $w=x^2+y^2+xy,\quad x=\sin t,\quad y=e^t$

7.2 $w=\cos(x+4y),\quad x=5t^4,\quad y=\frac{1}{t}$

7.3 $w=\tan^{-1}(x+y),\quad x=1-e^{-t},\quad y=e^t$

7.4 $w=\sec(xy),\quad x=\cos t,\quad y=\sin t$

7.5 $w=x^2y+3xy^4,\ x=e^t,\ y=\sin t$

7.6 $w=x^2+y^2,\ x=t^3,\ y=1+t^2$

7.7 $w=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad x=\sin t,\quad y=\cos t,\quad z=\tan t$

8. จงหา $\frac{dz}{dt}$ และ $\frac{dz}{ds}$ โดยใช้กฎลูกโซ่

8.1 $z=xy,\quad x=s\cos t,\quad y=s\sin t$

8.2 $z=e^{x+2y},\quad x=st,\quad y=\frac{s}{t}$

8.3 $z=e^{r\cos\theta},\quad r=st,\quad \theta=\sqrt{s^2+t^2}$

6.5 การประยุกต์อนุพันธ์ย่อย

ในแคลคูลัส 1 เราได้นำความรู้เรื่องอนุพันธ์มาประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ โดยเฉพาะการแก้ปัญหาค่าที่เหมาะที่สุด (Optimization problem) ซึ่งเป็นปัญหาการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของปริมาณใดปริมาณหนึ่งซึ่งขึ้นอยู่กับปริมาณอื่น เช่น จะต้องออกแบบสร้างถนนอย่างไรจึงจะประหยัดค่าใช้จ่ายมากที่สุด ในหัวข้อนี้เราจะนำความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ย่อยมาประยุกต์ใช้เพื่อหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันหลายตัวแปร

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

6.5.1 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันหลายตัวแปร

เราได้เรียนรู้เกี่ยวกับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันตัวแปรเดียวมาแล้ว ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันหลายตัวแปร เราจะเริ่มจากการศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทของฟังก์ชันสองตัวแปรที่เกี่ยวกับค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน นักศึกษาสามารถขยายแนวคิดของการหาค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปรไปสู่ฟังก์ชันหลายตัวแปรได้ในทำนองเดียวกัน

บทนิยาม 6.5.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มี D เป็นโดเมนและ (a,b) เป็นจุดภายใน D

1. เรากล่าวว่า f มี**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative minimum) ที่จุด (a,b) ถ้ามีจานเปิด C ที่ (a,b) เป็นจุดศูนย์กลางซึ่ง $C \subseteq D$ และ $f(x,y) \geq f(a,b)$ สำหรับทุก (x,y) ใน C ในกรณีนี้เราเรียก $f(a,b)$ ว่า**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative minimum value) ของ f และเรียก (a,b) ว่า**จุดต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative minimum point) ของ f

2. เรากล่าวว่า f มี**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum) ที่จุด (a,b) ถ้ามีจานเปิด C ที่ (a,b) เป็นจุดศูนย์กลางซึ่ง $C \subseteq D$ และ $f(x,y) \leq f(a,b)$ สำหรับทุก (x,y) ใน C ในกรณีนี้เราเรียก $f(a,b)$ ว่า**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum value) ของ f และเรียก (a,b) ว่า**จุดสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum point) ของ f

3. เราเรียกค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ว่า**ค่าสุดขีดสัมพัทธ์** (relative extreme value) และเรียกจุดสูงสุดสัมพัทธ์หรือจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ว่า**จุดสุดขีดสัมพัทธ์** (relative extreme point)

บทนิยาม 6.5.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มี D เป็นโดเมนและ (a,b) เป็นจุดภายใน D เรากล่าวว่า

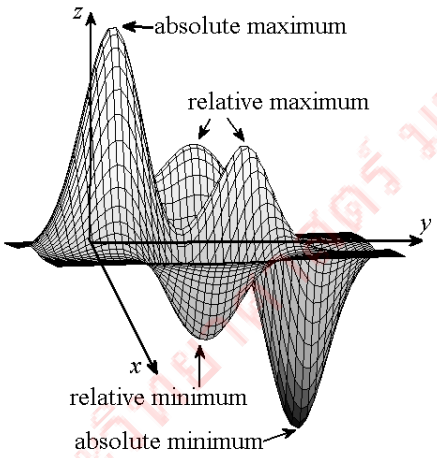
1. f มี**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** (absolute minimum) ที่จุด (a,b) ถ้า $f(x,y) \geq f(a,b)$ สำหรับทุก (x,y) ใน D ในกรณีนี้เราจะเรียก $f(a,b)$ ว่า**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** (absolute minimum value) ของ f บน D และเรียก (a,b) ว่า**จุดต่ำสุดสัมบูรณ์** (absolute minimum point)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

2. f มี**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** (absolute maximum) ที่จุด (a,b) ถ้า $f(x,y) \le f(a,b)$ สำหรับทุก (x,y) ใน D ในกรณีนี้เราจะเรียก $f(a,b)$ ว่า**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** (absolute maximum value) ของ f บน D และเรียก (a,b) ว่า**จุดสูงสุดสัมบูรณ์** (absolute maximum point)

3. เราเรียกค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ว่า**ค่าสุดขีดสัมบูรณ์** (absolute extreme value) และเรียกจุดสูงสุดสัมบูรณ์หรือจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ว่า **จุดสุดขีดสัมบูรณ์** (absolute extreme point)

รูป 6.5.1 แสดงจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ จุดสูงสุดสัมพัทธ์ จุดต่ำสุดสัมบูรณ์ จุดสูงสุดสัมบูรณ์และจุดสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x,y)$



รูป 6.5.1

ทฤษฎีบท 6.5.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า f มีอนุพันธ์ย่อยอันดับ 1 และ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด (a,b) แล้ว $f_x(a,b)=0$ และ $f_y(a,b)=0$

หมายเหตุ เราเรียกจุด (a,b) ในโดเมนของฟังก์ชัน f ว่า **จุดวิกฤติ** (critical point) ถ้า $f_x(a,b)=0$ และ $f_y(a,b)=0$ หรือ อนุพันธ์ย่อยอันดับ 1 ของ f หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 6.5.4 กำหนดให้ $f(x,y)=x^2+y^2-2x-6y+14$ จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ f

วิธีทำ สำหรับ f ที่กำหนด โดเมนของ f คือ $\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$

เพราะว่า $f_x(x,y)=2x-2$ และ $f_y(x,y)=2y-6$

จะได้ว่า $f_x(x,y)=0$ เมื่อ $x=1$ และ $f_y(x,y)=0$ เมื่อ $y=3$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

ดังนั้น f จึงมีจุดวิกฤติจุดเดียวเท่านั้นคือ $(1,3)$

สังเกตว่าจุด $(1,3)$ อยู่ในโดเมนของ f

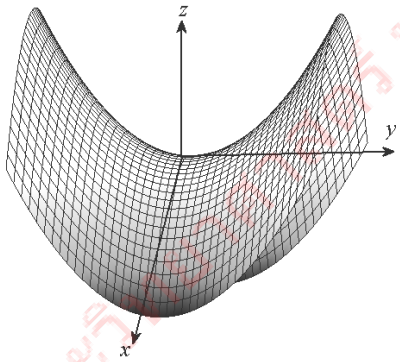
จาก f ที่กำหนดให้ เราสามารถจัดรูปได้เป็น $f(x,y)=4+(x-1)^2+(y-3)^2$

เนื่องจาก $(x-1)^2 \geq 0$ และ $(y-3)^2 \geq 0$

จึงได้ว่า $f(x,y) \geq 4$ สำหรับทุกจุด (x,y) บนโดเมนของ f และ $f(1,3)=4$

ดังนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(1,3)$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(1,3)=4$ ❍

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x,y)=y^2-x^2$ จะได้ว่ากราฟของฟังก์ชันเป็นพื้นผิวไฮเพอร์โบลิคพาราโบลอยด์ดังรูป 6.5.2



รูป 6.5.2

ซึ่งมีระนาบ xy เป็นระนาบสัมผัสที่จุดกำเนิด เราพบว่า $f(0,0)=0$ เป็นจุดสูงสุดของกราฟบนภาคตัดขวางของระนาบ xz และในทำนองเดียวกัน $f(0,0)=0$ เป็นจุดต่ำสุดของกราฟบนภาคตัดขวางของระนาบ yz เมื่อพิจารณารอบจุด $(0,0)$ จะเห็นได้ว่าจุด $(0,0)$ เป็นทั้งจุดสูงสุดสัมพัทธ์และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

บทนิยาม 6.5.5 เราเรียกจุดวิกฤติที่ไม่เป็นจุดสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x,y)$ ที่หาอนุพันธ์ย่อยอันดับ 1 ได้ว่า **จุดอานม้า** (saddle point)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

เราสามารถตรวจสอบว่าจุดวิกฤติที่ได้เป็นจุดสุดขีดหรือจุดอานม้าโดยทฤษฎีบทต่อไปนี้

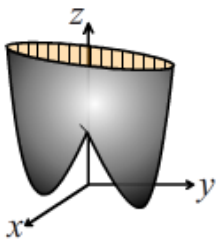
ทฤษฎีบท 6.5.6 (การทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับ 2: Second Derivative Test) ให้ f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรซึ่งต่อเนื่องบนจานเปิดที่มี (a,b) เป็นจุดวิกฤติโดยที่ $f_x(a,b)=0$ และ $f_y(a,b)=0$ ให้ $\Delta=\Delta(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-[f_{xy}(a,b)]^2$

1. ถ้า $\Delta>0$ และ $f_{xx}(a,b)>0$ แล้ว $f(a,b)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด (a,b)
2. ถ้า $\Delta>0$ และ $f_{xx}(a,b)<0$ แล้ว $f(a,b)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ที่จุด (a,b)
3. ถ้า $\Delta<0$ แล้ว (a,b) เป็นจุดอานม้า
4. ถ้า $\Delta=0$ เราไม่สามารถสรุปได้ว่าที่จุด (a,b) ค่าของฟังก์ชัน $f(a,b)$ เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์หรือไม่

สังเกตว่าเราสามารถหาค่า Δ ได้จาก $\Delta=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

ตัวอย่าง 6.5.7 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์และจุดอานม้าของ $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$

วิธีทำ เราเริ่มจากการหาจุดวิกฤติของฟังก์ชัน f



รูป 6.5.3

เพราะว่า $f_x=4x^3-4y$ และ $f_y=4y^3-4x$

จึงได้ว่าจุดวิกฤติสอดคล้องกับสมการ $x^3-y=0$ และ $y^3-x=0$

แทนค่า $y=x^3$ ในสมการ $y^3-x=0$

จะได้ $0=x^9-x=x(x^8-1)=x(x^4-1)(x^4+1)$

$0=x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$

$0=x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

ดังนั้น สมการนี้มีคำตอบในระบบจำนวนจริงทั้งหมดคือ $x=0,1,-1$ ซึ่งถ้าแทนค่า x ลงในสมการ $y=x^3$ เราจะได้ $y=0,1,-1$ ตามลำดับ จึงได้ว่าจุดวิกฤติคือจุด $(0,0)$ $(1,1)$ และ $(-1,-1)$

ในขั้นตอนต่อไปเราจะหาอนุพันธ์ย่อยอันดับ 2 ของ f และค่า Δ

$$f_{xx}=12x^2,\ f_{xy}=-4 \text{ และ } f_{yy}=12y^2$$

เพราะฉะนั้น $\Delta(x,y)=(12x^2)(12y^2)-(-4)^2=144x^2y^2-16$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

จุดวิกฤติ (a,b)	$f_{xx}(a,b)$	$f_{yy}(a,b)$	$f_{xy}(a,b)$	$\Delta(a,b)$
$(0,0)$	0	0	-4	-16
$(1,1)$	12	12	-4	128
$(-1,-1)$	12	12	-4	128

ตาราง 6.5.1

เนื่องจาก $\Delta(0,0)=-16<0$ จากทฤษฎีบท 6.5.6(3) จะได้ว่าจุด $(0,0)$ เป็นจุดอานม้า นั่นคือ f ไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(0,0)$

เนื่องจาก $\Delta(1,1)=128>0$ และ $f_{xx}(1,1)=12>0$ จากทฤษฎีบท 6.5.6(1) จะได้ว่าจุด $(1,1)$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และ $f(1,1)=-1$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

เนื่องจาก $\Delta(-1,-1)=128>0$ และ $f_{xx}(-1,-1)=12>0$ จากทฤษฎีบท 6.5.6(1) จะได้ว่าจุด $(-1,-1)$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และ $f(-1,-1)=-1$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

กราฟของฟังก์ชัน $z=f(x,y)$ แสดงดังรูป 6.5.3 ❍

ตัวอย่าง 6.5.8 จงหาปริมาตรสูงสุดของกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ไม่มีฝาปิดซึ่งทำมาจากกระดาษที่มีพื้นที่ 12 ตารางนิ้ว

วิธีทำ ให้ x,y และ z เป็นความยาว ความกว้างและความสูง(นิ้ว) ของกล่องตามลำดับโดยที่ $0<x,y,z<12$ (เนื่องจากกระดาษที่มีพื้นที่ 12 ตารางนิ้ว)

และให้ V แทนปริมาตรของกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก (ลบ.นิ้ว)

จะได้ว่าปริมาตรของกล่องคือ $V=xyz$

จากพื้นที่กล่องที่กำหนดให้จะได้ว่า

$$12=2xz+2yz+xy$$

สมการนี้จัดรูปได้เป็น $z=\dfrac{12-xy}{2(x+y)}$ ดังนั้นจะได้

$$V=xy\frac{12-xy}{2(x+y)}=\frac{12xy-x^2y^2}{2(x+y)} \quad , \quad 0<x,y,z<12$$

จาก $\dfrac{\partial V}{\partial x}=\dfrac{y^2(12-2xy-x^2)}{2(x+y)^2}$ และ $\dfrac{\partial V}{\partial y}=\dfrac{x^2(12-2xy-y^2)}{2(x+y)^2}$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

จะได้ว่า $\frac{\partial V}{\partial x}=0$ และ $\frac{\partial V}{\partial y}=0$ เมื่อ $12-2xy-x^2=0$ และ $12-2xy-y^2=0$ จะได้ $12-2xy=x^2$ และ $12-2xy=y^2$ จึงได้ว่า $x^2=y^2$ แต่ $0<x,y<12$ ดังนั้น $x=y$ แทนค่า $y=x$ ในสมการแรกจะได้ $12-3x^2=0$ นั่นคือ $x=2$ และได้ $y=2$

ดังนั้น $z=\frac{12-(2)(2)}{2(2+2)}=1$

$V_{xx}(2,2)$	$V_{yy}(2,2)$	$V_{xy}(2,2)$	$\Delta(2,2)$
-1	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

ตาราง 6.5.2

เนื่องจาก $\Delta(2,2)=\frac{3}{4}>0$ จากทฤษฎีบท 6.5.6(2) จะได้ว่าจุด $(2,2)$ เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ และ $z=f(2,2)=1$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ดังนั้นปริมาตรสูงสุดของกล่องคือ $V=(2)(2)(1)=4$ ลูกบาศก์นิ้ว ❍

6.5.2 การประยุกต์ค่าสุดขีดสัมบูรณ์

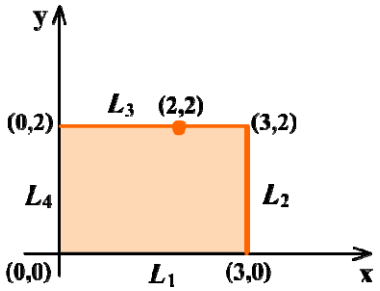
ทฤษฎีบท 6.5.9 ถ้า f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปรที่มีความต่อเนื่องบนโดเมนปิด D และมีขอบเขต แล้ว f จะมีทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์บน D

ในการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f ที่กล่าวมาแล้วนั้นจะมีขั้นตอนดังนี้

1. หาจุดวิกฤติ และหาค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f
2. หาค่าของฟังก์ชัน f บนจุดขอบทั้งหมดที่อาจจะให้ค่าสุดขีดสัมบูรณ์
3. เปรียบเทียบค่าของ $f(x,y)$ ที่แต่ละจุดที่ได้ในข้อ 1 และ 2

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ตัวอย่างที่ 6.5.10 จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x,y)=x^2-2xy+2y$ บนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดโดย $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 3\,,\,0\le y\le 2\}$ ดังแสดงในรูป 6.5.4



รูป 6.5.4

วิธีทำ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันพหุนามดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนโดเมน D ซึ่งเป็นโดเมนปิดและมีขอบเขต ดังนั้นจากทฤษฎีบท 6.5.9 จะได้ว่า f มีทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์

ขั้นตอนที่ 1 เนื่องจาก $f_x=2x-2y$ และ $f_y=-2x+2$ เราจะพิจารณา

$f_x=2x-2y=0$ และ $f_y=-2x+2=0$ จึงได้ว่าจุด $(1,1)$ เป็นจุดวิกฤตเพียงจุดเดียวของ f และ $f(1,1)=1$

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาที่ขอบของ D ซึ่งแบ่งเป็น 4 ส่วนดังรูป 6.5.4

ตามแนวเส้นตรง L_1 : จะได้ว่า $y=0$ และ $f(x,0)=x^2\,,\,0\le x\le 3$

ฟังก์ชัน $f(x,0)=x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0,3]$ ดังนั้นบนช่วง $[0,3]$ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์[1] คือ $f(3,0)=9$ และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ $f(0,0)=0$

ตามแนวเส้นตรง L_2 : จะได้ว่า $x=3$ และ $f(3,y)=9-4y\,,\,0\le y\le 2$

ฟังก์ชัน $f(3,y)=9-4y$ เป็นเส้นตรงที่มีความชันเป็นลบ ดังนั้นบนช่วง $[0,2]$ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ คือ $f(3,0)=9$ และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ $f(3,2)=1$

ตามแนวเส้นตรง L_3 : จะได้ว่า $y=2$ และ $f(x,2)=x^2-4x+4=(x-2)^2\ge 0\;\;,\;\;0\le x\le 3$

---

[1] ดูบทนิยาม 3.1.2 ในตำรา แคลคูลัส1 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร สำหรับบทนิยามของค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามบน I

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

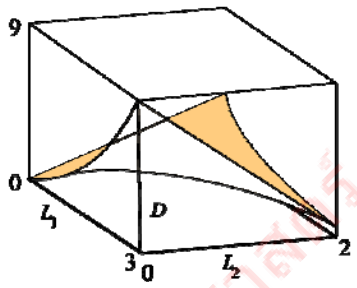
กราฟของฟังก์ชันนี้เป็นพาราโบลาหงาย จะได้ว่าบนช่วง $[0,3]$ ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $f(0,2)=4$ และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ $f(2,2)=0$

ตามแนวเส้นตรง L_4: จะได้ว่า $x=0$ และ $f(0,y)=2y$, $0\le y\le 2$

ฟังก์ชัน $f(0,y)=2y$ มีกราฟเป็นเส้นตรงจะได้ว่าบนช่วง $[0,2]$ ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $f(0,2)=4$ และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ $f(0,0)=0$

ดังนั้นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนขอบคือ 9

และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนขอบคือ 0 ดังรูป 6.5.5



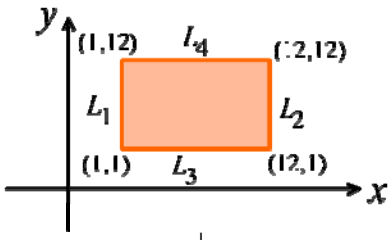
รูป 6.5.5

ขั้นตอนที่ 3 เมื่อเราเปรียบเทียบค่าของ f ที่จุดวิกฤตและค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ขอบจะได้ว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f คือ $f(3,0)=9$ ในทำนองเดียวกันเมื่อเราเปรียบเทียบค่าของ f ที่จุดวิกฤตและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ขอบจะได้ว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f คือ $f(0,0)=f(2,2)=0$ ❍

ตัวอย่าง 6.5.11 จงหาจำนวนเต็มบวกสามจำนวนที่มีผลรวมเป็น 12 โดยให้ผลรวมของกำลังสองของแต่ละจำนวนมีค่าน้อยที่สุด

วิธีทำ ให้ x,y,z แทนจำนวนที่หนึ่ง สอง และสามตามลำดับ โดยที่ $1\le x,y,z\le 12$ (เนื่องจากจำนวนเต็มบวกเริ่มตั้งแต่ 1 และจำนวนเต็มบวกทั้งสามจำนวนที่มีผลรวมเป็น 12)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร



รูป 6.5.6

จากโจทย์เราจะได้ว่า $x+y+z=12$

นั่นคือ $z=12-x-y$

พิจารณาผลรวมของกำลังสองของแต่ละจำนวน

$$x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(12-x-y)^2=2x^2+2y^2+2xy-24x-24y+144$$

ให้ $f(x,y)=2x^2+2y^2+2xy-24x-24y+144$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันพหุนามดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนโดเมน

$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 12\,,\,0\le y\le 12\}$ ซึ่งเป็นโดเมนปิดและมีขอบเขต ดังนั้นจากทฤษฎีบท 6.5.9 จะได้ว่า f มีทั้งค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ เราจึงสามารถหา x,y,z ที่สอดคล้องกับโจทย์ได้จากการหาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x,y)$ นี้

ขั้นตอนที่ 1 เนื่องจาก $f_x=4x+2y-24$ และ $f_y=4y+2x-24$

เราจะหาจุดวิกฤตโดยพิจารณา $f_x=0$ จะได้ $y=12-2x$

และพิจารณา $f_y=0$ จะได้ $4y+2x-24=0$ จากนั้นแทนค่า $y=12-2x$ ลงไปในในสมการ

จะได้ว่า $0=4(12-2x)+2x-24=48-8x+2x-24=24-6x$

นั่นคือ $x=4$

แทนค่า $x=4$ ลงในสมการ $y=12-2x$ ทำให้ได้ $y=4$

ดังนั้นจุด $(4,4)$ เป็นจุดวิกฤตและ $f(4,4)=48$

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาที่ขอบของ D ซึ่งแบ่งเป็น 4 ส่วนดังรูป 6.5.6

ตามแนวเส้นตรง L_1 *:* จะได้ว่า $x=1$ และ $f(1,y)=2y^2-22y+122\,,1\le y\le 12$

กราฟของฟังก์ชันนี้เป็นพาราโบลาหงาย จะได้ว่าบนช่วง $[1,12]$ ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $f(1,12)=146$ และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ $f(1,1)=102$

ตามแนวเส้นตรง L_2 : จะได้ว่า $x=12$ และ $f(12,y)=2y^2+144\,,1\le y\le 12$

กราฟของฟังก์ชันนี้เป็นพาราโบลาหงาย จะได้ว่าบนช่วง $[1,12]$ ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $f(12,12)=432$ และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ $f(12,1)=146$

ตามแนวเส้นตรง L_3 : จะได้ว่า $y=1$ และ $f(x,1)=2x^2-22x+122\,,1\le x\le 12$

กราฟของฟังก์ชันนี้เป็นพาราโบลาหงาย จะได้ว่าบนช่วง $[1,12]$ ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $f(12,1)=146$ และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ $f(1,1)=102$

ตามแนวเส้นตรง L_4 : จะได้ว่า $y=12$ และ $f(x,12)=2x^2+144\,,1\le x\le 12$

กราฟของฟังก์ชันนี้เป็นพาราโบลาหงาย จะได้ว่าบนช่วง $[1,12]$ ฟังก์ชัน f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์คือ $f(12,12)=432$ และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์คือ $f(1,12)=146$

ดังนั้นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนขอบคือ 432 และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนขอบคือ 102

ขั้นตอนที่ 3 เมื่อเราเปรียบเทียบค่าของ f ที่จุดวิกฤตและค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ขอบ จะได้ว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f คือ $f(12,12)=432$ ในทำนองเดียวกันเมื่อเราเปรียบเทียบค่าของ f ที่จุดวิกฤตและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ขอบ จะได้ว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f คือ $f(4,4)=48$

จาก $x+y+z=12,\ x=4,\ y=4$ จะได้ว่า $z=4$

ดังนั้น จำนวนเต็มบวกสามจำนวนที่มีผลรวมเป็น 12 โดยให้ผลรวมของกำลังสองของแต่ละจำนวนมีค่าน้อยที่สุด คือ $x=y=z=4$ ❍

แบบฝึกหัด 6.5

1. จงหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์หรือจุดอานม้าของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x,y)=9-2x+4y-x^2-4y^2$

1.2 $f(x,y)=x^3y+12x^2-8y$

1.3 $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+2$

1.4 $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

1.5 $f(x,y)=(1+xy)(x+y)$

1.6 $f(x,y)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

1.7 $f(x,y)=x^3-12xy+8y^3$

1.8 $f(x,y)=xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

2. จงหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้บนโดเมน D

2.1 $f(x,y)=1+4x-5y$ โดยที่ D เป็นสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0,0)$, $(2,0)$ และ $(0,3)$

2.2 $f(x,y)=4x+6y-x^2-y^2$ โดยที่ $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 4\,,\,0\le y\le 5\}$

2.3 $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+2$ โดยที่ $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 3\,,\,0\le y\le 2\}$

2.4 $f(x,y)=xy^2$ โดยที่ $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0\,,\,y\ge 0\,,\,x^2+y^2\le 3\}$

3. จงหาขนาดของกล่องทรงลูกบาศก์ที่มีปริมาตร 1,000 ลูกบาศก์เซนติเมตร

4. จงหาจำนวนเต็มบวก 3 จำนวนที่มีผลรวมเป็น 100 ซึ่งทำให้ผลคูณของ 3 จำนวนมีค่ามากที่สุด

5. จงหาขนาดของกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีปริมาตรมากที่สุด ซึ่งมีพื้นที่ผิวเป็น 64 ตารางเซนติเมตร

6. จงหาขนาดของตู้ปลาสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานทำจากกระเบื้อง และฝาทั้งสี่ด้านทำจากแก้วที่มีค่าใช้จ่ายในการทำน้อยที่สุด โดยที่ราคาของกระเบื้องมีมูลค่า 5 เท่าของราคาแก้ว

7. จงหาปริมาตรที่มากที่สุดของสี่เหลี่ยมมุมฉากที่สามารถบรรจุได้ในทรงกลมรัศมี r

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร