บทที่ 5

ลำดับ อนุกรม และอนุกรมกำลังของจำนวนจริง

Sequences, Series, and Power Series of Real Numbers

ในบทนี้เรามีเป้าหมายเพื่อศึกษาปัญหาการลู่เข้าของลำดับ อนุกรม และอนุกรมกำลังของจำนวนจริงซึ่งผู้เรียนได้คุ้นเคยมาบ้างแล้วจากการศึกษาในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย แต่สิ่งที่จะกล่าวถึงในบทนี้เป็นการทบทวนความรู้เก่าที่ได้รับการศึกษามาแล้วรวมกับความรู้ใหม่ที่มีการให้รายละเอียดมากยิ่งขึ้น แนวทางการศึกษาของบทนี้จะเน้นไปที่ภาคการคำนวณเท่านั้น สำหรับการศึกษาภาคทฤษฎีที่เกี่ยวข้องจะขอกล่าวถึงแต่พอสังเขปให้เพียงพอต่อการนำไปศึกษาคณิตศาสตร์ในระดับสูงต่อไป และถ้าไม่มีการกล่าวถึงเป็นสิ่งอื่น การกล่าวถึงเพียง “ลำดับ” “อนุกรม” และ “อนุกรมกำลัง” ในบทนี้นั้นหมายถึง ลำดับ อนุกรม และอนุกรมกำลังของจำนวนจริงเท่านั้น โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้

$\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ หรือ เซตของจำนวนเต็มบวก

$\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

$\mathbb{R}^+$ แทนเซตของจำนวนจริงบวก

5.1 ลำดับของจำนวนจริง

ในชีวิตประจำวัน เรานิยมใช้คำว่า “ลำดับ” ในการกล่าวถึงการเรียงกันของสิ่งของ ความคิด หรือเหตุการณ์ต่าง ๆ และถ้าสิ่งของที่พิจารณานั้นเป็นจำนวน เราจะเรียกลำดับของสิ่งของนั้นว่า **ลำดับของจำนวน** (sequence of numbers) ตัวอย่างเช่น

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

เห็นได้ว่าลำดับของจำนวนเกี่ยวข้องกับเซตของจำนวนรวมไปถึงการจัดเรียงกันของจำนวนภายในเซตนั้นด้วย คือ จำนวนที่หนึ่ง จำนวนที่สอง จำนวนที่สาม และต่อไปเรื่อย ๆ นั่นคือ แต่ละจำนวนนับ $1, 2, 3, \ldots$ จะสมนัยกับจำนวนในลำดับเพียงจำนวนเดียว ซึ่งทำให้เราสามารถกล่าวถึงลำดับของจำนวนจริงได้ตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 5.1.1 ลำดับของจำนวนจริง (sequence of real numbers) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\mathbb{N}$ และมีเรนจ์เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ในกรณีที่เรนจ์ของลำดับเป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}^+$ เราจะเรียกลำดับดังกล่าวว่า **ลำดับของจำนวนจริงบวก** (sequence of positive real numbers)

ถ้า $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ เป็นลำดับ เรานิยมเขียนบอกค่าของ x ที่ $n\in\mathbb{N}$ ด้วยสัญลักษณ์ x_n แทนการใช้สัญลักษณ์ $x(n)$ และเรียก x_n ว่า**พจน์ที่** n (nth term) หรือ **พจน์ทั่วไป** (general term) ของลำดับ ดังนั้นสำหรับลำดับ x ใด ๆ เราสามารถเขียน x ได้เป็น

$$x=\{(1,x_1),(2,x_2),(3,x_3),\ldots,(n,x_n),\ldots\}$$

เนื่องจากแต่ละจำนวนนับ n สมนัยกับ x_n ในรูปของคู่อันดับ (n,x_n) เพื่ออำนวยความสะดวกในการเขียนสัญลักษณ์ เราจะเขียนแทนลำดับ x ด้วยสัญลักษณ์

$$\{x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots\}$$

หรือ $$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,\ldots$$

หรือ $$\{x_n\}$$

ตัวอย่างเช่น การเขียน $\{\sqrt{n}\}$ หมายถึง ลำดับ $\{(1,1),(2,\sqrt{2}),(3,\sqrt{3}),\ldots,(n,\sqrt{n}),\ldots\}$

ในการศึกษาเรื่องของลำดับ เราให้ความสนใจเป็นพิเศษในการศึกษาว่าเมื่อ n มีค่ามาก ๆ พจน์ที่ n ของลำดับมีค่าใกล้เคียงจำนวนจริงคงที่จำนวนใดจำนวนหนึ่งหรือไม่ ถ้ามีจำนวนจริงดังกล่าวนี้ เราจะเรียกจำนวนจริงนี้ว่า **ลิมิตของลำดับ** ซึ่งสามารถให้บทนิยามได้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 5.1.2 กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ และ $L\in\mathbb{R}$ เรากล่าวว่า L เป็น **ลิมิต** ของ $\{x_n\}$ (limit of $\{x_n\}$) หรือ ลำดับ $\{x_n\}$ **ลู่เข้า** (converge) สู่ L เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x_n\to L$ หรือ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=L$ ถ้าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะมี $n_0\in\mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n-L|<\varepsilon \quad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n>n_0$$

ในกรณีนี้เรากล่าวว่า $\{x_n\}$ เป็น **ลำดับลู่เข้า** (convergent sequence) และถ้า $\{x_n\}$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้า เราเรียก $\{x_n\}$ ว่า **ลำดับลู่ออก** (divergent sequence)

ทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า “ลำดับที่มีลิมิตจะลู่เข้าสู่จำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น” และจะใช้สมบัติพื้นฐานของจำนวนจริงที่กล่าวว่า “ถ้า $x\in\mathbb{R}$ ซึ่ง $0\le x<\varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon>0$ แล้ว $x=0$” ในการแสดงบทพิสูจน์

ทฤษฎีบท 5.1.3 ลำดับของจำนวนจริงถ้ามีลิมิต มีได้เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

บทพิสูจน์ สมมติ L_1 และ L_2 เป็นลิมิตของ $\{x_n\}$

ต้องการแสดงว่า $L_1 = L_2$ นั่นคือแสดงว่า $|L_1 - L_2| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก L_1 และ L_2 เป็นลิมิตของ $\{x_n\}$ ดังนั้น จะมี $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$|x_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n > n_1$$

และ

$$|x_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n > n_2$$

ตามลำดับ

กำหนดให้ n_0 แทนค่ามากสุดของ n_1 และ n_2 เพราะฉะนั้น

$$0 \le |L_1 - L_2| \le |L_1 - x_{n_0}| + |L_2 - x_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้นจากสมบัติของจำนวนจริงที่กล่าวถึงข้างต้น เราจะได้ $|L_1 - L_2| = 0$ นั่นคือ $L_1 = L_2$ □

ทฤษฎีบทต่อไปช่วยอำนวยความสะดวกในการคำนวณลิมิตของลำดับบางรูปแบบให้สะดวกและรวดเร็วขึ้น ในบางส่วนของบทพิสูจน์ เราจะใช้สมบัติของจำนวนจริงที่สำคัญมากสมบัติหนึ่งคือ **สมบัติอาร์คีมีดิส** (Archimedean property) ที่กล่าวว่า "ถ้า $x \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $x < n$"

ทฤษฎีบท 5.1.4 กำหนดให้ $r, s \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ เมื่อ $|r| < 1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0$ เมื่อ $s > 0$

บทพิสูจน์ ในที่นี้จะแสดงบทพิสูจน์สำหรับข้อ 2 เท่านั้น ส่วนการพิสูจน์ข้อ 1 ให้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้เรียน

2. กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ ทำให้ได้ว่า $\frac{1}{\varepsilon} > 0$

จากสมบัติอาร์คีมีดิสจะมีจำนวนนับ n_0 ซึ่งทำให้ $n_0 > (\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{s}}$

กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับใด ๆ ซึ่ง $n > n_0$ จะได้ว่า

$$n > (\frac{1}{\varepsilon})^{\frac{1}{s}}$$

ซึ่งทำให้ได้

$$n^s > \frac{1}{\varepsilon}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{n^s} < \varepsilon$$

นั่นแสดงว่า $|\frac{1}{n^s} - 0| = \frac{1}{n^s} < \varepsilon$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0$ □

หมายเหตุ $\lim_{n\to\infty} r^n$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $r \le -1$ หรือ $r > 1$

ตัวอย่าง 5.1.5 จงพิจารณาว่าลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\{(\frac{1}{2})^n\}$
2. $\{\frac{1}{n}\}$
3. $\{(-1)^n\}$

วิธีทำ 1. โดยทฤษฎีบท 5.1.3 (1) จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ ดังนั้น $\{(\frac{1}{2})^n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

2. โดยทฤษฎีบท 5.1.3 (2) จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ดังนั้น $\{\frac{1}{n}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

3. ต่อไปจะแสดงว่าลำดับ $\{(-1)^n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

สมมติว่าลำดับ $\{(-1)^n\}$ มี $L \in \mathbb{R}$ เป็นลิมิต

ดังนั้นโดยบทนิยาม 5.1.2 ถ้าเลือก $\varepsilon = \frac{1}{2}$ จะมี $n_0 \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$|(-1)^n - L| < \frac{1}{2} \quad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n > n_0$$

สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n > n_0$ ถ้า n เป็นจำนวนคู่จะได้ $|1-L| < \frac{1}{2}$ แต่ถ้า n เป็นจำนวนคี่จะได้ $|-1-L| < \frac{1}{2}$ หรือ $|1+L| < \frac{1}{2}$ ซึ่งจะทำให้เราได้ว่า

$$\begin{aligned} 2 &= |1+1| \\ &= |(1+L)+(1-L)| \\ &\le |1+L| + |1-L| \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้นสิ่งที่สมมติไว้ในตอนต้นว่า $\{(-1)^n\}$ มี L เป็นลิมิตนั้นไม่จริง นั่นคือ ลำดับ $\{(-1)^n\}$ ไม่มีลิมิต ❍

บทนิยาม 5.1.6 กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ เรากล่าวว่า $\{x_n\}$ มี**ขอบเขต** (bounded) ถ้ามีจำนวนจริงบวก M ซึ่งทำให้ $|x_n| \le M$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \in \mathbb{N}$

ตัวอย่าง 5.1.7 1. $\{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต เนื่องจาก $|\frac{1}{n}| \le 1$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \in \mathbb{N}$

2. $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต เนื่องจาก $|(-1)^n| \le 1$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \in \mathbb{N}$

3. $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ เป็นลำดับไม่มีขอบเขต เนื่องจากสำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ จะได้ว่า $n+1 > n$ เสมอ

❍

ต่อไปเราจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญอันหนึ่งซึ่งเป็นเครื่องมือในการตรวจสอบการลู่เข้าของลำดับ ซึ่งกล่าวว่า "ลำดับลู่เข้าต้องเป็นลำดับมีขอบเขต" เพราะฉะนั้นถ้าเราทราบว่าลำดับใดไม่มีขอบเขต เราสามารถสรุปได้ทันทีว่าลำดับนั้นต้องเป็นลำดับลู่ออก

ทฤษฎีบท 5.1.8 ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว $\{x_n\}$ มีขอบเขต

บทพิสูจน์ สมมติว่า $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ และ $\varepsilon = 1$ ดังนั้นจะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - L| < 1 \qquad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n > n_0$$

เพราะฉะนั้น

$$|x_n| < |L| + 1 \qquad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n > n_0$$

กำหนดให้ M แทนค่ามากสุดของ $1 + |L|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|$ และ $|x_{n_0}|$

ดังนั้นจะได้ $|x_n| \le M$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ มีขอบเขต □

หมายเหตุ 1. จากทฤษฎีบท 5.1.8 เราสามารถสรุปได้ทันทีว่าลำดับ $\{n\}$ ในตัวอย่าง 5.1.7 (3) เป็นลำดับลู่ออกเพราะว่าลำดับนี้ไม่มีขอบเขต

2. บทกลับของทฤษฎีบท 5.1.8 ไม่เป็นความจริง กล่าวคือ “ลำดับที่มีขอบเขตไม่จำเป็นต้องเป็นลำดับลู่เข้า” ตัวอย่างเช่น

- ลำดับ $\{\frac{1}{n}\}$ ในตัวอย่าง 5.1.7 (1) เป็นลำดับมีขอบเขตที่ลู่เข้า
- ลำดับ $\{(-1)^n\}$ ในตัวอย่าง 5.1.7 (2) เป็นลำดับมีขอบเขตที่ลู่ออก

3. ลำดับลู่ออกอาจมีขอบเขตหรือไม่ก็ได้ ตัวอย่างเช่น

- ลำดับ $\{(-1)^n\}$ ในตัวอย่าง 5.1.7 (2) เป็นลำดับลู่ออกที่มีขอบเขต
- ลำดับ $\{n\}$ ในตัวอย่าง 5.1.7 (3) เป็นลำดับลู่ออกที่ไม่มีขอบเขต

ในขณะนี้เราทราบแล้วว่าลำดับไม่มีขอบเขตเป็นลำดับลู่ออก เพื่อช่วยอำนวยความสะดวกในการศึกษาการลู่ออกของลำดับนั้นให้ง่ายขึ้น เราแยกประเภทของลำดับลู่ออกเป็น 2 ประเภทกว้าง ๆ ได้ดังนี้

1. ลำดับที่พจน์ในลำดับมีค่าเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขอบเขต ตัวอย่างเช่น $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
2. ลำดับที่พจน์ในลำดับมีค่าลดลงเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขอบเขต ตัวอย่างเช่น

$$\{-n\} = \{-1, -2, -3, \ldots\} \; \{-n\} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$$

ลำดับทั้งสองประเภทข้างต้นสามารถกล่าวถึงในรูปของบทนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 5.1.9 กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ

1. เรากล่าวว่า $\{x_n\}$ **เข้าใกล้อนันต์** (tends to ∞) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x_n \to \infty$ หรือ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ ถ้าสำหรับทุก ๆ $\alpha \in \mathbb{R}$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $x_n > \alpha$ สำหรับทุก ๆ $n \ge n_0$

2. เรากล่าวว่า $\{x_n\}$ **เข้าใกล้ลบอนันต์** (tends to $-\infty$) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x_n \to -\infty$ หรือ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ ถ้าสำหรับทุก ๆ $\alpha \in \mathbb{R}$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $x_n < \alpha$ สำหรับทุก ๆ $n \ge n_0$

หมายเหตุ สัญลักษณ์ $x_n \to \infty$ (หรือ $-\infty$) และสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ (หรือ $-\infty$) ในบทนิยาม 5.1.9 ไม่ได้หมายความว่าลำดับ $\{x_n\}$ มีลิมิตเป็น ∞ (หรือ $-\infty$) ตามบทนิยาม 5.1.2 แต่เป็นการใช้สัญลักษณ์เพื่อสื่อให้เห็นว่าพจน์ในลำดับ $\{x_n\}$ มีค่าเพิ่มมากขึ้น (ลดลง) เรื่อย ๆ อย่างไม่มีขอบเขต

ตัวอย่าง 5.1.10 จงแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} n = \infty$

วิธีทำ กำหนดให้ $\alpha \in \mathbb{R}$

จากสมบัติอาร์คีมีดิสจะมีจำนวนนับ n_0 ซึ่งทำให้ $n_0 > \alpha$

ดังนั้นถ้า $n \geq n_0$ แล้ว $n > \alpha$

แสดงว่า $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ ❍

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ช่วยอำนวยความสะดวกในการคำนวณลิมิตของลำดับบางชนิดให้สะดวกและรวดเร็วขึ้น ในบางส่วนของบทพิสูจน์ เราจะใช้อสมการที่เรียกว่า **อสมการแบร์นูลลี** (Bernoulli"s inequality) ที่กล่าวว่า "ถ้า $x \in \mathbb{R}$ และ $x > -1$ แล้ว $(1+x)^n \geq 1+nx$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$"

ทฤษฎีบท 5.1.11 กำหนดให้ $r, s \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ เมื่อ $r > 1$
2. $\lim_{n\to\infty} n^s = \infty$ เมื่อ $s > 0$

บทพิสูจน์ ในที่นี้จะแสดงบทพิสูจน์สำหรับ (1) เท่านั้น ส่วนการพิสูจน์ (2) ให้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้เรียน

1. กำหนดให้ $r = 1+a$ โดยที่ $a > 0$ และ $\alpha \in \mathbb{R}$

จากสมบัติอาร์คีมีดิสจะมีจำนวนนับ n_0 ซึ่งทำให้ $n_0 > \dfrac{\alpha}{a}$

ดังนั้นถ้า $n \geq n_0$ จากอสมการแบร์นูลลีจะได้ว่า

$$r^n = (1+a)^n \geq 1+na > 1+\alpha > \alpha$$

แสดงว่า $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ ❍

ทฤษฎีบทต่อไปช่วยให้เรานำกฎของโลปิตาลมาใช้เพื่อคำนวณลิมิตของบางลำดับได้

ทฤษฎีบท 5.1.12 กำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนนับ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับทุก ๆ $x \in [n_0, \infty)$ และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับจำนวนจริงซึ่ง $x_n = f(n)$ สำหรับทุก ๆ $n \geq n_0$ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{แล้ว} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = L$$

บทพิสูจน์ สมมติว่า $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนนับ M ที่ทำให้

$$| f(x) - L | < \varepsilon \text{ สำหรับทุก ๆ } x > M$$

กำหนดให้ N เป็นจำนวนนับที่ $N > M$ และ $N \ge n_0$

ดังนั้นสำหรับ $n > N$ จะได้ว่า

$$|x_n - L| = |f(n) - L| < \varepsilon$$

นั่นแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ □

ตัวอย่าง 5.1.13 จงพิจารณาว่า ลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\{\frac{2n+1}{2^n}\}$
2. $\{n^{1/n}\}$

วิธีทำ 1. กำหนดให้ $f(x) = \frac{2x+1}{2^x}$ เมื่อ $x \ge 1$ จะได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{2^x} \qquad \text{(รูปแบบไม่กำหนดแบบ } \tfrac{\infty}{\infty}\text{)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2^x \ln 2} = 0$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2^n} = 0$

แสดงว่า $\{\frac{2n+1}{2^n}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

2. กำหนดให้ $f(x) = x^{1/x}$ เมื่อ $x \ge 1$

ดังนั้น $\ln f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x\to\infty} \ln f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \qquad \text{(รูปแบบไม่กำหนดแบบ } \tfrac{\infty}{\infty}\text{)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1}$$

$$= 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to\infty} f(x) = e^0 = 1$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$

แสดงว่า $\{n^{1/n}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ❍

หมายเหตุ ในตัวอย่าง 5.1.13 เราไม่สามารถนำกฎของโลปิตาลมาใช้โดยตรงกับลำดับได้ เพราะว่า **ลำดับเป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องและไม่มีอนุพันธ์**

ต่อไปเราจะกล่าวถึงทฤษฎีบท “การทดสอบอัตราส่วน” ของลำดับ ซึ่งเป็นเครื่องมือสำคัญอีกอันหนึ่งในการตรวจสอบการลู่เข้าของลำดับ อย่างไรก็ตามการทดสอบนี้ใช้เฉพาะลำดับของจำนวนจริงบวกเท่านั้น

ทฤษฎีบท 5.1.14 (**การทดสอบอัตราส่วน** : Ratio Test)

กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก และ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=L$ โดยที่ $L\in\mathbb{R}$

1. ถ้า $L<1$ แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าและ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$
2. ถ้า $L>1$ หรือ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\infty$ แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก และ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$

บทพิสูจน์ ขอละบทพิสูจน์ไว้ศึกษาในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง □

ตัวอย่าง 5.1.15 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{\frac{n}{2^n}\}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เห็นได้ชัดว่า $\{\frac{n}{2^n}\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกและ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}<1$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.1.14 จะได้ว่า $\{\frac{n}{2^n}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ ❍

หมายเหตุ 1. ลำดับของจำนวนจริงบวก $\{x_n\}$ ที่มี $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=L$ และ $L=1$ อาจเป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออกก็ได้ ตัวอย่างเช่น

- $\{\frac{1}{n}\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกที่ลู่เข้าและ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$
- $\{n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกที่ลู่ออกและ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$

2. บทกลับของทฤษฎีบท 5.1.14 (1) ไม่เป็นความจริง ตัวอย่างเช่น $\{\frac{1}{n}\}$ เป็นลำดับลู่เข้าและ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ แต่ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1\not<1$

ทฤษฎีบทต่อไปจะกล่าวถึงสมบัติพื้นฐานทางพีชคณิตในการหาลิมิตของลำดับ

ทฤษฎีบท 5.1.16 กำหนดให้ $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ เป็นลำดับ และ $L,M,c\in\mathbb{R}$ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = M$ จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n = cL$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = L + M$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n = L - M$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n)(\lim\limits_{n\to\infty} y_n) = LM$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $y_n \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $n\in\mathbb{N}$ และ $M\neq 0$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \sqrt[m]{L}$ เมื่อ $\sqrt[m]{L},\sqrt[m]{x_m}\in\mathbb{R}$ และทุกจำนวนนับ $m\geq 2$
8. ถ้ามี $n_0\in\mathbb{N}$ ซึ่ง $x_n \leq z_n \leq y_n$ สำหรับทุก ๆ $n\geq n_0$ และ $L=M$ แล้วจะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = L$
9. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับในโดเมนของ f ซึ่งลู่เข้าสู่ a แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(a)$

บทพิสูจน์ ในที่นี้จะพิสูจน์เฉพาะ (3) – (5)

3. กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = M$ ดังนั้นจะมี $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n > n_1$$

และ

$$|y_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n > n_2$$

กำหนดให้ n_0 เป็นค่ามากสุดของ n_1 และ n_2

เพราะฉะนั้นสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n > n_0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (L+M)| &= |(x_n - L) + (y_n - M)| \\ &\leq |x_n - L| + |y_n - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = L + M$

4. กำหนดให้ $c = -1$

ดังนั้น $x_n - y_n = x_n + cy_n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n + cy_n)$$

จาก (2) จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} cy_n = c\lim_{n\to\infty} y_n = cM$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ และ $\lim_{n\to\infty} cy_n = cM$

ดังนั้นโดย (3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) &= \lim_{n\to\infty}(x_n + cy_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} cy_n\\ &= L + cM\\ &= L - M\end{aligned}$$

5. เริ่มจากพิจารณา

$$\begin{aligned}|x_n y_n - LM| &= |(x_n y_n - x_n M) + (x_n M - LM)|\\ &\le |x_n(y_n - M)| + |(x_n - L)M|\\ &= |x_n||y_n - M| + |x_n - L||M|\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 5.1.8 จะมีจำนวนจริง $M_0 > 0$ ซึ่งทำให้ $|x_n| \le M_0$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \in \mathbb{N}$

ทำการเลือก M^* เป็นค่ามากสุดของ M_0 และ $|M|$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$|x_n y_n - LM| \le M^*|y_n - M| + M^*|x_n - L|$$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ และ $\lim_{n\to\infty} y_n = M$ ดังนั้นจะมี $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2M^*} \qquad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n > n_1$$

และ

$$|y_n - M| < \frac{\varepsilon}{2M^*} \qquad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n > n_2$$

ทำการเลือก n_0 เป็นค่ามากสุดของ n_1 และ n_2

เพราะฉะนั้นสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n > n_0$ จะได้ว่า

$$|x_n y_n - LM| \le M^*|y_n - M| + M^*|x_n - L|$$
$$< M^*(\frac{\varepsilon}{2M^*}) + M^*(\frac{\varepsilon}{2M^*})$$
$$= \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = LM$ □

ตัวอย่าง 5.1.17 จงแสดงวิธีการคำนวณลิมิตของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\{\frac{2n+1}{n+5}\}$
2. $\{\sqrt{n^2+n-1}-n\}$
3. $\{\sin\frac{1}{n}\}$

วิธีทำ 1. เนื่องจาก

$$\frac{2n+1}{n+5} = \frac{2+1/n}{1+5/n}$$

กำหนดให้ $\{x_n\} = \{2+1/n\}$ และ $\{y_n\} = \{1+5/n\}$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1 \ne 0$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.1.16 (6) จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{2}{1} = 2$$

2. เนื่องจาก

$$\sqrt{n^2+n-1}-n = \frac{(\sqrt{n^2+n-1}-n)(\sqrt{n^2+n-1}+n)}{(\sqrt{n^2+n-1}+n)}$$
$$= \frac{n^2+n-1-n^2}{(\sqrt{n^2+n-1}+n)}$$
$$= \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+1}$$

กำหนดให้ $\{x_n\} = \{1-\frac{1}{n}\}$ และ $\{y_n\} = \{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+1\}$

เนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} + \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 2 \ne 0$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.1.16 (6) จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n-1}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+1}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

3. เนื่องจาก $\sin x$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 0 และ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ โดยทฤษฎีบท 5.1.16 (9) เราจึงได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}=\sin(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n})=\sin 0=0$$ ❍

การพิจารณาว่าลำดับใดลำดับหนึ่งลู่เข้าหรือไม่นั้น ในบางครั้งไม่ใช่สิ่งง่ายนัก แม้ว่าเราจะพิจารณาลักษณะของลำดับโดยละเอียดถี่ถ้วนแล้วก็ตาม ต่อไปเราจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับลำดับย่อยของลำดับซึ่งเป็นอีกเครื่องมือหนึ่งที่มีประสิทธิภาพสูงในการทดสอบการลู่เข้าของลำดับให้สะดวกและง่ายยิ่งขึ้น

บทนิยาม 5.1.18 กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ และ $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนนับที่ซึ่ง

$$n_1<n_2<n_3<\ldots<n_k<\ldots$$

ถ้า $\{a_k\}$ เป็นลำดับที่มีพจน์ที่ k เป็นพจน์ที่ n_k ของลำดับ $\{x_n\}$ ($a_k=x_{n_k}$) เราจะเรียก $\{a_k\}$ ว่าเป็น **ลำดับย่อย** (subsequence) ของ $\{x_n\}$

ตัวอย่างเช่น ลำดับ

$$\{1\}=\{1,1,1,\ldots\}$$

และลำดับ

$$\{-1\}=\{-1,-1,-1,\ldots\}$$

เป็นลำดับย่อยของลำดับ

$$\{(-1)^n\}=\{-1,1,-1,1,\ldots\}$$

แต่

$$\{1,0,-1,\ldots\}$$

ไม่เป็นลำดับย่อยของ $\{(-1)^n\}$

จากตัวอย่างของลำดับย่อยที่กล่าวถึงข้างต้น เห็นได้ว่า ลำดับใด ๆ อาจจะมีลำดับย่อยที่แตกต่างกันได้ อย่างไรก็ตามทฤษฎีบทต่อไปจะยืนยันว่า ถ้าจำนวนจริง L เป็นลิมิตของลำดับ $\{x_n\}$ แล้ว L เป็นลิมิตของลำดับย่อยใด ๆ ของ $\{x_n\}$ ด้วย

ทฤษฎีบท 5.1.19 ถ้าจำนวนจริง L เป็นลิมิตของลำดับ $\{x_n\}$ แล้ว L เป็นลิมิตของลำดับย่อยใด ๆ ของ $\{x_n\}$ ด้วย

บทพิสูจน์ ขอละบทพิสูจน์ไว้ศึกษาในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง □

ทฤษฎีบท 5.1.19 ทำให้เราทราบว่า

1. ถ้าลำดับ $\{x_n\}$ มีลำดับย่อยที่ลู่ออก แล้วจะได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่ออกด้วย
2. ถ้าลำดับ $\{x_n\}$ มีสองลำดับย่อยที่มีลิมิตที่แตกต่างกัน แล้วจะได้ว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 5.1.20 จงใช้ทฤษฎีบท 5.1.19 ในการตรวจสอบว่าลำดับต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\{(-1)^n\}$
2. $\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\}$

วิธีทำ 1. กำหนดให้ $\{a_k\},\{b_k\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ ที่นิยามโดย

$$a_k = x_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \qquad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } k \in \mathbb{N}$$

และ

$$b_k = x_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1 \qquad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } k \in \mathbb{N}$$

เนื่องจาก $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$ และ $\lim_{k\to\infty} b_k = -1$ ดังนั้น $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

2. กำหนดให้ $\{a_k\},\{b_k\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{x_n\}=\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\}$ ที่นิยามโดย

$$a_k = x_{2k} = \frac{(-1)^{2k}2k}{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \qquad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } k \in \mathbb{N}$$

และ

$$b_k = x_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k-1}(2k-1)}{(2k-1)+1} = -\frac{(2k-1)}{2k} = -1 + \frac{1}{2k}$$

สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $k \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$ และ $\lim_{k\to\infty} b_k = -1$ ดังนั้น $\{x_n\}=\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\}$ เป็นลำดับลู่ออก ❍

จากหมายเหตุท้ายทฤษฎีบท 5.1.8 เราทราบว่าลำดับที่มีขอบเขตอาจเป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออกก็ได้ และทราบต่อไปอีกว่า ลำดับที่มีพจน์ทั่วไปเปลี่ยนแปลงแบบเพิ่มขึ้นหรือลดลงเรื่อย ๆ อย่างไม่มีขอบเขตเป็นลำดับลู่ออก กล่าวคือ ลำดับเข้าใกล้อนันต์หรือลบอนันต์เป็นลำดับลู่ออก ทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า “ลำดับใด ๆ ที่มีพจน์ทั่วไปเปลี่ยนแปลงแบบเพิ่มขึ้นหรือลดลงเรื่อย ๆ อย่างมีขอบเขตเป็นลำดับลู่เข้า” ซึ่งเราจะเริ่มจากการกล่าวถึงบทนิยามของ ลำดับเพิ่ม ลำดับลด และลำดับทางเดียว ดังนี้

บทนิยาม 5.1.21 กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับ เรากล่าวว่า $\{x_n\}$ เป็น

1. **ลำดับเพิ่ม** (increasing sequence) ถ้า $x_n \le x_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \in \mathbb{N}$
2. **ลำดับลด** (decreasing sequence) ถ้า $x_n \ge x_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \in \mathbb{N}$
3. **ลำดับทางเดียว** (monotone sequence) ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มหรือลำดับลด

ตัวอย่าง 5.1.22 ลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับเพิ่ม

$$\{1,2,3,\ldots\},\{1,2,2,3,3,\ldots\},\{a,a^2,a^3,\ldots\}\ (a>1)$$

ลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลด

$$\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\},\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\ldots\},\{b,b^2,b^3,\ldots\}\ (0<b<1)$$

ในขณะที่ลำดับต่อไปนี้

$$\{-1,1,-1,1,\ldots\},\{-2,0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\}$$

ไม่เป็นทั้งลำดับลดและลำดับเพิ่ม ❍

ทฤษฎีบท 5.1.23 ลำดับทางเดียวของจำนวนจริงที่มีขอบเขตเป็นลำดับลู่เข้า

บทพิสูจน์ ขอละบทพิสูจน์ไว้ศึกษาในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง □

ตัวอย่าง 5.1.24 จงตรวจสอบว่าลำดับ $\{\frac{2^n}{n!}\}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ กำหนดให้ $x_n = \frac{2^n}{n!}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก $x_n > 0$ และ $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \le 1$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \in \mathbb{N}$

ดังนั้น

$$x_n \geq x_{n+1} \qquad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n \in \mathbb{N}$$

เพราะฉะนั้น $\{x_n\} = \{\frac{2^n}{n!}\}$ เป็นลำดับทางเดียว

เนื่องจาก $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \ldots \geq x_n \ldots$ และ

$$|x_n| = x_n \leq x_1 = 2 \quad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n \in \mathbb{N}$$

ดังนั้น $\{x_n\} = \{\frac{2^n}{n!}\}$ มีขอบเขต

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 5.1.23 จะได้ว่า $\{x_n\} = \{\frac{2^n}{n!}\}$ ลู่เข้า ❍

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

1.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

1.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}$

1.7 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}$

1.8 $\lim\limits_{n\to\infty}(5^n+4^n)^{\frac{1}{n}}$

1.9 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$

1.10 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2n^5-n^2+4}}{n^2+1}$

2. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก

2.1 $\{\frac{3(-1)^n}{n!}\}$

2.2 $\{\tan(\frac{2n\pi}{1+8n})\}$

2.3 $x_1 = 1, x_{n+1} = 2x_n - 1$

2.4 $\{\frac{(-1)^n n}{n^2+1}\}$

2.5 $\{2,7,12,17,\ldots\}$

2.6 $\{\cos(\pi n/2)\}$

2.7 $\{1,-\frac{2}{3},\frac{4}{9},-\frac{8}{27},\ldots\}$

2.8 $\{\frac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}-1}\}$

2.9 $\{\frac{3+5n^2}{n+n^2}\}$

2.10 $\{\frac{\cos^2 n}{2^n}\}$

5.2 อนุกรมของจำนวนจริง

หัวข้อย่อยนี้จะกล่าวถึงอนุกรมของจำนวนจริง ซึ่งเป็นลำดับของจำนวนจริงชนิดหนึ่งที่เกิดจากผลบวกย่อยของลำดับของจำนวนจริงอีกลำดับหนึ่ง โดยจะศึกษาปัญหาการลู่เข้าของอนุกรมรวมไปถึงวิธีการพื้นฐานในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม

เราจะเริ่มต้นด้วยการกล่าวถึงบทนิยามของอนุกรมดังต่อไปนี้

บทนิยาม 5.2.1 กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \ , \ n = 1, 2, \ldots$$

เราเรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อยของ** n **พจน์แรก** หรือ **ผลบวกย่อยที่** n (nth partial sum) เรียกลำดับของผลบวกย่อย (sequence of partial sums) $\{S_n\}$ ว่า **อนุกรมอนันต์ของจำนวนจริง** (infinite series of real numbers) (ต่อไปจะเรียกสั้น ๆ ว่า **อนุกรม** (series)) และเรียก x_n ว่า **พจน์ที่** n (nth term) ของอนุกรม

สำหรับอนุกรม $\{S_n\}$ เราอาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$$

หรือ

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots$$

หรือ

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

แต่เพื่อความสะดวกในบางครั้งการเขียนสัญลักษณ์แทนอนุกรมนั้น เราอาจจะเริ่มต้นดัชนีของอนุกรมด้วยค่า $n \neq 1$ ก็ได้ ตัวอย่างเช่น อนุกรม $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

หรือ

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$$

หรือ

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2}$$

เป็นต้น

เนื่องจากอนุกรมเป็นลำดับของจำนวนจริงชนิดหนึ่ง ดังนั้นการศึกษาปัญหาการลู่เข้าของอนุกรมจึงไม่ใช่สิ่งใหม่แต่อย่างใด แต่เป็นการนำเอามากล่าวเสียใหม่ในรูปการลู่เข้าของลำดับของผลบวกย่อยดังนี้

บทนิยาม 5.2.2 จะเรียกอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ว่า **อนุกรมลู่เข้า** (convergent series) ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และเรียก **อนุกรมลู่ออก** (divergent series) ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าที่ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ เมื่อ $S \in \mathbb{R}$ เราจะเรียก S ว่า**ผลบวก** (sum) ของอนุกรม และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$

สูตรต่อไปนี้เป็นเครื่องมือที่ช่วยอำนวยความสะดวกในการหาผลบวกย่อยที่ n

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \dfrac{n^4}{4} + \dfrac{n^3}{2} + \dfrac{n^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
4. $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}$

ตัวอย่าง 5.2.3 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$
2. $2\cdot 5 + 5\cdot 8 + 8\cdot 11 + \ldots$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

วิธีทำ 1. เนื่องจากพจน์ที่ n ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ เขียนได้เป็น

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} S_n &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ &= (1-\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}) + \ldots + (\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n+1}) = 1$

แสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. เนื่องจากพจน์ที่ n ของอนุกรม $2\cdot5+5\cdot8+8\cdot11+\ldots$ เขียนได้เป็น

$$x_n = (3n-1)(3n+2)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
S_n &= (2\cdot5)+(5\cdot8)+\ldots+(3n-1)(3n+2)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(3k-1)(3k+2)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(9k^2+3k-2)\\
&= 9\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k-2\sum_{k=1}^{n}1\\
&= 9(\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6})+3(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2})-2n\\
&= \frac{9(2n^3+3n^2+n)+3(3n^2+3n)-12n}{6}\\
&= 3n^3+6n^2+n
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(n^3+6n^2+n) = \infty$

แสดงว่าอนุกรม $2\cdot5+5\cdot8+8\cdot11+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่ออก

3. เนื่องจาก

$$\{S_n\} = \{-1, 0, -1, 0, \ldots\}$$

เห็นได้ว่า $S_n = 0$ เมื่อ n เป็นเลขคู่ และ $S_n = -1$ เมื่อ n เป็นเลขคี่

เพราะฉะนั้น $\{S_n\}$ ไม่มีลิมิต

แสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ❍

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปเป็นการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอย่างง่ายที่เรียกว่า การทดสอบพจน์ที่ n กล่าวคือ “ถ้า $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก” ซึ่งสามารถกล่าวได้ในอีกนัยหนึ่งดังนี้

ทฤษฎีบท 5.2.4 (การทดสอบพจน์ที่ n : The nth Term Test) ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ลู่เข้า แล้วจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ลู่เข้า ดังนั้นจะมี $S \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

เพราะว่า $x_n = S_n - S_{n-1}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0 \qquad \square$$

หมายเหตุ บทกลับของทฤษฎีบท 5.2.4 นั้นไม่เป็นจริงเสมอไป กล่าวคือ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ แล้วอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ อาจเป็นอนุกรมลู่ออก ตัวอย่างเช่น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ แต่ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก (ดูตัวอย่าง 5.2.14(1))

ตัวอย่าง 5.2.5 จงตรวจสอบว่าอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{3} + \ldots$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$

วิธีทำ 1. เนื่องจากพจน์ที่ n ของอนุกรม $3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{3} + \ldots$ เขียนได้เป็น

$$x_n = \sqrt[n]{3} = 3^{1/n}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \neq 0$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.2.4 จะได้ว่า $3 + \sqrt{3} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{3} + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่ออก

2. เนื่องจากพจน์ที่ n ของอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ คือ $x_n = n$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \neq 0$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.2.4 จะได้ว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ❍

ต่อไปเราจะกล่าวถึงการลู่เข้าของอนุกรมพื้นฐานชนิดหนึ่งที่เรียกว่า อนุกรมเรขาคณิต โดยจะเริ่มจากการกล่าวถึงบทนิยามของอนุกรมชนิดนี้ก่อนดังนี้

บทนิยาม 5.2.6 อนุกรมเรขาคณิต (geometric series) คือ อนุกรมที่เขียนได้ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

ทฤษฎีบท 5.2.7 อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ เมื่อ $a \neq 0$ เป็นอนุกรมลู่เข้าถ้า $|r|<1$ และมีผลบวกเป็น $\frac{a}{1-r}$ และเป็นอนุกรมลู่ออกถ้า $|r|\geq 1$

บทพิสูจน์ ถ้า $|r|\geq 1$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} \neq 0$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 5.2.4 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ต่อไปพิจารณากรณีที่ $|r|<1$

เนื่องจาก

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$$

ดังนั้น

$$rS_n = ra + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$$

และ

$$S_n - rS_n = S_n(1-r) = a - ar^n$$

เพราะฉะนั้น

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

เนื่องจาก $|r|<1$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

แสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □

หมายเหตุ ขอให้สังเกตว่าอนุกรมเรขาคณิต

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

อาจเขียนแทนด้วย $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ ซึ่งดัชนีของอนุกรมเริ่มต้นด้วย $n=0$ และโดยผลของทฤษฎีบท 5.2.7จะได้ว่า

"อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ เมื่อ $a \neq 0$ เป็นอนุกรมลู่เข้าถ้า $|r|<1$ และมีผลบวกเป็น $\frac{a}{1-r}$ และเป็นอนุกรมลู่ออกถ้า $|r|\geq 1$"

ตัวอย่าง 5.2.8 จงคำนวณผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+...$

วิธีทำ 1. เห็นได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ซึ่ง $r=\frac{1}{2}$ และ $a=1$ เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 5.2.7 จะได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

2. เห็นได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ซึ่ง $r=\frac{1}{2}$ และ $a=\frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 5.2.7 จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

3. เห็นได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ซึ่ง $r=-\frac{1}{3}$ และ $a=1$ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 5.2.7 จะได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{1}{1-(-\frac{1}{3})}=\frac{3}{4}$$ ❍

ในทำนองเดียวกับลำดับลู่เข้า ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าผลบวกและพหุคูณของอนุกรมลู่เข้าเป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 5.2.9 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n + \beta y_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ และ $T_n = \sum_{k=1}^{n} y_k$ แทนผลบวกย่อยที่ n ของ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ ตามลำดับ

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

แล้วจะมีจำนวนจริง S, T ที่ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ และ $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ ตามลำดับ

เพราะว่า

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\alpha S_n + \beta T_n) &= \alpha \lim_{n\to\infty} S_n + \beta \lim_{n\to\infty} T_n \\ &= \alpha S + \beta T\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n + \beta y_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n \qquad \square$$

หมายเหตุ ถ้าให้ $\alpha = 1$ และ $\beta = -1$ ในทฤษฎีบท 5.2.9 จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

ทฤษฎีบท 5.2.10 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าและ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $y_n = (x_n + y_n) - x_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้นถ้าสมมติว่า $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.2.9 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าด้วย

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับสิ่งที่กำหนดไว้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก $\square$

หมายเหตุ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ อาจเป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออกก็ได้ ตัวอย่างเช่น

- ถ้า $x_n = 2$ และ $y_n = 1$ แทนพจน์ที่ n ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ ตามลำดับ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก และ $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก
- ถ้า $x_n = 1$ และ $y_n = -1$ แทนพจน์ที่ n ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ ตามลำดับ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แต่ $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 5.2.11 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนั้นด้วย

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^n})$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}((-\frac{4}{5})^n + \sqrt{n})$

วิธีทำ 1. เนื่องจาก $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ และ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ลู่เข้าทั้งคู่ ดังนั้นจะได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^n})$ เป็นอนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเป็น

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{5^n}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = 2 + \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$$

2. เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{4}{5})^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ลู่เข้าซึ่งมีผลบวกเป็น

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{4}{5})^n = \frac{-\frac{4}{5}}{1-(-\frac{4}{5})} = -\frac{4}{9}$$

แต่ $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ($\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty \neq 0$)

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}((-\frac{4}{5})^n + \sqrt{n})$ เป็นอนุกรมลู่ออก ❍

ในทฤษฎีบทต่อไปเราจะกล่าวถึงการลู่เข้าของอนุกรมพื้นฐานอีกชนิดหนึ่งที่เรียกว่า **อนุกรมพี** (p-series) โดยจะเริ่มจากการกล่าวถึงบทนิยามของอนุกรมชนิดนี้เสียก่อนดังนี้

บทนิยาม 5.2.12 อนุกรมพี (p-series) คือ อนุกรมที่เขียนได้ในรูป $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 5.2.13 อนุกรมพีเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$ และเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $p \le 1$

บทพิสูจน์ ขอละบทพิสูจน์ไว้ศึกษาในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง □

ตัวอย่าง 5.2.14 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก เพราะว่าเป็นอนุกรมพี ซึ่ง $p=1$ สำหรับกรณีนี้อนุกรมพีนี้มีชื่อว่า **อนุกรมฮาร์โมนิก** (Harmonic series)

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก เพราะว่าเป็นอนุกรมพี ซึ่ง $p=\frac{1}{5}<1$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เพราะว่าเป็นอนุกรมพี ซึ่ง $p=5>1$ ❍

ทฤษฎีบท 5.2.15 (**การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ** : Comparison Test)

กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ เป็นอนุกรม

1. ถ้ามีจำนวนนับ n_0 ที่ซึ่ง $0 \le x_n \le y_n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \ge n_0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. ถ้ามีจำนวนนับ n_0 ที่ซึ่ง $0 \le z_n \le x_n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \ge n_0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

บทพิสูจน์ ขอละบทพิสูจน์ไว้ศึกษาในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง □

ตัวอย่าง 5.2.16 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

วิธีทำ 1. เนื่องจาก

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} \le \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n \ge 1$$

และ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้นจากการทดสอบโดยการเปรียบเทียบจะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. เนื่องจาก $1 \le \ln n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \ge 3$

ดังนั้นจะได้ว่า $0 \le \frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \ge 3$

เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมพี ซึ่ง $p = \frac{1}{2} < 1$ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

เพราะฉะนั้นจากการทดสอบโดยการเปรียบเทียบจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ❍

ทฤษฎีบท 5.2.17 (**การทดสอบโดยการเปรียบเทียบด้วยลิมิต** : limit comparison test)

กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ เป็นอนุกรมที่ซึ่ง $x_n \ge 0$ และ $y_n > 0$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

1. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = c > 0$ แล้วจะได้ว่าอนุกรมทั้งสองลู่เข้าด้วยกันหรือไม่ก็ลู่ออกด้วยกัน

2. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

3. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

บทพิสูจน์ ขอละบทพิสูจน์ไว้ศึกษาในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง □

ตัวอย่าง 5.2.18 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}$

วิธีทำ 1. กำหนดให้ $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$ และ $y_n=\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ สำหรับทุก ๆ $n\in\mathbb{N}$

เห็นได้ชัดว่า $\sum_{n=1}^{\infty}y_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ เป็นอนุกรมพีที่ซึ่ง $p=\frac{3}{2}>1$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}y_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า

เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt{n^3+3}}{1/\sqrt{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^3}{n^3+3}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+3/n^3}}=1>0$$

เพราะฉะนั้นจากการทดสอบโดยการเปรียบเทียบด้วยลิมิตจะได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. กำหนดให้ $x_n=\frac{\sqrt{n}}{2^n}$ และ $y_n=\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ สำหรับทุก ๆ $n\in\mathbb{N}$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty}y_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ เป็นอนุกรมพีที่ซึ่ง $p=\frac{3}{2}>1$ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}y_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า

เพราะว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}/2^n}{1/\sqrt{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$$

จากการทดสอบโดยการเปรียบเทียบด้วยลิมิตจะได้ว่าอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า ❍

ทฤษฎีบท 5.2.15 และ 5.2.17 เป็นวิธีการทดสอบการลู่เข้าเฉพาะอนุกรมที่มีแต่ละพจน์ไม่เป็นลบ อย่างไรก็ตามการทดสอบดังกล่าวนั้นไม่สามารถใช้กับอนุกรมสลับซึ่งเป็นอนุกรมชนิดหนึ่งที่ประกอบด้วยพจน์ที่เป็นบวกและเป็นลบสลับกันไป ดังนั้นในการศึกษาทฤษฎีบทการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมสลับ

เราจะเริ่มจากการกล่าวถึงบทนิยามของอนุกรมสลับเสียก่อน จากนั้นจึงศึกษาวิธีการทดสอบอนุกรมสลับ รวมไปถึงความหมายของการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์และแบบมีเงื่อนไขของอนุกรมทั่วไป

บทนิยาม 5.2.19 กำหนดให้ $x_n > 0$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ เราเรียกอนุกรมที่เขียนอยู่ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + (-1)^{n+1}x_n + \ldots$$

หรือ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}x_n = -x_1 + x_2 - x_3 + \ldots + (-1)^{n}x_n + \ldots$$

ว่า **อนุกรมสลับ** (alternating series)

ทฤษฎีบท 5.2.20 (การทดสอบอนุกรมสลับ : alternating series test)

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}x_n$ เป็นอนุกรมสลับซึ่ง

1. มี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $x_{n+1} < x_n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \geq n_0$
2. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

แล้วจะได้ว่าอนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

บทพิสูจน์ ขอละบทพิสูจน์ไว้ศึกษาในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง □

ตัวอย่าง 5.2.21 จงทดสอบว่าอนุกรมสลับต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$

วิธีทำ 1. เพราะว่าพจน์ที่ $n+1$ ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ เขียนได้เป็น $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

ดังนั้น

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}-(\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} < 0 \text{ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n \geq 1$$

เพราะฉะนั้น $x_{n+1} < x_n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \geq 1$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

เพราะฉะนั้นจากทฤษฎีบทการทดสอบอนุกรมสลับ 5.2.20 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. เพราะว่าพจน์ที่ n ของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$ เขียนได้เป็น $x_n=\frac{n}{n+1}$ และ

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1\neq 0$$

ทำให้เราไม่สามารถสรุปได้โดยทฤษฎีบทการทดสอบอนุกรมสลับ 5.2.20 ว่า $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

หรืออนุกรมลู่ออก

แต่เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$

เราอาจสรุปได้จากทฤษฎีบท 5.2.4 ว่า $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ❍

ต่อไปเราจะกล่าวถึงการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์และแบบมีเงื่อนไขของอนุกรม

บทนิยาม 5.2.22 กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรม

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์** (absolutely convergent series) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข** (conditionally convergent series) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 5.2.22 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือแบบมีเงื่อนไข

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{n+1}\right)^n$

วิธีทำ 1. เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่ออก (อนุกรมพี ซึ่ง $p=\frac{1}{2}<1$)

แต่ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (ตัวอย่าง 5.2.21 (1))

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

2. เนื่องจาก $0 \le \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{2}$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

ดังนั้น $0 \le \frac{1}{(n+1)^n} \le \frac{1}{2^n}$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $r = \frac{1}{2}$)

เพราะฉะนั้นจากการทดสอบโดยการเปรียบเทียบจะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{-1}{n+1}\right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า

ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n+1}\right)^n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ❍

สำหรับกรณี $x_n \ge 0$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ เห็นได้ชัดว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ สำหรับอนุกรมทั่วไป ทฤษฎีบทต่อไปนี้ยืนยันว่า “ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า”

ทฤษฎีบท 5.2.24 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

บทพิสูจน์ กำหนดให้ $y_n = \frac{|x_n| + x_n}{2}$ และ $z_n = \frac{|x_n| - x_n}{2}$

เนื่องจาก $-|x_n| \le x_n \le |x_n|$

ดังนั้น $0 \le y_n \le |x_n|$ และ $0 \le z_n \le |x_n|$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้นจากการทดสอบโดยการเปรียบเทียบจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เนื่องจากผลต่างของสองอนุกรมลู่เข้าเป็นอนุกรมลู่เข้า (หมายเหตุท้ายทฤษฎีบท 5.2.9)

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} (y_n - z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □

ข้อสังเกต 1. บทกลับของทฤษฎีบท 5.2.24 ไม่เป็นจริง กล่าวคือ "ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ อาจเป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือไม่เป็นก็ได้" ตัวอย่างเช่น

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าที่ไม่เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมพีที่ลู่ออก

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าที่เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{5^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ลู่เข้า

2. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ไม่เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์โดยที่ $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ อาจเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือไม่เป็นก็ได้ ตัวอย่างเช่น

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ไม่เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ที่เป็นอนุกรมลู่เข้า เพราะว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

เป็นอนุกรมลู่ออก

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ ไม่เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ที่เป็นอนุกรมลู่เข้า เพราะว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

เป็นอนุกรมที่ลู่ออก

ตัวอย่าง 5.2.25 จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{2^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5}$

วิธีทำ 1. เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{\sin^2 n}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$ และ $0 \le \frac{\sin^2 n}{2^n} \le \frac{1}{2^n}$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมเรขาคณิตที่ลู่เข้า)

ดังนั้นจากการทดสอบโดยการเปรียบเทียบจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{\sin^2 n}{2^n}\right|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 5.2.24 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2 n}{2^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. เนื่องจาก

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^5}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า (อนุกรมพีที่ลู่เข้า)

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 5.2.24 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ❍

จากเนื้อหาที่ได้กล่าวถึงข้างต้น เราได้ศึกษาวิธีการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมที่แต่ละพจน์ไม่เป็นลบรวมไปถึงกรณีของอนุกรมสลับ ต่อไปเราจะจบการศึกษาในหัวข้อย่อยนี้ด้วยการศึกษาวิธีการทดสอบโดยใช้อัตราส่วนและโดยใช้การถอดกรณฑ์สำหรับอนุกรมทั่วไป และจะพบภายหลังว่าวิธีการทดสอบทั้งสองสามารถใช้ได้อย่างมีประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตามวิธีการทดสอบทั้งสองดังกล่าวนั้นไม่สามารถนำมาใช้ได้กับทุกอนุกรม

ทฤษฎีบท 5.2.26 (**การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน** : Ratio Test)

กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ เป็นอนุกรมซึ่ง $x_n \neq 0$ และ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \infty$ หรือ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = L$ เมื่อ $L \in \mathbb{R}$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า $L<1$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
2. ถ้า $L>1$ หรือ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \infty$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $L=1$ แล้วจะสรุปผลการทดสอบด้วยวิธีการนี้ไม่ได้

บทพิสูจน์ ขอละบทพิสูจน์ไว้ศึกษาในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง □

ตัวอย่าง 5.2.27 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n!}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n+1}$

วิธีทำ 1. กำหนดให้ $x_n = \dfrac{n(n+1)}{2n!}$ เป็นพจน์ที่ n ของ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n!}$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)/2(n+1)!}{n(n+1)/2n!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)!}\,\frac{2n!}{n(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2+n} = 0 < 1
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นจากการทดสอบโดยใช้อัตราส่วนจะได้ว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. กำหนดให้ $x_n = \dfrac{2^n}{n+1}$ เป็นพจน์ที่ n ของ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n+1}$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}/n+2}{2^n/n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{n+2}\,\frac{n+1}{2^n} \\
&= 2\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} \\
&= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \\
&= 2\left(\frac{1+0}{1+0}\right) = 2 > 1
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นจากการทดสอบโดยใช้อัตราส่วนจะได้ว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ❍

ทฤษฎีบท 5.2.28 (การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์ : Root Test) กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรม และ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = L$ เมื่อ $L \in \mathbb{R}$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
2. ถ้า $L > 1$ หรือ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \infty$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $L = 1$ แล้วจะสรุปผลการทดสอบด้วยวิธีการนี้ไม่ได้

บทพิสูจน์ ขอละบทพิสูจน์ไว้ศึกษาในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง □

ตัวอย่าง 5.2.28 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n^3}$

วิธีทำ 1. กำหนดให้ $x_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^n}$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{(\ln(n+1))^n}\right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$$

$$= 0 < 1$$

เพราะฉะนั้นจากการทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. กำหนดให้ $x_n = \frac{(-1)^n 2^n}{n^3}$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n 2^n}{n^3}\right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^{3/n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2((1/n)^{(1/n)})^3$$

$$= 2(1)^3 = 2 > 1$$

เพราะฉะนั้นจากการทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n^3}$ เป็นอนุกรมลู่ออก ❍

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1.1 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}$

1.2 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\cdots$

1.3 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cdots$

1.4 $4-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\ldots$

1.5 $1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\ldots$

1.6 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\ldots$

1.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+4)}$

1.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

1.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}+1}$

1.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

1.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

1.12 $\sum_{n=1}^{\infty}(n-\frac{n^2}{n+1})$

1.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}$

1.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

1.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$

1.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$

1.17 $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n}$

1.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3}{5^n}$

2. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-3}$

2.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n^3+10)^{1/4}}$

2.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$

2.4 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{2n^4+1}$

2.5 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2+1}$

2.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$

2.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$

2.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}n}{n^2+1}$

2.9 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$

2.10 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2n+1}$

2.11 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n}{n!}$

2.12 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}$

2.13 $\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{3}{4})^n$

2.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{e^{n^2}}$

2.15 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(\pi/4)}{n^2}$

2.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$

2.17 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2+1}{n^3+1}$

2.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln 2)^n}$

2.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

2.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}$

2.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}$

2.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$

2.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^n}$

2.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3(n+1)}$

2.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2-n}$

2.26 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$

2.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$

2.28 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2(n+1)}$

2.29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}$

2.30 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n(n+2)}$

2.31 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$

2.32 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$

2.33 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$

2.34 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

2.35 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n!)^3}$

2.36 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^{n+1}}$

2.37 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^2}$

2.38 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n(1+n^2)}{n!}$

3. จงหา $x\in\mathbb{R}$ ซึ่งทำให้อนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าและเขียนผลบวกในรูปฟังก์ชันของ x

3.1 $1+x+x^2+\ldots$

3.2 $x+x^3+x^5+\ldots$

3.3 $1/x+1/x^2+1/x^3+\ldots$

3.4 $\ln x+(\ln x)^2+(\ln x)^3+\ldots$

5.3 อนุกรมกำลังของจำนวนจริง

ในหัวข้อย่อยนี้ เราจะกล่าวถึงแนวคิดเบื้องต้นของอนุกรมในรูปแบบที่เรียกว่า **อนุกรมกำลัง** ซึ่งเป็นอนุกรมของจำนวนจริงที่มีความสำคัญมากอนุกรมหนึ่ง โดยบทนิยามของอนุกรมกำลังสามารถกล่าวถึงได้ดังนี้

บทนิยาม 5.3.1 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง และให้ a_n, c เป็นค่าคงตัวสำหรับทุก ๆ $n = 0,1,2,\ldots$ จะเรียกอนุกรมของจำนวนจริงที่เขียนอยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \text{ หรือ } a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots$$

ว่า **อนุกรมกำลัง** (power series) ใน $x-c$ เรียก a_n เมื่อ $n = 0,1,2,\ldots$ ว่า **สัมประสิทธิ์** (coefficients) ของอนุกรมกำลัง และเรียก c ว่า **ศูนย์กลาง** (center) ของอนุกรมกำลัง

สังเกตว่าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ อาจลู่เข้าสำหรับ x บางค่าและลู่ออกสำหรับ x ค่าอื่น ๆ ตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดให้ $c=0$ และ $a_n = 1$ สำหรับทุก ๆ $n = 0,1,2,\ldots$ จะได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ เขียนได้ใหม่เป็น

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a=1$ และ $r=x$ ดังนั้น อนุกรมนี้จะลู่เข้าและมีผลบวกเป็น $\frac{1}{1-x}$ สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $|x|<1$ และลู่ออกสำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $|x| \geq 1$ ดังนั้นในหัวข้อย่อยนี้เราจะเน้นการศึกษาไปที่การหาเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ซึ่งทำให้อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบทต่อไปจะช่วยอำนวยความสะดวกในการศึกษาเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ที่ทำให้อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ทฤษฎีบท 5.3.2 (1) ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้าที่ $x = x_1 \neq c$ แล้วอนุกรมนี้ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์สำหรับทุก ๆ x ซึ่งทำให้ $|x-c| < |x_1 - c|$

(2) ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่ออกที่ $x = x_2 \neq c$ แล้วอนุกรมนี้ลู่ออกสำหรับทุก ๆ x ซึ่งทำให้ $|x-c| > |x_2 - c|$

บทพิสูจน์ ขอละบทพิสูจน์ไว้ศึกษาในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง □

จากทฤษฎีบท 5.3.2 เราสามารถสรุปความเป็นไปได้ในการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ บนเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ได้ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.3.3 การลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ จะเป็นไปตามกรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้

1. อนุกรมลู่เข้า เมื่อ $x = c$ เท่านั้น
2. อนุกรมลู่เข้าสำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$
3. มีจำนวนจริง $R > 0$ ที่ทำให้อนุกรมลู่เข้าสำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $|x-c| < R$ และลู่ออกสำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $|x-c| > R$

บทพิสูจน์ ขอละบทพิสูจน์ไว้ศึกษาในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง □

หมายเหตุ 1. จากทฤษฎีบท 5.3.3 (1) จะได้ว่า เซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ซึ่งทำให้อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้า คือ ช่วงปิด $[c,c] = \{c\}$

2. จากทฤษฎีบท 5.3.3 (2) จะได้ว่า เซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ซึ่งทำให้อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้า คือ ช่วงเปิดอนันต์ $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

3. จากทฤษฎีบท 5.3.3 (3) จะได้ว่า เซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ซึ่งทำให้อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้า คือ ช่วงเปิด $(c-R, c+R)$ เป็นอย่างน้อย สำหรับกรณีที่ $x = c+R$ หรือ $x = c-R$ อนุกรมกำลังนี้อาจลู่เข้าหรือไม่ก็ได้ ดังนั้นเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ซึ่งทำให้อนุกรมกำลังนี้ลู่เข้าจึงเป็นกรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้

- $(c-R, c+R)$
- $[c-R, c+R)$
- $(c-R, c+R]$
- $[c-R, c+R]$

ต่อไปเราจะกล่าวถึง "รัศมีและช่วงของการลู่เข้า" ของอนุกรมกำลังซึ่งมีความสำคัญอย่างมากในการกำหนดเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ซึ่งอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้า

บทนิยาม 5.3.4 1. เราจะเรียกจำนวนจริง $R>0$ ในทฤษฎีบท 5.3.3 (3) ว่า **รัศมีการลู่เข้า** (radius of convergence) และเรียกเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ที่นิยามโดย

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}\}$$

ว่า **ช่วงของการลู่เข้า** (interval of convergence) ของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$

2. ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้าที่ $x=c$ เท่านั้น แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ มีรัศมีการลู่เข้าเป็น 0

3. ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้าที่ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ มีรัศมีการลู่เข้าเป็น ∞

การคำนวณรัศมีการลู่เข้าหรือช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังสามารถทำได้จากการประยุกต์ใช้เครื่องมือพื้นฐานในการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมที่ได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อ 5.2 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.3.5 จงหารัศมีการลู่เข้าและช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

วิธีทำ 1. กำหนดให้ $x_n = \dfrac{x^n}{n}$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}/(n+1)}{|x|^n/(n)} &= \lim_{n\to\infty} |x| \frac{n}{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} |x| \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\ &= |x|\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 5.2.26 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $|x|<1$ และลู่ออกสำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $|x|>1$

ต่อไปจะพิจารณาที่ $|x|=1$ หรือ $x=-1,1$

ถ้า $x=1$ จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

เป็นอนุกรมพีที่ลู่ออก

ถ้า $x=-1$ จากทฤษฎีบทการทดสอบอนุกรมสลับ 5.2.20 จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า

เพราะฉะนั้นจากการตรวจสอบข้างต้น เราสามารถสรุปได้ว่า อนุกรมกำลัง $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ มีรัศมีการลู่เข้า เป็น 1 และมี $[-1,1)$ เป็นช่วงของการลู่เข้า

2. กำหนดให้ $x_n = \dfrac{x^n}{n!}$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/(n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

โดยทฤษฎีบท 5.2.26 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

เพราะฉะนั้นจากการตรวจสอบข้างต้น เราสามารถสรุปได้ว่า อนุกรมกำลัง $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ มีรัศมีการลู่เข้าเป็น ∞ และมี $\mathbb{R}$ เป็นช่วงของการลู่เข้า

3. กำหนดให้ $x_n = n!x^n$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{(n)!|x|^n} = \lim_{n\to\infty} |x|(n+1) = \infty$$

โดยทฤษฎีบท 5.2.26 $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ ลู่ออกสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $x \neq 0$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ ลู่เข้า เมื่อ $x = 0$ เท่านั้น

เพราะฉะนั้นจากการตรวจสอบข้างต้น เราสามารถสรุปได้ว่า อนุกรมกำลัง $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ มีรัศมีการลู่เข้าเป็น 0 และมี $[0,0] = \{0\}$ เป็นช่วงของการลู่เข้า

4. กำหนดให้ $x_n = n^n x^n$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก $\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{|n^n x^n|} = n|x|$

และ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} n|x| = \infty$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $x \neq 0$

โดยทฤษฎีบท 5.2.28 $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ ลู่ออกสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $x \neq 0$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ ลู่เข้า เมื่อ $x = 0$ เท่านั้น

เพราะฉะนั้นจากการตรวจสอบข้างต้น เราสามารถสรุปได้ว่า อนุกรมกำลัง $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ มีรัศมีการลู่เข้าเป็น 0 และมี $[0,0] = \{0\}$ เป็นช่วงของการลู่เข้า ❍

ต่อไปจะกล่าวถึงฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังดังนี้

บทนิยาม 5.3.6 กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ เป็นอนุกรมกำลังที่มี I เป็นช่วงของการลู่เข้า เราจะเรียกฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \text{ สำหรับทุก ๆ } x \in I$$

ว่า **ฟังก์ชันผลบวก** ของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

ตัวอย่าง 5.3.7 จงหาฟังก์ชันผลบวกและช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ คือ $\frac{1}{1+x^2}$

เพราะว่าอนุกรมนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิตซึ่งลู่เข้าเมื่อ $|-x^2|<1$ นั่นคือ $x^2<1$ หรือ $|x|<1$

ดังนั้นช่วงของการลู่เข้าสำหรับอนุกรมนี้คือ ช่วงเปิด $(-1,1)$ ❍

ทฤษฎีบทต่อไปจะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของอนุกรมกำลัง

ทฤษฎีบท 5.3.10 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ ที่มีรัศมีการลู่เข้าเป็น R จะได้ว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-c)^{n-1}$ สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $|x-c|<R$

บทพิสูจน์ ขอละบทพิสูจน์ไว้ศึกษาในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง □

หมายเหตุ ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ เป็นอนุกรมกำลังที่มีรัศมีการลู่เข้าเป็น R ซึ่งลู่เข้าที่จุด $x=c-R$ หรือ $x=c+R$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-c)^{n-1}$ อาจจะลู่ออกที่จุดดังกล่าว เช่น ในตัวอย่าง 5.3.5 ข้อ 1 เราจะเห็นว่าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ มี $[-1,1)$ เป็นช่วงของการลู่เข้า แต่อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n-1}$ ลู่ออกที่ $x=-1$

เห็นได้ว่าโดยทฤษฎีบท 5.3.10 ทำให้เราทราบว่าอนุกรมกำลังของ $f'(x)$ และ $f(x)$ มีช่วงของการลู่เข้าเดียวกัน (ซึ่งในที่นี้คือ I) ยิ่งไปกว่านั้น เราสามารถขยายผลที่ได้จากทฤษฎีบท 5.3.10 เพื่อกล่าวถึงอนุพันธ์อันดับสูงของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ บน I ได้ดังนี้

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)...(n-k+1)a_n(x-c)^{n-k} \text{ สำหรับทุก ๆ } k=1,2,3,... \text{ และ } x\in I$$

ตัวอย่าง 5.3.11 จงเขียนฟังก์ชัน $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ ในรูปของอนุกรมกำลังพร้อมทั้งหารัศมีของการลู่เข้า

วิธีทำ ในหัวข้อ 5.2 เราทราบว่า $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}$ เมื่อ $|r|<1$ ดังนั้น

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

และ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

เนื่องจาก $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ มีรัศมีการลู่เข้าเป็น 1 ดังนั้น $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ มีรัศมีการลู่เข้าเป็น 1 ด้วยเช่นกัน ❍

ต่อไปเราจะกล่าวถึงอนุกรมเทย์เลอร์ซึ่งนับว่าเป็นอนุกรมกำลังชนิดหนึ่งที่มีความสำคัญมากสำหรับเทคนิคการประมาณค่าชั้นสูงซึ่งในที่นี้เราจะไม่ขอกล่าวถึงลงไปในรายละเอียดของเทคนิคดังกล่าว

บทนิยาม 5.3.12 กำหนดให้ $c \in \mathbb{R}$ และ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง f และอนุพันธ์ทุกอันดับของ f หาค่าได้ที่จุด c จะเรียกอนุกรมกำลังที่เขียนในรูป

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(c)(x-c)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n + \ldots$$

ว่า **อนุกรมเทย์เลอร์** (Taylor series) ของ f รอบจุด c หรือ **อนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด c ที่ก่อกำเนิดโดย f** (Taylor series about c generated by f) และเมื่อ $c=0$ จะเรียกอนุกรมนี้ว่า **อนุกรมแมคลอริน** (Maclaurin series)

ในบางครั้งเรานิยมเขียนอนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบจุด c ในรูปของ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$$

เมื่อ $f^{(0)}(c) = f(c)$

ตัวอย่าง 5.3.13 1. จงเขียนอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x)=\frac{1}{x}$ รอบจุด $c=1$

2. จงเขียนอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x)=\sin x$ รอบจุด $c=\frac{\pi}{4}$

3. จงเขียนอนุกรมแมคลอรินของ $f(x)=e^{x}$

4. จงเขียนอนุกรมแมคลอรินของ $f(x)=\ln(1-x)$

วิธีทำ 1.

$$f(x)=\frac{1}{x}\ , \qquad f(1)=1$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ , \qquad f'(1)=-1$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}\ , \qquad f''(1)=2$$

$$\vdots$$

ดังนั้นอนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบจุด $c=1$ เขียนได้เป็น

$$f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2\ldots=1-(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$$

2.

$$f(x)=\sin x\ , \qquad f(\tfrac{\pi}{4})=\sin(\tfrac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x)=\cos x\ , \qquad f'(\tfrac{\pi}{4})=\cos(\tfrac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x)=-\sin x\ , \qquad f''(\tfrac{\pi}{4})=-\sin(\tfrac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vdots$$

ดังนั้นอนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบจุด $c=\frac{\pi}{4}$ เขียนได้เป็น

$$f(\tfrac{\pi}{4})+f'(\tfrac{\pi}{4})(x-\tfrac{\pi}{4})+\frac{1}{2!}f''(\tfrac{\pi}{4})(x-\tfrac{\pi}{4})^2\ldots=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+(x-\tfrac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\tfrac{\pi}{4})^2+\ldots)$$

3. เนื่องจาก $f^{(n)}(x)=e^x,\ f^{(n)}(0)=e^0=1$ สำหรับทุก ๆ $n=0,1,2,3,\ldots$

เพราะฉะนั้นอนุกรมแมคลอรินของ f เขียนได้เป็น

$$f(0)+f'(0)x+\tfrac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

4.

$$f(x)=\ln(1-x)\ , \qquad f(0)=\ln(1)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}\ , \qquad f'(0)=\frac{1}{0-1}=-1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}\ , \qquad f''(0)=-\frac{1}{(0-1)^2}=-1$$

$$f'''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}, \qquad f'''(0)=\frac{2}{(0-1)^3}=-2$$

$$\vdots$$

เพราะฉะนั้นอนุกรมแมคลอรินของ f เขียนได้เป็น

$$f(0)+f'(0)x+\tfrac{1}{2!}f''(0)x^2+\ldots=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

ทฤษฎีบท 5.3.15 จะกล่าวถึงเงื่อนไขว่าเมื่อใด อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน f รอบจุด c จะลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน f บนช่วงเปิด I ที่มี c เป็นสมาชิก เพื่ออำนวยความสะดวกทางคณิตศาสตร์จะขอกล่าวถึงทฤษฎีบทของเทย์เลอร์เสียก่อน ดังนี้

ทฤษฎีบท 5.3.14 (**ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์** : Taylor theorem)
ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ หาอนุพันธ์ในช่วงเปิด I ที่มี c เป็นสมาชิก แล้วสำหรับแต่ละ $x\in I$ จะได้ว่า

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k+R_n(x) \qquad (5\text{-}1)$$

เมื่อฟังก์ชันเศษเหลือ $R_n(x)$ ถูกนิยามโดย

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

สำหรับบาง ζ ที่อยู่ระหว่าง c และ x

บทพิสูจน์ ขอละบทพิสูจน์ไว้ศึกษาในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง □

เราจะเรียกสมการ (5-1) ว่า **สูตรของเทย์เลอร์** (Taylor formula) ดีกรี n ของ f ณ จุด c

ทฤษฎีบท 5.3.15 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีสูตรของเทย์เลอร์พร้อมเศษเหลือเป็น

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k+R_n(x)$$

จะได้ว่า $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$

บทพิสูจน์ ขอละบทพิสูจน์ไว้ศึกษาในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูง □

ตัวอย่าง 5.3.14 จงแสดงว่าอนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดโดย $f(x)=e^x$ รอบจุด $c=0$ ลู่เข้าสู่ $f(x)$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x

วิธีทำ เนื่องจากสูตรของเทย์เลอร์พร้อมเศษเหลือของ f ณ จุด $c=0$ เขียนได้เป็น

$$e^x=\sum_{n=0}^{n}\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$$

เมื่อฟังก์ชันเศษเหลือถูกนิยามโดย $R_n(x)=\dfrac{e^{\zeta}}{(n+1)!}x^{n+1}$ สำหรับบาง ζ ที่อยู่ระหว่าง 0 และ x

เพราะว่า e^x เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้น e^{ζ} จึงมีค่าอยู่ระหว่าง $e^0=1$ และ e^x

ในกรณีที่ $x<0$ จะได้ว่า $\zeta<0$ และ $e^{\zeta}<1$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $|R_n(x)|<\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$

ในกรณีที่ $x=0$ จะได้ว่า $e^x=1$ และ $R_n(x)=0$ ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$

และในกรณีที่ $x>0$ จะได้ว่า $\zeta>0$ และ $e^{\zeta}<e^x$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $|R_n(x)|<e^x\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ สำหรับทุก ๆ x ทำให้ $\lim\limits_{n\to\infty}e^x\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$ ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$

จากการพิจารณาทั้งสามกรณีข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$ สำหรับทุก ๆ x

เพราะฉะนั้นอนุกรมเทย์เลอร์ที่ก่อกำเนิดโดย $f(x)=e^x$ รอบจุด $c=0$ ลู่เข้าสู่ e^x สำหรับทุก ๆ $x\in\mathbb{R}$

นั่นแสดงว่า $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ สำหรับทุก ๆ $x\in\mathbb{R}$ ❍

ตัวอย่างต่อไปแสดงอนุกรมแมคลอลินสำหรับฟังก์ชันพื้นฐาน

ตัวอย่าง 5.3.15 1. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ สำหรับทุก ๆ $x\in\mathbb{R}$

2. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x4}{4!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ สำหรับทุก ๆ $x\in\mathbb{R}$

3. $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ สำหรับทุก ๆ $x\in\mathbb{R}$

4. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $|x| < 1$

5. $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $|x| < 1$

6. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ❍

ตัวอย่าง 5.3.16 จงแสดงว่า $\sin x$ หาอนุพันธ์ได้สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ และ

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 5.3.15 (1) จะได้ว่า $\sin x$ เป็นฟังก์ชันผลบวกของ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ แล้วโดยทฤษฎีบท 5.3.10 จะได้ว่า $\sin(x)$ หาอนุพันธ์ได้สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ และ

$$\frac{d}{dx} \sin x = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

จากตัวอย่าง 5.3.15 (2)

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ ❍

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$

1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

1.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}$

1.7 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

1.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n 4^n}$

1.9 $\sum_{n=1}^{\infty}(ax)^n, a>0$

1.10 $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$

2. จงหารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n!}x^n$

2.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2n!}x^{2n}$

3. จงแสดงว่า

3.1 $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ เมื่อ $|x|<1$

3.2 $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-...=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ เมื่อ $|x|<1$

4. จงเขียนฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ในรูปอนุกรมกำลัง โดยใช้อนุกรมแมคลอรินสำหรับฟังก์ชันพื้นฐานที่ให้ไว้ในตัวอย่าง 5.3.15

4.1 $\ln(1-2x), |x|<1/2$

4.2 e^{-x}

4.3 $\cosh x$

4.4 $\sinh(2x)$

4.5 $\sin^2 x$

4.6 $\frac{1}{3-x}$

4.7 $\frac{4x}{1+2x-3x^2}$

4.8 $\frac{1}{1-x^2}$

5. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันรอบจุด c ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

5.1 $\cos^2 x,\ c=0$

5.2 $\cos x,\ c=\pi/3$

5.3 $e^{\cos x},\ c=0$

5.4 $\tan x,\ c=0$

5.5 $\frac{1}{1+x},\ c=0$

5.6 $\sqrt{x},\ c=2$

ภาคผนวก 1
ความรู้พื้นฐาน

ในภาคผนวกนี้เราจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่จำเป็นในการศึกษาวิชาแคลคูลัสพอเป็นสังเขปซึ่งได้แก่ ฟังก์ชัน ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และฟังก์ชันลอการิทึม โดยที่จะให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง และ $\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด

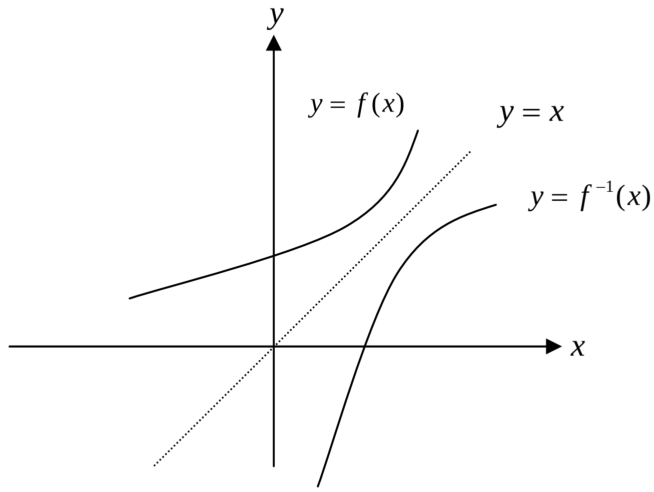
0.1 ฟังก์ชัน

ให้ $f \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ แล้วเราเรียก f ว่า **ฟังก์ชัน** (function) ถ้า f สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ สำหรับ x, y_1, y_2 ใด ๆ ใน $\mathbb{R}$ ถ้า (x, y_1) และ (x, y_2) เป็นสมาชิกของ f แล้ว $y_1 = y_2$

ให้ f เป็นฟังก์ชัน แล้ว เราเรียก เซต $\{x\in\mathbb{R} : (x, y)\in f$ สำหรับบาง $y\in\mathbb{R}\}$ ว่า **โดเมน** (domain) ของ f ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์แทนด้วย D_f และเรียก เซต $\{y\in\mathbb{R} : (x, y)\in f$ สำหรับบาง $x\in\mathbb{R}\}$ ว่า **เรนจ์** (range) ของ f ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์แทนด้วย R_f เนื่องจากสำหรับแต่ละ x ในโดเมนของ f จะมี y ในเรนจ์ของ f เพียงค่าเดียว โดยที่ $(x, y)\in f$ ดังนั้น เราอาจเขียนแทนข้อความ $(x, y)\in f$ ด้วย $y = f(x)$ และเรียก x และ y ว่า **ตัวแปรอิสระ** (independent variable) และ **ตัวแปรตาม** (dependent variable) ของ f ตามลำดับ เราเรียกเซต $\{(x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : (x, y)\in f\}$ ของจุดในระนาบ ว่า **กราฟ** (graph) ของ f

ให้ A และ B เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ และ ให้ f เป็นฟังก์ชัน ถ้า $D_f = A$ และ $R_f \subset B$ แล้ว เราเรียก f ว่า **ฟังก์ชันจาก** A **ไปยัง** B (function from A into B) ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $f : A \to B$ ถ้าเรนจ์ของ f เท่ากับ B แล้วเราเรียก f ว่า **ฟังก์ชันจาก** A **ไปทั่วถึง** B (function from A onto B) ถ้า f มีสมบัติเพิ่มเติมดังต่อไปนี้ว่า สำหรับ x_1, x_2, y ใด ๆ ใน $\mathbb{R}$ ถ้า (x_1, y) และ (x_2, y) เป็นสมาชิกของ f แล้ว $x_1 = x_2$ เราจะเรียก f ว่า **ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก** A **ไปยัง** B (one-to-one function from A into B)

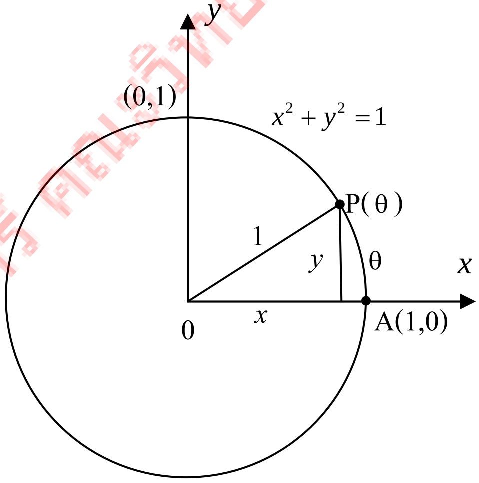
ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B แล้วเราสามารถนิยามฟังก์ชัน $f^{-1} : B \to A$ ได้ดังนี้ $f^{-1}(y) = x$ ก็ต่อเมื่อ $y = f(x)$ เราเรียกฟังก์ชัน f^{-1} ว่า ผกผัน (inverse) ของ f รูป 0.1 แสดงให้เห็นถึงลักษณะของกราฟของผกผันของฟังก์ชัน f ซึ่งจะสมมาตรกับกราฟของ f ตามแนวเส้นตรง $y = x$



รูป 0.1

0.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

พิจารณาวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ และรัศมีเท่ากับ 1 หน่วย สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ เราจะกำหนดจุด $P(\theta)$ ลงบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยดังนี้ จากตำแหน่งของจุด $A(1,0)$ วัดระยะทางไปตามเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยนี้ให้เท่ากับ $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเมื่อ $\theta > 0$ และในทิศทางตามเข็มนาฬิกาเมื่อ $\theta < 0$ ดังรูป 0.2



รูป 0.2

เนื่องจากรัศมีของวงกลมเท่ากับ 1 เราได้ว่ามุมที่เส้นตรง OP ทำกับเส้นตรง OA เท่ากับ θ เรเดียน ถ้าให้ (x, y) เป็นพิกัดของจุด $P(\theta)$ แล้ว เราจะนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้

$$\sin\theta = y; \qquad\qquad \cos\theta = x;$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{เมื่อ} \quad x \neq 0\,; \qquad \csc\theta = \frac{1}{y} \quad \text{เมื่อ} \quad y \neq 0\,;$$

$$\sec\theta = \frac{1}{x} \quad \text{เมื่อ} \quad x \neq 0\,; \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad \text{เมื่อ} \quad y \neq 0$$

จากการนิยามข้างต้น เราได้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันทั้งหกดังนี้

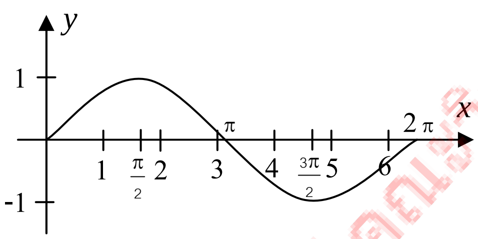
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos\theta \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \sin\theta \neq 0$$

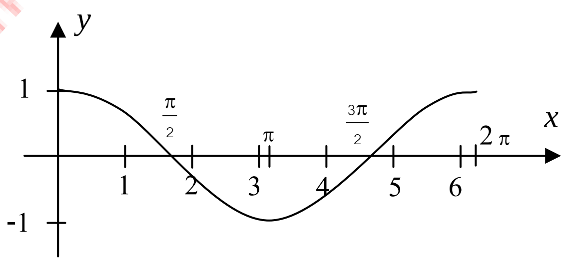
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \sin\theta \neq 0$$

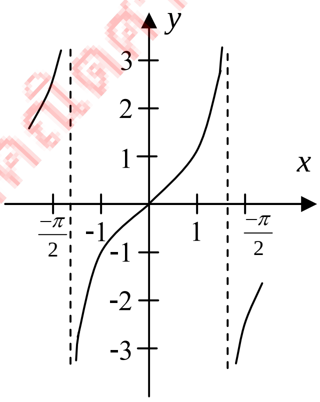
จากสมบัติทางเรขาคณิตของวงกลมหนึ่งหน่วย เราจะเห็นว่ามีค่าของ θ หลายค่าด้วยกันที่ทำให้การหาค่าของ $\sin\theta$, $\cos\theta$ และ $\tan\theta$ เป็นไปได้อย่างง่ายดายเช่น เมื่อ $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ หรือ $\frac{3\pi}{2}$ เป็นต้น และค่าต่าง ๆ เหล่านี้มีส่วนช่วยในการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ รูป 0.3 - รูป 0.8 คือกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชัน



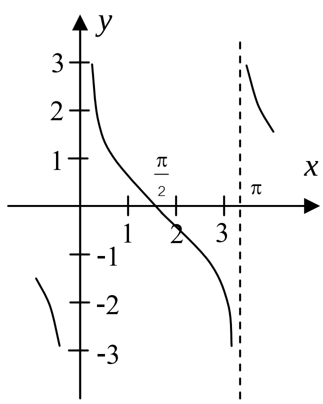
รูป 0.3 : กราฟของ $y = \sin x$



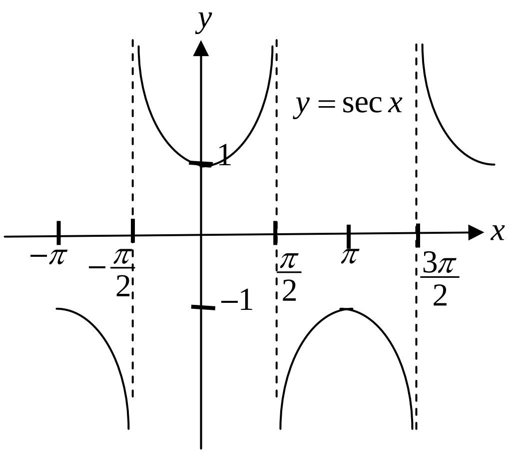
รูป 0.4 กราฟของ $y = \cos x$



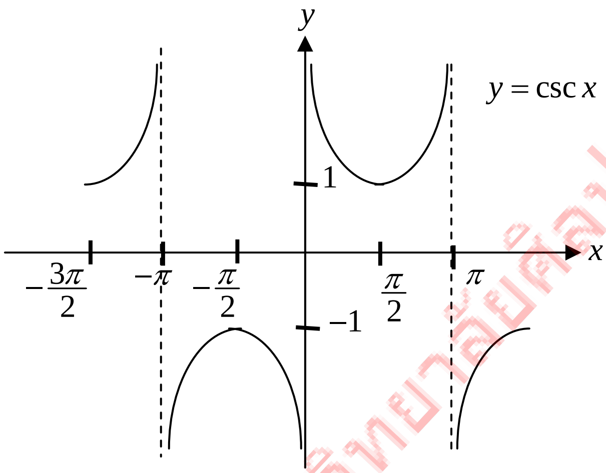
รูป 0.5 กราฟของ $y = \tan x$



รูป 0.6 กราฟของ $y = \cot x$



รูป 0.7 กราฟของ $y=\sec x$



รูป 0.8 กราฟของ $y=\csc x$

ตาราง 0.1 แสดงโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 6 ฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y=\sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$y=\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$y=\tan x$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{(2n+1)}{2}\pi : n\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$
$y=\csc x$	$\mathbb{R}-\{n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
$y=\sec x$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{(2n+1)}{2}\pi : n\in\mathbb{Z}\right\}$	$(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$
$y=\cot x$	$\mathbb{R}-\{n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$

ตาราง 0.1

ต่อไปนี้เป็นเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่นำไปใช้บ่อย ๆ สำหรับจำนวนจริง θ และ β ใด ๆ

1. $\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\cos(-\theta)=\cos\theta$
2. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$, $\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$
3. $\sin(\theta\pm\beta)=\sin\theta\cos\beta\pm\cos\theta\sin\beta$

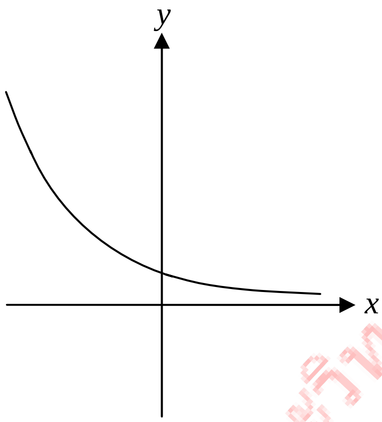
   $\cos(\theta\pm\beta)=\cos\theta\cos\beta\mp\sin\theta\sin\beta$

4. $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

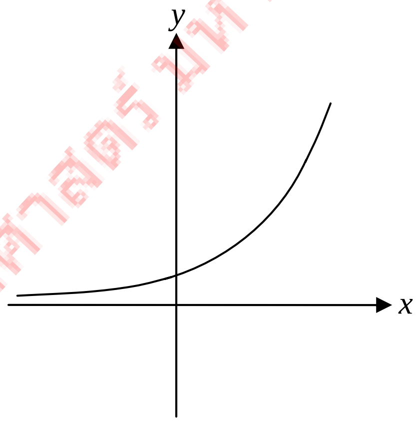
$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 1 - 2\sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1\end{aligned}$$

0.3 ฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม

ให้ $a>0$ และ $a \neq 1$ แล้ว เราเรียกฟังก์ชัน $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ ที่นิยามโดย $f(x)=a^x$ ว่า **ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง** (exponential function) กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลังมีอยู่ด้วยกันสองลักษณะขึ้นอยู่กับค่าของ a รูป 0.9 และ รูป 0.10 แสดงกราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลังที่นิยามโดย $f(x)=a^x$ เมื่อ $0<a<1$ และ $a>1$ ตามลำดับ



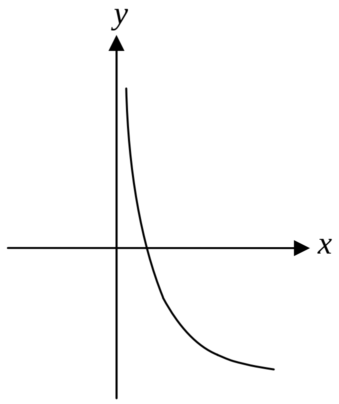
รูป 0.9 $f(x)=a^x;\ 0<a<1$



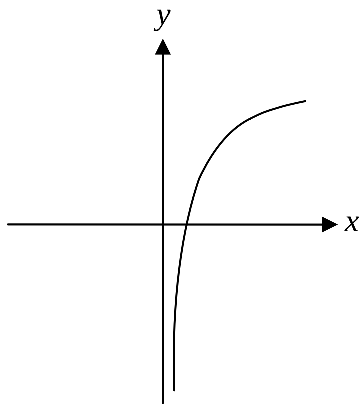
รูป 0.10 $f(x)=a^x;\ a>1$

จากสมบัติของเลขยกกำลังเราได้ว่า ฟังก์ชันเลขชี้กำลังที่นิยามโดย $f(x)=a^x$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ดังนั้นจะมีผกผัน $f^{-1}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ซึ่งนิยามโดย $f^{-1}(y)=x$ ก็ต่อเมื่อ $y=a^x$ และเราจะเขียนแทน $f^{-1}(y)=x$ ด้วย $x=\log_a y$ นั่นคือ $x=\log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $y=a^x$

ให้ $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ นิยามโดย $h(x)=\log_a x$ เราเรียกฟังก์ชัน h ว่า **ฟังก์ชันลอการิทึม** (logarithmic function) ซึ่งจากที่กล่าวมาข้างต้น ฟังก์ชันลอการิทึมคือผกผันของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง จากความสมมาตรของกราฟของฟังก์ชัน f และ f^{-1} ตามแนวเส้นตรง $y=x$ ดังได้กล่าวมาแล้วนั้น ทำให้เราทราบว่ากราฟของฟังก์ชันลอการิทึมมีอยู่ด้วยกันสองลักษณะขึ้นอยู่กับค่าของ a เช่นกัน ดังแสดงในรูป 0.11 และ รูป 0.12



รูป 0.11 $f(x)=\log_a x$; $0<a<1$



รูป 0.12 $f(x)=\log_a x$; $a>1$

ในกรณีที่ $a=e$ (e เป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่งมีค่าประมาณ 2.71828) เราจะเขียนแทนจำนวนจริง $\log_a x$ ซึ่งเท่ากับ $\log_e x$ ด้วย $\ln x$ และจะเรียกว่า **ลอการิทึมธรรมชาติ** (natural logarithm) ของ x

ต่อไปนี้เป็นสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม ที่จะนำไปใช้บ่อย ๆ ให้ $a, b>0$ โดยที่ $a\neq 1$ และ $b\neq 1$ และให้ $x, y\in\mathbb{R}$

1. $a^{x+y}=a^x a^y$
2. $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$
3. $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$

ถ้า $x, y>0$ แล้ว

4. $\log_a\left(x^y\right)=y\log_a x$
5. $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$
6. $\log_a\dfrac{x}{y}=\log x_a-\log_a y$
7. $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_a b}$

ภาคผนวก 2

เฉลยแบบฝึกหัด

บทที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่อง

แบบฝึกหัด 1.1

ข้อ	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$f(a)$	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
1	0	2	หาไม่ได้	2	0	$+\infty$
2	3	3	3	3	$+\infty$	0
3	$-\infty$	1	หาไม่ได้	1	$+\infty$	$+\infty$
4	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	หาไม่ได้	0	-1
5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	หาไม่ได้	2	2
6	$+\infty$	$-\infty$	หาไม่ได้	หาไม่ได้	2	0

แบบฝึกหัด 1.2

1) 1.1 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $0 < |x-3| < \delta$ แล้ว จะได้

$$|4x-5-7| = |4x-12| = 4|x-3| < 4\delta = \varepsilon$$

1.2 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $\delta = \varepsilon$

2) 2.1 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $\delta = \varepsilon^2$ ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $4 < x < 4+\delta$ แล้ว จะได้

$$\left|\sqrt{x-4}-0\right| = \sqrt{x-4} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

2.2 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $\delta = \varepsilon^2$

2.3 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $\delta = \varepsilon$

2.4 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $\delta = \varepsilon$

3) 3.1 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $M=\frac{1}{\varepsilon}$ ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่ง $x>M$ แล้ว จะได้

$$\left|\frac{1}{x+2}-0\right|=\frac{1}{x+2}<\frac{1}{M+2}<\frac{1}{M}=\varepsilon$$

3.2 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $M=\frac{9}{2\varepsilon}$

3.3 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $M=\frac{1}{\varepsilon}$

3.4 กำหนดให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $M=\frac{2}{\varepsilon}$

4) 4.1 กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $\delta=\sqrt{\frac{1}{M}}$ ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่ง สอดคล้องกับอสมการ $0<|x-3|<\delta$ แล้ว จะได้

$$-\frac{1}{(x-3)^2}=-\frac{1}{|x-3|^2}<-\frac{1}{\delta^2}=-M$$

4.2 กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $\delta=\frac{1}{M}$

5) กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $\delta=\frac{1}{M}$

6) กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $\delta=\frac{1}{M}$

7) กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก เลือก N เป็นค่ามากสุดของ M และ 3

8) กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงบวก เลือก $N=\sqrt[3]{M}$

แบบฝึกหัด 1.3

1) 1.1	$\frac{1}{7}$	1.2	0
1.3	$\frac{4}{9}$	1.4	4
1.5	5	1.6	1
1.7	1	1.8	0
1.9	0	1.10	-4
2) 2.1	-28	2.2	-32
2.3	99	2.4	$-\frac{\sqrt{3}}{5}$

แบบฝึกหัด 1.4

1) 1.1 $-\infty$

1.2 $\sqrt{109}$

1.3 12

1.4 4

1.5 1

1.6 $\frac{4}{3}$

1.7 0

1.8 0

1.9 $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

1.10 $-\frac{\sqrt{6}}{6}$

1.11 $\sqrt{3}$

1.12 $+\infty$

1.13 $-\infty$

1.14 $+\infty$

1.15 $-\frac{1}{6}$

1.16 $+\infty$

1.17 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

1.18 0

2) $\lim_{t\to 0^-} g(t) = -2, \lim_{t\to 0^+} g(t) = 0, \lim_{t\to 0} g(t)$ หาไม่ได้

3) 3.1 2

3.2 $\frac{1}{2}$

3.3 0

3.4 $\frac{1}{2}$

3.5 3

3.6 $\frac{a}{b}$

แบบฝึกหัด 1.5

1) 1.1 1 และ 2

1.2 -1 และ 1

1.3 4

1.4 0

2) 2.1 ไม่สามารถนิยามค่าของ $f(0)$ เพื่อทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$ ได้

2.2 นิยาม $f(0)=2$

2.3 ไม่สามารถนิยามค่าของ $f(0)$ เพื่อทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$ ได้

2.4 นิยาม $f(0)=1$

3) $a+b=c+d+e$

4) ค่าของ a,b,c ทั้งหมดที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ คือ $a=k+1, b=k$ และ $c=\frac{2k+1}{4}$

เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

5) นิยามฟังก์ชัน f และ g โดยที่

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

และ

$$g(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$$

จะได้ว่าฟังก์ชัน f และ g ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$ แต่ฟังก์ชัน $f+g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=0$

6) ข้อแนะนำ พิจารณาฟังก์ชัน g ซึ่งนิยามโดย $g(x)=f(x)-x$

บทที่ 2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด 2.2

1) 1.1 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=2$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 2

1.2 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=5$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$

1.3 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=2$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 8

1.4 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=2$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{4}$

1.5 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=3$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ $-\frac{4}{9}$

1.6 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=3$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 1

1.7 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=2$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 4

1.8 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=0$ หาค่าไม่ได้

1.9 อนุพันธ์ของ f ที่ $x=0$ หาค่าไม่ได้

2) 2.1 $y+1=-6(x-1)$

2.2 $y-2=2(x-2)$

2.3 $y=2$

2.4 $y-4=-\frac{1}{3}(x+3)$

2.5 $y-1=2(x-3)$

2.6 $y-\frac{3}{2}=-2(x+1)$

2.7 $y-3=5(x-1)$

2.8 $y-\frac{5}{3}=\frac{5}{3}(x+1)$

2.9 $y+1=-\frac{1}{2}(x+1)$

2.10 $y+1=\frac{3}{5}(x-2)$

3) $a=4, b=-4$

4) $y+1=5(x-3)$

5) $y-3=-4(x+2)$

6) สมการเส้นสัมผัสกราฟ $y=x^2$ ที่ $x=1$ คือ $y-1=2(x-1)$

สมการเส้นสัมผัสกราฟ $xy=1$ ที่ $x=1$ คือ $y-1=-(x-1)$

สมการเส้นตรงทั้งสองไม่ได้ตั้งฉากกัน

7) $3+5a$

แบบฝึกหัด 2.3

1) 1.1 $4,0$ 　 1.2 $34,120$

1.3 $0,0$ 　 1.4 $\frac{8}{27},-\frac{8}{27}$

1.5 $6,-24$ 　 1.6 $-\frac{1}{4},\frac{3}{8}$

2) 2.1 36 　 2.2 4

2.3 123 　 2.4 $\frac{59}{49}$

2.5 4 　 2.6 $1,102$

2.7 24 　 2.8 104

3) $y+9=-9(x-2)$

4) $P(x)=3x^2-3x-5$

แบบฝึกหัด 2.4

1) 1.1 $\frac{dy}{dx}=20x^3(75x^8+2)$ 　 1.2 $\frac{dy}{dx}=\frac{2(2x+1)}{(x+1)^3}$

1.3 $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+3}{2}$ 　 1.4 $\frac{dy}{dx}=\frac{12(3x-2)}{((3x-2)^2+1)^2}$

2) 2.1 $\frac{dy}{dx}=4x^3+24x^2-64x$

2.2 $\frac{dy}{dx}=\frac{10(x^3-2x+4)^4((5x^2+1)(3x^2-2)-10x(x^3-2x-4))}{(5x^2+1)^6}$

$$=\frac{10(x^3-2x+4)^4(5x^4+13x^2-40x-2)}{(5x^2+1)^6}$$

2.3 $\dfrac{dy}{dx}=8x(2x^2+1)(8x^3-1)^3+72x^2(2x^2+1)^2(8x^3-1)^2$

2.4 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{40(8x-1)^4((3x-1)^3+1)-9(3x-1)^2(8x-1)^5}{((3x-1)^3+1)^2}$

$$=\frac{9(8x-1)^4(48x^3-63x^2+26x+1)}{((3x-1)^3+1)^2}$$

2.5 $\dfrac{dy}{dx}=15+\dfrac{2}{(x+1)^2}-8x$

2.6 $\dfrac{dy}{dx}=8(2x+1)(x^2+x)^7$

3) 3.1 $\dfrac{d(f\circ g)(x)}{dx}=4x(x^2-6)$

3.2 $\dfrac{d(f\circ g)(x)}{dx}=\dfrac{12(3x-2)}{((3x-2)^2+1)^2}$

3.3 $\dfrac{d(f\circ g)(x)}{dx}=-\dfrac{x+3}{(x+1)^3}$

3.4 $\dfrac{d(f\circ g)(x)}{dx}=10x^9$

3.5 $\dfrac{d(f\circ g)(x)}{dx}=4(x+1)(x^2+2x+2)$

4) 6

5) 21,-36

6) $f'(x^2)=\dfrac{x}{2}$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x\neq 0$

แบบฝึกหัด 2.5

1) 1.1 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}-\dfrac{x^{-\frac{4}{3}}}{3}+\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}+\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

1.2 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{x^2+9}-x(x+3)(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}}{x^2+9}$

1.3 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3+24x^2-24x^3}{2(2-3x)^{3/2}(1+4x^3)^{1/2}}$

1.4 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{3(2-x)^{2/3}}$

1.5 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{5}{3}(2-x)^{2/3}$

1.6 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{7}{2}(2-x)^{5/2}$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่ง $-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$

2) 2.1 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2+2}{6y+1}$

2.2 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4xy^3-12x^2-6x^2y^3+y}{6x^3y^2-x-6y-6x^2y^2}$

2.3 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2+x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}+6y}$

2.4 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x^2-y^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}}$

2.5 $\dfrac{dy}{dx} = 2x + \dfrac{x^2}{2(y-x^2)}$

2.6 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + \dfrac{2x}{(2x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}}{6y - \dfrac{y}{(2x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}}$

3) 3.1 -1

3.2 $\dfrac{1}{4}$

4) 0

5) $\dfrac{1}{2}$

6) $-\dfrac{1}{64}$

7) $\dfrac{1}{2}$

8) (-2,5), (-2,1)

9) $(0,0), (\frac{\sqrt[3]{2}}{3}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3})$

10) $(0,0), (\frac{1}{8}, -\frac{1}{16})$

11) $y+1 = -\frac{4}{5}(x-1)$

12) $(\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$

13) $L_1 : y = \frac{x}{\sqrt{3}}, L_2 : y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ หรือ $L_1 : y = -\frac{x}{\sqrt{3}}, L_2 : y = \frac{x}{\sqrt{3}}$

แบบฝึกหัด 2.6

1) 1.1 1

1.2 $\dfrac{1}{3}$

1.3 $\dfrac{1}{13}$

1.4 $\dfrac{1}{12}$

1.5 $\dfrac{1}{4}$

1.6 12

2) $13y = x + 16$

3) $12y - x + 12 = 0$

แบบฝึกหัด 2.7

1) 1.1 $\dfrac{6x^5+6x+1}{x^6+3x^2+1}$

1.2 $\dfrac{18x}{3x^2+4}$

1.3 $\dfrac{6(x^2+x+1)}{(x^2-1)(2x+1)}\ln^2\left(\dfrac{x^2-1}{2x+1}\right)$

1.4 $\dfrac{x^2+6x-1}{2(x^2+1)(x+3)}$

1.5 $3x+6x\ln x$

1.6 $\dfrac{x}{\ln 2}+2x\log_2 x$

1.7 $\dfrac{-2x^2}{(16-x^2)\ln 10}+\log(16-x^2)$

1.8 $\dfrac{\ln(1-x)}{x}-\dfrac{\ln x}{1-x}$

2) 2.1 $y=x-1$

2.2 $y=\dfrac{x}{e}$

2.3 $y=(1+\ln 1)(x-1)$

2.4 $y=2x-1$

3) 3.1 $(x^2+1)^x\left[\dfrac{2x^2}{x^2+1}+\ln(x^2+1)\right]$

3.2 $(x+1)^{2x-3}\left[\dfrac{2x-3}{x+1}+2\ln(x+1)\right]$

3.3 $(x^x)^2(2+2\ln x)$

3.4 $x^{x^2}(x+2x\ln x)$

3.5 $\sqrt{(x^2-1)(x^2+2)}\left[\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x}{x^2+2}\right]$

3.6 $(x^2+3x)(x^2+x+1)\sqrt{x^2-1}\left[\dfrac{2x+3}{x^2+3x}+\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{x}{x^2-1}\right]$

3.7 $(x^3+5x)x^{\sqrt{x}}\left[\dfrac{3x^2+5}{x^3+5x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right]$

3.8 $(2^x5^{x^2}7^{x^3})(\ln 2+2x\ln 5+3x^2\ln 7)$

3.9 $\dfrac{(x^3-1)^3(x^{10}+1)^4}{(2x+1)^5}\left[\dfrac{9x^2}{x^3-1}+\dfrac{40x^9}{x^{10}+1}-\dfrac{10}{2x+1}\right]$

3.10 $\dfrac{\sqrt{x^2+3}(x^2+1)^3}{(x^2-1)^4}\left[\dfrac{x}{x^2+3}+\dfrac{6x}{x^2+1}-\dfrac{8x}{x^2-1}\right]$

3.11 $\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}(x^2+x)}{\sqrt{x^2-1}(x^2-x+1)^2}\left[\dfrac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\dfrac{2x+1}{x^2+x}-\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{2(2x-1)}{x^2-x+1}\right]$

3.12 $\dfrac{3(x^2+x+1)^3(x^2+x)^2}{2(x^2-x+1)^3(x^2-x)^2}\left[\dfrac{3(2x+1)}{x^2+x+1}+\dfrac{2(2x+1)}{x^2+x}-\dfrac{3(2x-1)}{x^2-x+1}-\dfrac{2(2x-1)}{x^2-x}\right]$

แบบฝึกหัด 2.8

1) 1.1 $\dfrac{dy}{dx}=0$

1.2 $\dfrac{dy}{dx}=0$

1.3 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1.4 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1.5 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2^{\log_x 2}(\ln 2)^2}{x(\ln x)^2}$

1.6 $\dfrac{dy}{dx}=e^{x^2+x}(2x+1)$

1.7 $\dfrac{dy}{dx}=(2^{x^2+x})(\ln 2)(2x+1)$

1.8 $\dfrac{dy}{dx}=e^{x^2+x}(4x^2+2x+2)$

1.9 $\dfrac{dy}{dx}=4^x(x\ln 4+1)$

1.10 $\dfrac{dy}{dx}=e^{-3x}(-3x^2+2x+3)$

1.11 $\dfrac{dy}{dx}=2^{\ln(2x)}\dfrac{\ln 2}{x}$

1.12 $\dfrac{dy}{dx}=(x^3+3x)^{x^2+2}\left[\dfrac{(3x^2+3)(x^2+2)}{x^3+3x}+2x\ln(x^3+3x)\right]$

1.13 $\dfrac{dy}{dx}=(2x+1)\left[\dfrac{\ln 2}{2^{x^2+x}}-\dfrac{\ln 3}{3^{x^2+x}}\right],$

1.14 $\dfrac{dy}{dx}=5^{-x}\left(\ln 5\left(3^{x^2}-2^{x^2}\right)+2x\left(2^{x^2}\ln 2-3^{x^2}\ln 3\right)\right)$

2) 2.1 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$

2.2 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$

2.3 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

2.4 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

2.5 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=2^{\log_x 2}\dfrac{(\ln 2)^2}{x^2(\ln x)^3}\left[2+\ln x+\dfrac{(\ln 2)^2}{\ln x}\right]$

2.6 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^{x^2+x}\left[2+(2x+1)^2\right]$

2.7 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=(2^{x^2+x})(\ln 2)\left[2+(2x+1)^2\ln 2\right]$

2.8 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^{x^2+x}\left[8x+2+(4x^2+2x+2)(2x+1)\right]$

3) 3.1 $y=2x+1$

3.2 $y=2ex-e$

3.3 $y=\dfrac{x(e^2-1)+2}{e}$

3.4 $y=ex-e$

4) $y=ex$

แบบฝึกหัด 2.9

1) 1.1 $\dfrac{dy}{dx} = 8\cos(8x+3)$

1.2 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{x}{2})$

1.3 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sec(\sqrt{x-1})\tan(\sqrt{x-1})}{2\sqrt{x-1}}$

1.4 $\dfrac{dy}{dx} = -2x\csc(x^2+4)\cot(x^2+4)$

1.5 $\dfrac{dy}{dx} = -(3x^2-2)\csc^2(x^3-2x)$

1.6 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2\sec^2(\sqrt[3]{5-6x})}{(\sqrt[3]{5-6x})^2}$

1.7 $\dfrac{dy}{dx} = -6x\sin(3x^2)+18\tan^2(6x)\sec^2(6x)$

1.8 $\dfrac{dy}{dx} = -3\sin(6x)-2e^{-2x}\cos(e^{-2x})$

1.9 $\dfrac{dy}{dx} = -5x^2\csc(5x)\cot(5x)+2x\csc(5x)$

1.10 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}\csc^2\left(\dfrac{1}{x}\right)+\cot\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1.11 $\dfrac{dy}{dx} = \left(\tan x\sec^3 x\right)\left(3\tan^2 x+2\sec^2 x\right)$

1.12 $\dfrac{dy}{dx} = \sec^2(4x)\left[8x^3\tan(4x)+3x^2\right]$

1.13 $\dfrac{dy}{dx} = 5\left(\sin(5x)-\cos(5x)\right)^4\left(5\cos(5x)+5\sin(5x)\right)$

1.14 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

1.15 $\dfrac{dy}{dx} = -9\cot^2(3x+1)\csc^2(3x+1)$

1.16 $\dfrac{dy}{dx} = -2(\sin(2x))e^{\cos(2x)}$

1.17 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{1-\sin(4x)}$

1.18 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sec(2x)}{\tan(2x+1)}\left[2\tan(2x)-2\dfrac{\sec^2(2x+1)}{\tan(2x+1)}\right]$

1.19 $\dfrac{dy}{dx} = e^{-3x}\left[\dfrac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-3\tan\sqrt{x}\right]$

1.20 $\dfrac{dy}{dx} = 4\csc(\cot(4x))\cot(\cot(4x))\csc^2(4x)$

1.21 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\tan(2x)}{\ln(\sec(2x))}$

1.22 $\dfrac{dy}{dx} = -6(\tan(2x)-\sec(2x))^3\sec(2x)$

2) 2.1 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 6\sec^2(3x)\left[3\sec^2(3x) + 6\tan^2(3x)\right]$

2.2 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 150\cot(5x)\csc^2(5x)$

2.3 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x\cos x + \sin x$

2.4 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \csc x \sec x(\tan x - \cot x)$

2.5 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left[4\sqrt{\tan x}\tan x - \dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}\right]\dfrac{\sec^2 x}{4\tan x}$

2.6 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^{\sin x}\left[\cos^2 x - \sin x\right]$

2.7 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -18\sec^2(3x)$

2.8 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 16(2x+3)^2\left[-4(2x+3)^4\sin(2x+3)^4 + 3\cos(2x+3)^4\right]$

3) 3.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin y}{1 - x\cos y}$

3.2 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$

3.3 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x\cos y - e^y}{xe^y + e^x\sin y}$

3.4 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin(x-y) - y\sin x}{\sin(x-y) - \cos x}$

แบบฝึกหัด 2.10

1) 1.1 $\dfrac{\pi}{4}$

1.2 $-\dfrac{\pi}{2}$

1.3 0

1.4 $\dfrac{\pi}{4}$

1.5 $\dfrac{1}{2}$

1.6 0

1.7 $\dfrac{4}{5}$

1.8 $\dfrac{4}{3}$

2) 2.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{1+(3x-5)^2}$

2.2 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

2.3 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

2.4 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$

2.5 $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x}\left[\dfrac{-2}{1+4x^2} - \cot^{-1}(2x)\right]$

2.6 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2x\sqrt{\sec^{-1}(3x)(9x^2-1)}}$

2.7 $\dfrac{dy}{dx} = x^2\left[\dfrac{2x^2}{1+x^4} + 3\tan^{-1}(x^2)\right]$

2.8 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\cos(2x)}{1+\sin^2(2x)}$

2.9 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-9(1+\cos^{-1}(3x))^2}{\sqrt{1-9x^2}}$

2.10 $\dfrac{dy}{dx}=x\left[\dfrac{1}{\sqrt{25x^2-1}}+2\sec^{-1}(5x)\right]$

2.11 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}\,\sin^{-1}(x^2)}$

2.12 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

2.13 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1+x^2}$

2.14 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}$

2.15 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-4}{x^2}\left[\dfrac{1}{x}-\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^3\left[1+\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}}\right]$

2.16 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-2x\tan^{-1}x}{(x^2+1)^2}$

2.17 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-e^x\cos(e^x)}{\sqrt{1-\sin^2(e^x)}}$

2.18 $\dfrac{dy}{dx}=e^{2x}\left[2\csc^{-1}(3x)-\dfrac{1}{x\sqrt{9x^2-1}}\right]$

2.19 $\dfrac{dy}{dx}=e^x\left[\cot^{-1}(3x^2)-\dfrac{6x}{1+9x^4}\right]$

2.20 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{(1+4x^2)\tan^{-1}(2x)}$

3) 3.1 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ye^x-\sin^{-1}y-2x}{\dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}}-e^x}$

3.2 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{y}{1+x^2y^2}-\dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{x}{1+x^2y^2}}$

แบบฝึกหัด 2.12

1) 1.1 $5\cosh(5x)$

1.2 $\dfrac{4x\sinh\sqrt{4x^2+3}}{\sqrt{4x^2+3}}$

1.3 $\dfrac{\sqrt{x}\,\text{sech}^2\sqrt{x}+\tanh\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

1.4 $-\text{cosech}(e^{4x})\left(4xe^{4x}\coth(e^{4x})-1\right)$

1.5 $\dfrac{-2x\,\text{sech}(x^2)\left((x^2+1)\tanh(x^2)+1\right)}{(x^2+1)^2}$

1.6 $\dfrac{(\coth x)(\csc^2 x)-(\cot x)(\text{cosech}^2 x)}{\cot^2 x}$

1.7 $-(\text{cosech}(x^3))(\coth(x^3))(3x^2)$

1.8 $2x\cosh(x^2+1)$

1.9 $-3(\text{cosech}^3 x)(\coth x)$

1.10 $-6(\text{sech}^2(3x))(\tanh(3x))$

1.11 $2\tanh(2x)$

1.12 $\dfrac{\operatorname{sech}^2 x}{1+\tanh^2 x}$

1.13 $2x\coth(2x)-2x^2\operatorname{cosech}^2(2x)$

1.14 $e^{3x}(3\coth x-\operatorname{cosech}^2 x)$

1.15 $\dfrac{-5}{2}\sqrt{\operatorname{sech}(5x)}\tanh(5x)$

1.16 $\dfrac{-\cosh x}{(\sinh x+1)^2}$

1.17 $\dfrac{-\cosh(x+1)}{\sinh^2(x+1)}$

1.18 $\dfrac{2\sinh x}{(1-\cosh x)^2}$

1.19 $-2x\coth(x^2)$

1.20 $-(\csc^2 x)(\cosh(\cot x))$

2) 2.1 $\dfrac{y(e^x-\cosh(xy))}{x\cosh(xy)-e^x}$

2.2 $\dfrac{2x\tanh y}{\frac{1}{y}-x^2\operatorname{sech}^2 y}$

บทที่ 3 การประยุกต์ของอนุพันธ์

แบบฝึกหัด 3.1

1) 1.1 0

1.2 -1, 0, 1

1.3 -1, $-\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, 1

1.4 $-3\sqrt{3}$, -3, 0, 3, $3\sqrt{3}$

1.5 1

1.6 1

2) 2.1 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [-3,1] คือ 5 เกิดขึ้นที่ $x=0$ และ -3

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [-3,1] คือ -3 เกิดขึ้นที่ $x=-2$ และ 1

2.2 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [-1,8] คือ 1 เกิดขึ้นที่ $x=0$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [-1,8] คือ -3 เกิดขึ้นที่ $x=8$

2.3 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [-1,1] คือ 1 เกิดขึ้นที่ $x=0$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [-1,1] คือ cos(1) เกิดขึ้นที่ $x=-1$ และ 1

2.4 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [-2,2] คือ $\dfrac{16}{3\sqrt{3}}$ เกิดขึ้นที่ $x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ และ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [-2,2] คือ 0 เกิดขึ้นที่ $x=-2$,0 และ 2

2.5 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [-2,5] คือ 5 เกิดขึ้นที่ $x=-1$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [-2,5] คือ -1 เกิดขึ้นที่ $x = 5$

2.6 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [-2,2] คือ 8 เกิดขึ้นที่ $x = 2$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [-2,2] คือ 0 เกิดขึ้นที่ $x = 0$

2.7 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[-1, \frac{1}{2}]$ คือ 0 เกิดขึ้นที่ $x = 0$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[-1, \frac{1}{2}]$ คือ $-\frac{1}{2}$ เกิดขึ้นที่ $x = -1$ และ $\frac{1}{2}$

2.8 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [2,11] คือ $\frac{1}{3}$ เกิดขึ้นที่ $x = 4$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [2,11] คือ -1 เกิดขึ้นที่ $x = 2$

แบบฝึกหัด 3.2

1) 1.1 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ และ $c = \frac{3}{2}$

1.2 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ และ $c = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ หรือ $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$

1.3 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ และ $c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

1.4 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ เนื่องจาก $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ และ $0 \in [-1,1]$

1.5 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ เนื่องจาก $f(1) \neq f(4)$

1.6 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ เนื่องจาก f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และ $1 \in [-2,2]$

1.7 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ เนื่องจาก $f'(-1)$ หาค่าไม่ได้ และ $-1 \in [-4,2]$

1.8 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ และ $c = \frac{\pi}{4}$ หรือ $\frac{5\pi}{4}$

1.9 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ เนื่องจาก $f(2) \neq f(4)$

1.10 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทโรลล์ เนื่องจาก $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ และ $0 \in [-1,1]$

2) 2.1 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัชฌิม และ $c = 1$

2.2 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัชฌิม เนื่องจาก f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$ และ $0 \in [-1,1]$

2.3 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัชฌิม และ $c = (1/4)^{\frac{1}{3}}$

2.4 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัชฌิม และ $c = \dfrac{7-\sqrt{61}}{3}$

2.5 f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัชฌิม และ $c = -1+\sqrt{2}$

2.6 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัชฌิม เนื่องจาก $f'(3)$ หาค่าไม่ได้ และ $3 \in [-1,4]$

2.7 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัชฌิม เนื่องจาก $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ และ $0 \in [-8,8]$

2.8 f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัชฌิม เนื่องจาก f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$ และ $1 \in [0,2]$

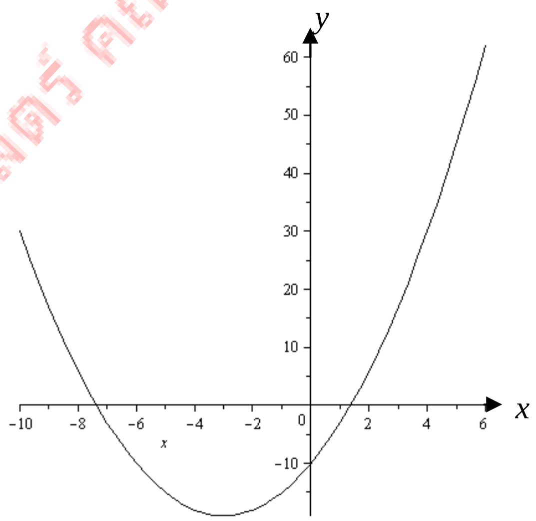
3) 3.1 ข้อแนะนำ: สำหรับ $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ ให้ $f(t) = \tan t$ สำหรับ $t \in [0,x]$

3.2 ข้อแนะนำ: สำหรับ $x > 0$ ให้ $f(t) = \arctan t$ สำหรับ $t \in [0,x]$

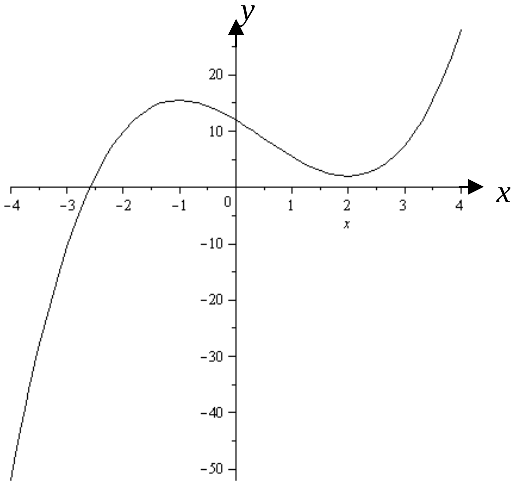
4) ข้อแนะนำ: ให้ใช้ทฤษฎีบท 3.2.7 กับฟังก์ชัน f และ ทฤษฎีบท 3.1.6 กับฟังก์ชัน f'

แบบฝึกหัด 3.3

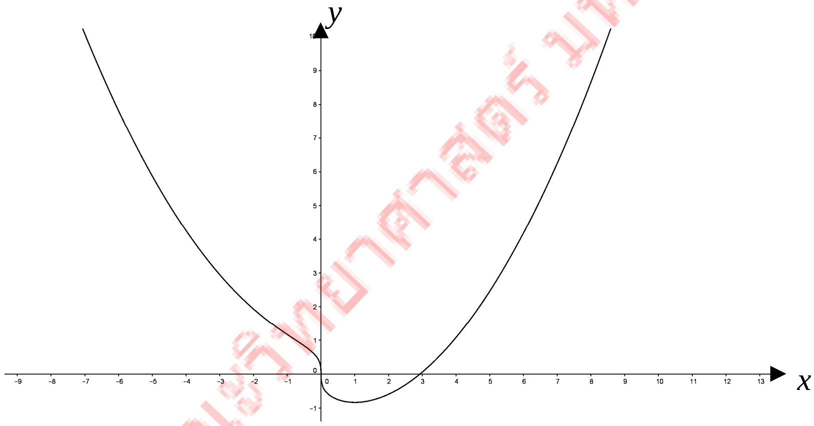
4) 4.1 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-3,\infty)$ *และ* f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty,-3]$



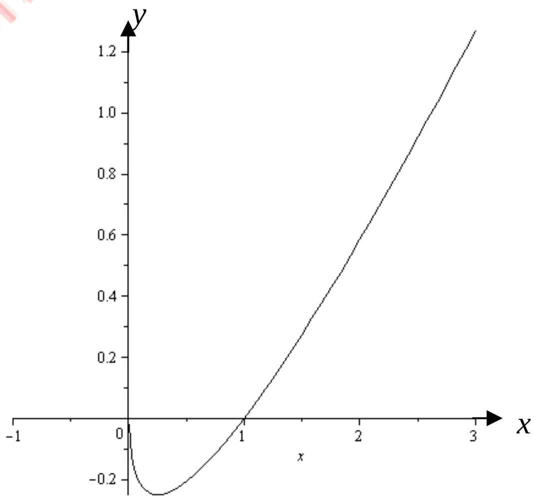
4.2 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,-1]$ และ $[2,\infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-1,2]$



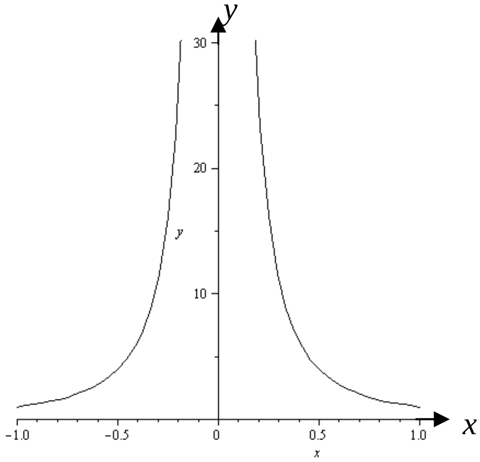
4.3 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[1,\infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty,1]$



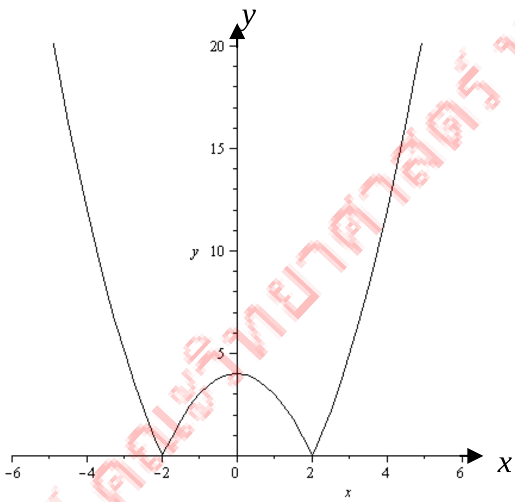
4.4 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[\frac{1}{4},\infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0, \frac{1}{4}]$



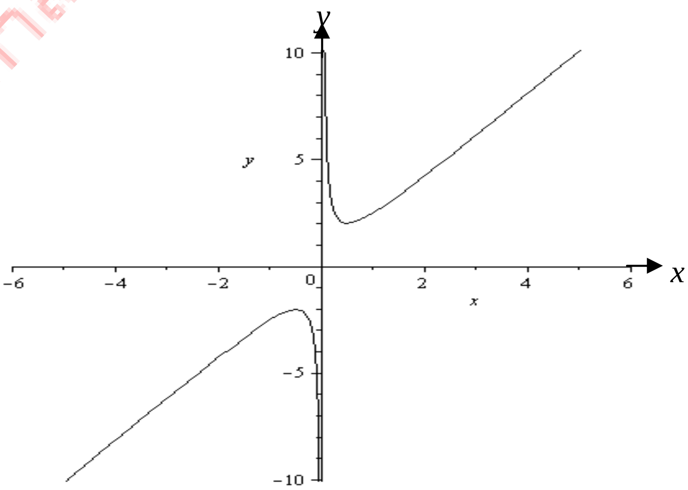
4.5 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,0)$ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0,\infty)$



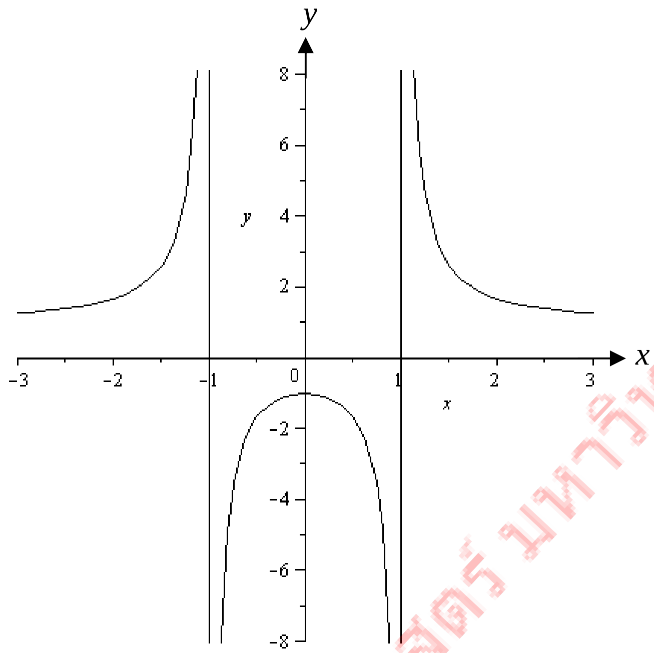
4.6 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-2,0]$ และ $[2,\infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty,-2]$ และ $[0,2]$



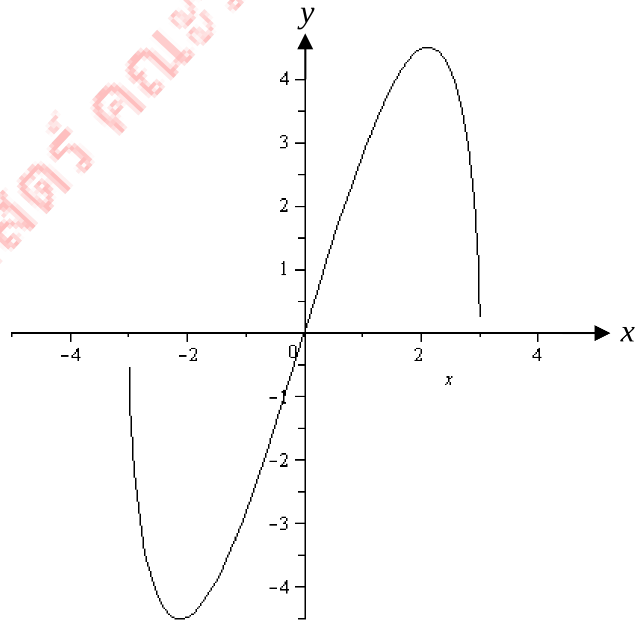
4.7 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ และ $[\frac{1}{2},\infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-\frac{1}{2},0)$ และ $(0,\frac{1}{2}]$



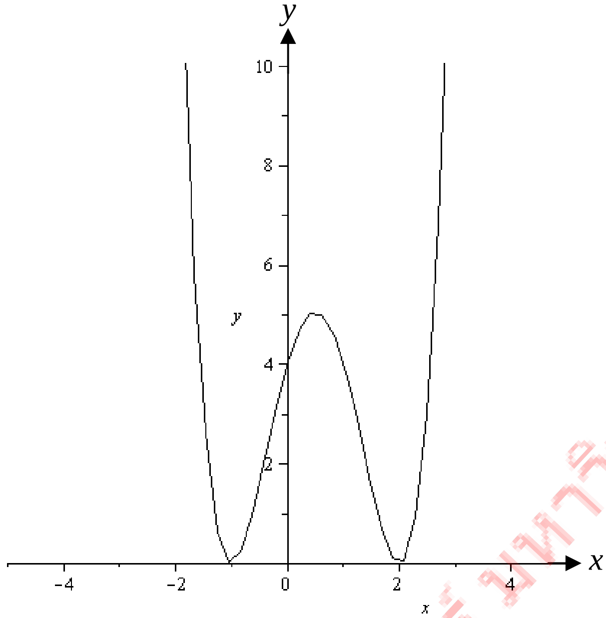
4.8 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,-1)$ และ $(-1,0]$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0,1)$ และ $(1,\infty)$



4.9 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}]$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-3\ ,-\frac{3}{\sqrt{2}}]$ และ $[\frac{3}{\sqrt{2}},3]$



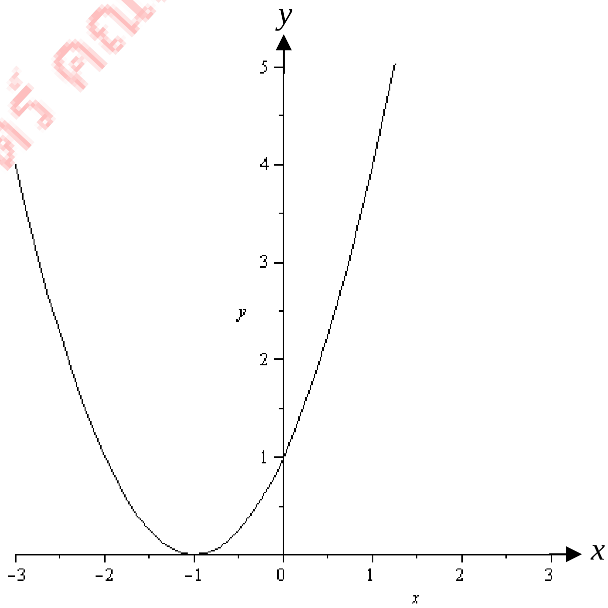
4.10 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-1,\frac{1}{2}]$ และ $[2,\infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty,-1]$ และ $[\frac{1}{2},2]$



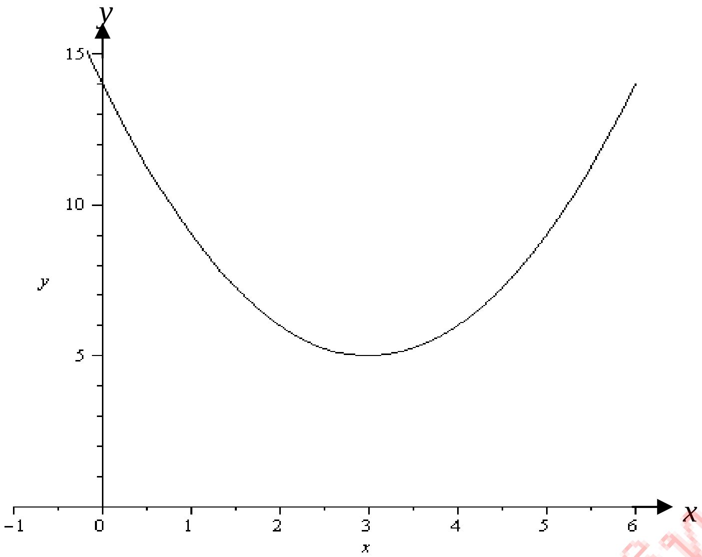
5) $a=3$

6) $x<25$

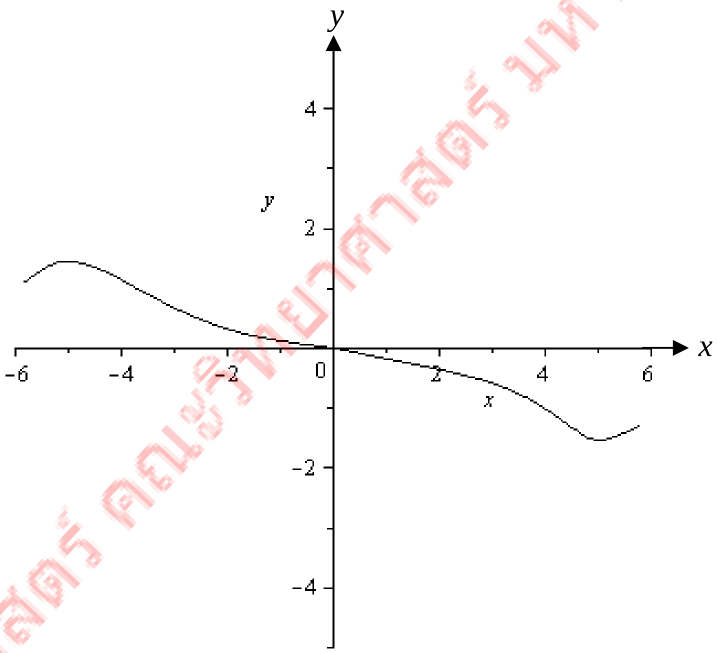
7) 7.1



7.2



7.3



8) 8.1 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-\frac{7}{8}) = \frac{129}{16}$ f ไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

8.2 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ f (-2) = 29 ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(\frac{5}{3}) = -\frac{548}{27}$

8.3 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ f (0) = 1 ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ f (2) = f (-2) = -15

8.4 f ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ f (-1) = -3

8.5 f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์

8.6 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-1) = -4$ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(1) = 4$

8.7 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f((2n-1)\pi+\frac{\pi}{6}) = (2n-1)\pi+\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(2n\pi-\frac{\pi}{6}) = 2n\pi-\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

8.8 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-\sqrt{3}) = \sqrt[3]{6\sqrt{3}}$ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(\sqrt{3}) = \sqrt[3]{-6\sqrt{3}}$

8.9 f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์

8.10 ค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ $f(-2) = f(2) = 16$

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f(-2\sqrt{3}) = f(2\sqrt{3}) = f(0) = 0$

9) $a=\frac{3}{4}, b=0, c=-\frac{9}{4}, d=\frac{1}{2}$

10) $a=1, b=0, c=-8, d=0, e=2$

แบบฝึกหัด 3.4

3) 3.1 f เป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty,1]$ เป็นโค้งหงายบน $[1,\infty)$ จุด (1,1) เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

3.2 f เป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty,3]$ เป็นโค้งหงายบน $[3,\infty)$ จุด (3,-24) เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

3.3 f เป็นโค้งคว่ำบน $(-1,\infty)$ เป็นโค้งหงายบน $(-\infty,-1)$ f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า

3.4 f เป็นโค้งคว่ำบน $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ เป็นโค้งหงายบน $\left[-\frac{1}{2},\infty\right)$ จุด $(-\frac{1}{2},0)$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

3.5 f เป็นโค้งคว่ำบน $[2,\infty)$ เป็นโค้งหงายบน $(-\infty,2]$ จุด (2,0) เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

3.6 f เป็นโค้งคว่ำบน [1,3] เป็นโค้งหงายบน $(-\infty,1]$ และ $[3,\infty)$

จุด (3,3) และจุด $(1,\frac{5}{3})$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

3.7 f เป็นโค้งคว่ำบน [0,1] เป็นโค้งหงายบน $(-\infty,0]$ และ $[1,\infty)$

จุด (0,0) และจุด (1,-1) เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

3.8 f เป็นโค้งคว่ำบน $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right]$ และ $[0,\sqrt{2}]$ เป็นโค้งหงายเมื่อบน $[-\sqrt{2},0]$ และ $[\sqrt{2},\infty)$ จุด (0,0) , $(-\sqrt{2},28\sqrt{2})$ และ $(\sqrt{2},-28\sqrt{2})$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

4) 4.1 จุดวิกฤตคือ $-\frac{2}{3}$ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $\left[-\frac{2}{3},\infty\right)$ เป็นฟังก์ชันลดบน $\left[-1,-\frac{2}{3}\right]$

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ $f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ f เป็นโค้งหงายบน $[-1,\infty)$ และ f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า

4.2 จุดวิกฤตคือ 0 และ 2 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty,0]$ และ $[2,\infty)$ เป็นฟังก์ชันลดบน $[0,2]$

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ f(2) = $\frac{5}{3}$ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ f(0) = 3

f เป็นโค้งหงายบน $[1,\infty)$ f เป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty,1]$ จุดเปลี่ยนความเว้าคือ $\left(1,\frac{7}{3}\right)$

4.3 จุดวิกฤตคือ 0, 1, 2 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน [0,1] เป็นฟังก์ชันลดบน [1,2]

f ไม่มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ f (1) = 1

f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า f เป็นโค้งคว่ำบน [0,2]

4.4 จุดวิกฤตคือ -1, 0, 1 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[-1,0]$ และ $[1,\infty)$

f เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty,-1]$ และ $[0,1]$ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ f (-1) = f (1) = 0

f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ f (0) = 1 f เป็นโค้งคว่ำบน $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ f เป็นโค้งหงายบน $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ และ $\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$ จุดเปลี่ยนความเว้าคือ $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}\right)$ และ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}\right)$

4.5 จุดวิกฤตคือ 0 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[0,\infty)$ เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty,0]$

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ f(0) = 3 f ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

f เป็นโค้งคว่ำบน $\mathbb{R}$ f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า

4.6 จุดวิกฤตคือ 0,1 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[1,\infty)$ เป็นฟังก์ชันลดบน $[0,1]$

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ f(1) = -2 f ไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า f เป็นโค้งหงายบน $[0,\infty)$

4.7 f ไม่มีจุดวิกฤต f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $\mathbb{R}-\{1\}$ f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์

f เป็นโค้งคว่ำบน $(1,\infty)$ f เป็นโค้งหงายบน $(-\infty,1)$ f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า

4.8 จุดวิกฤตคือ 2 และ -2 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[2,\infty)$ และ $(-\infty,-2]$ f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ f เป็นโค้งคว่ำบน $\left(-\infty,-\sqrt{6}\right]$ และ $\left[2,\sqrt{6}\right]$ f เป็นโค้งหงายบน $\left[-\sqrt{6},-2\right]$ และ $\left[\sqrt{6},\infty\right)$ f มีจุดเปลี่ยนความเว้าคือ $\left(-\sqrt{6},-2\sqrt{3}\right)$ และ $\left(\sqrt{6},2\sqrt{3}\right)$

4.9 จุดวิกฤตคือ -1 f เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$

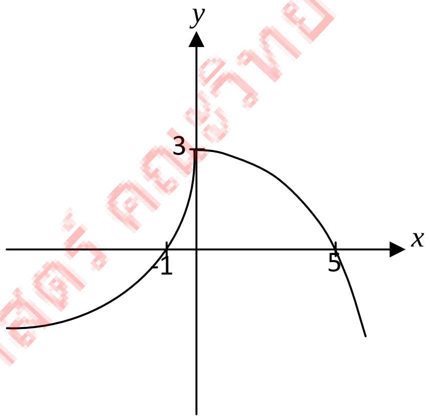
f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ f เป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty,-1]$ f เป็นโค้งหงายบน $[-1,\infty)$

f มีจุดเปลี่ยนความเว้าคือ (-1,0)

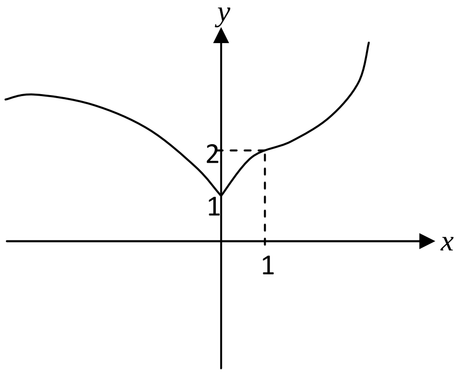
4.10 f มีจุดวิกฤตคือ $0,-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $\left[-\sqrt{3},0\right]$ และ $\left[\sqrt{3},\infty\right)$

f เป็นฟังก์ชันลดบน $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]$ และ $\left[0,\sqrt{3}\right]$ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์คือ f($\sqrt{3}$) = f($-\sqrt{3}$) = -9 f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์คือ f(0) = 0 f เป็นโค้งคว่ำบน [-1,1] f เป็นโค้งหงายบน $(-\infty,-1]$ และ $[1,\infty)$ f มีจุดเปลี่ยนความเว้าคือ (1,-5) และ (-1,-5)

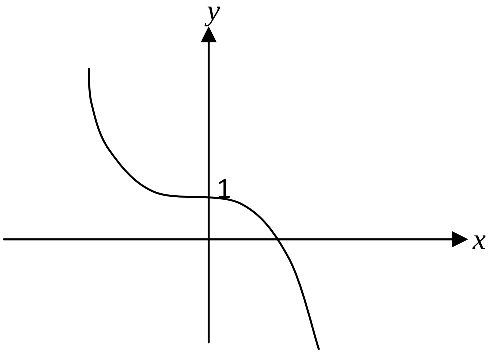
5) 5.1



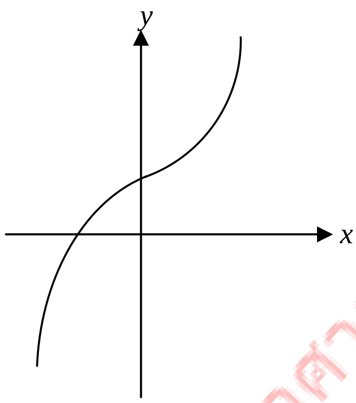
5.2



5.3



5.4



แบบฝึกหัด 3.5

1) 1.1 เส้นกำกับแนวนอนคือ $y = 0$

1.2 เส้นกำกับแนวนอนคือ $y = 3$

1.3 เส้นกำกับแนวนอนคือ $y = -1$ และ $y = 1$

1.4 เส้นกำกับแนวนอนคือ $y = \sqrt{7}$

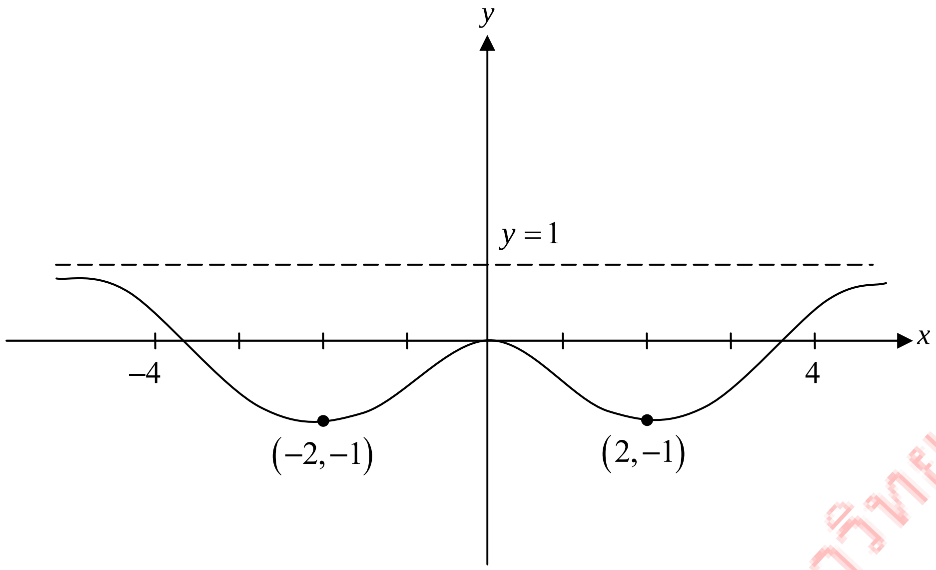
2) 2.1 เส้นกำกับแนวตั้งคือ $x = 4$

2.2 เส้นกำกับแนวตั้งคือ $x = 2$ และ $x = -2$

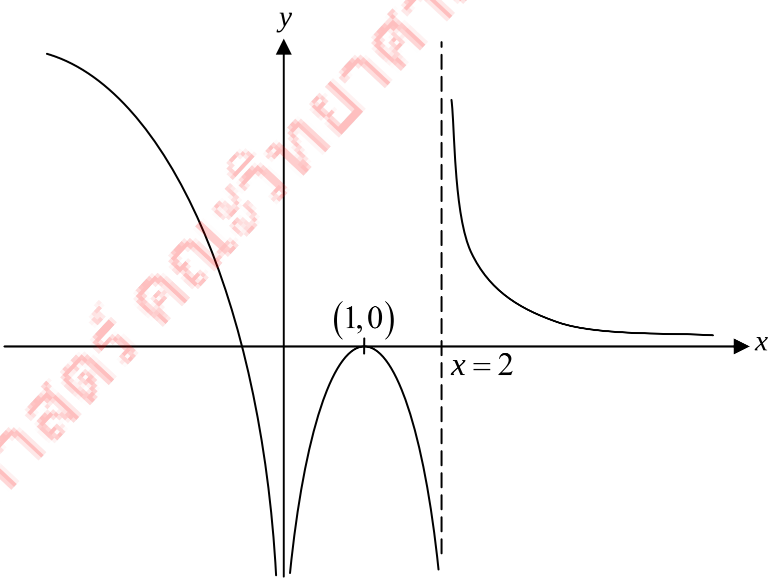
2.3 เส้นกำกับแนวตั้งคือ $x = -4$ และ $x = -1$

2.4 เส้นกำกับแนวตั้งคือ $x = 2$ และ $x = 3$

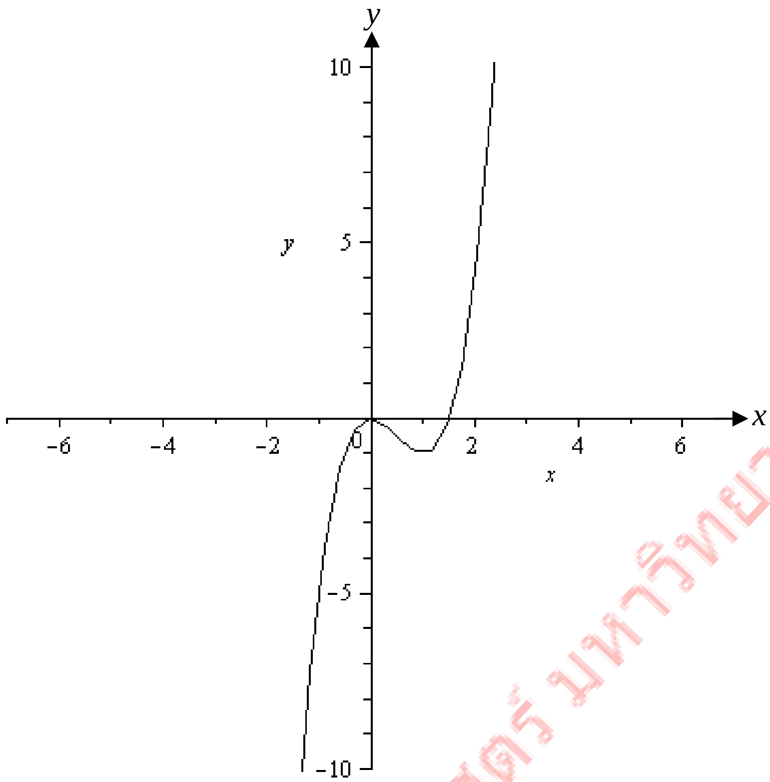
3) 3.1



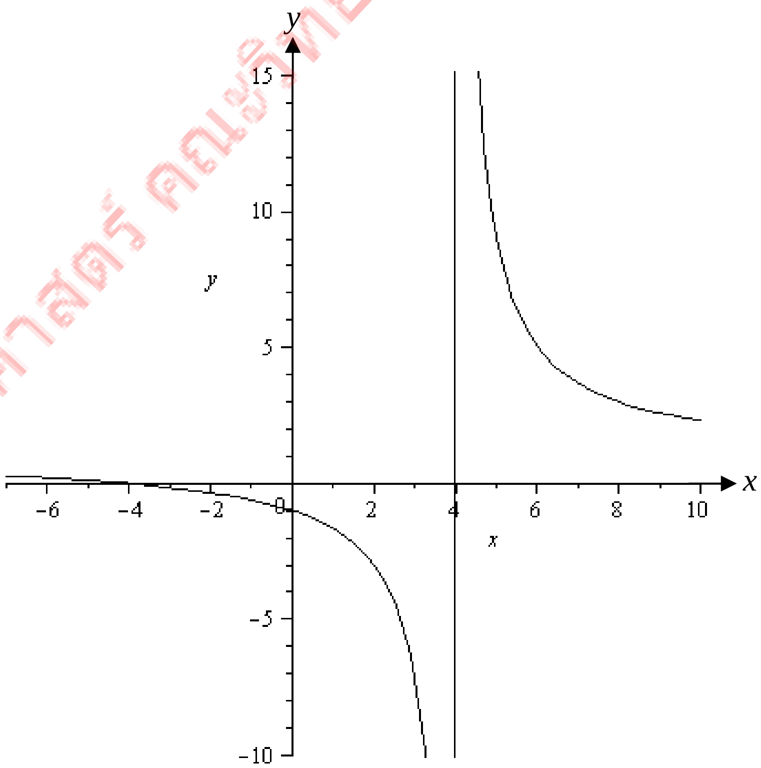
3.2



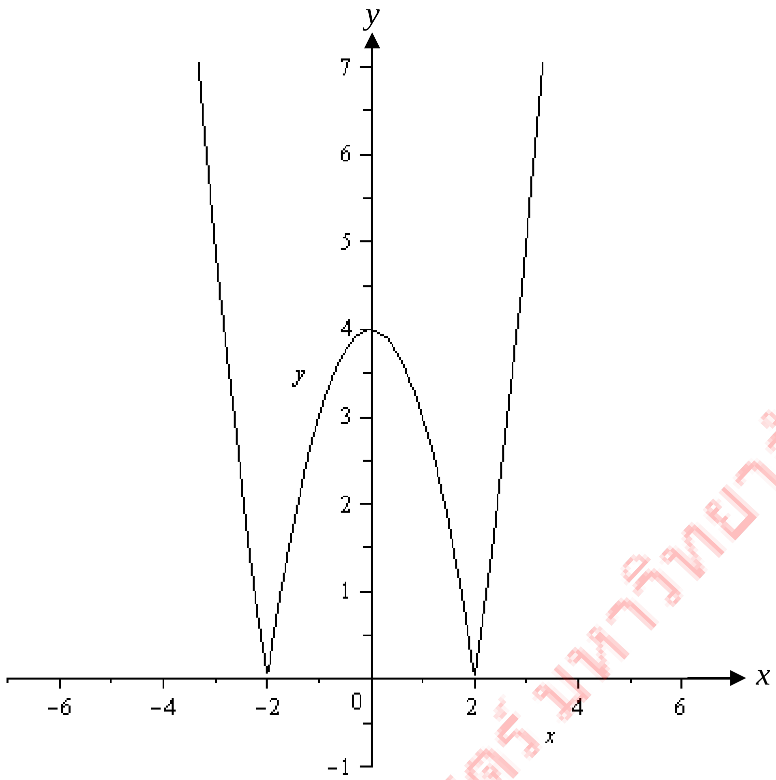
4) 4.1



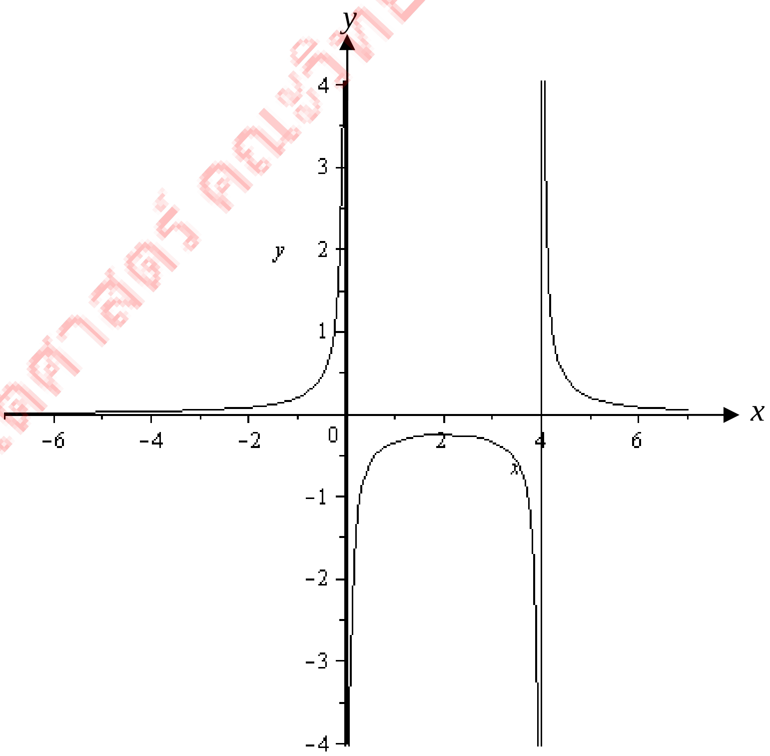
4.2



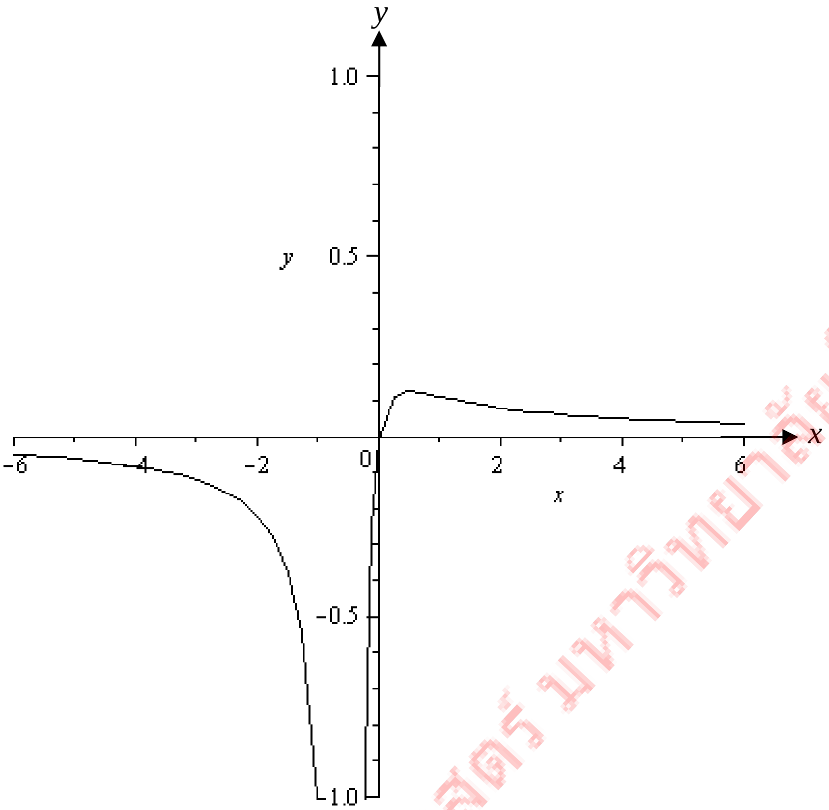
4.3



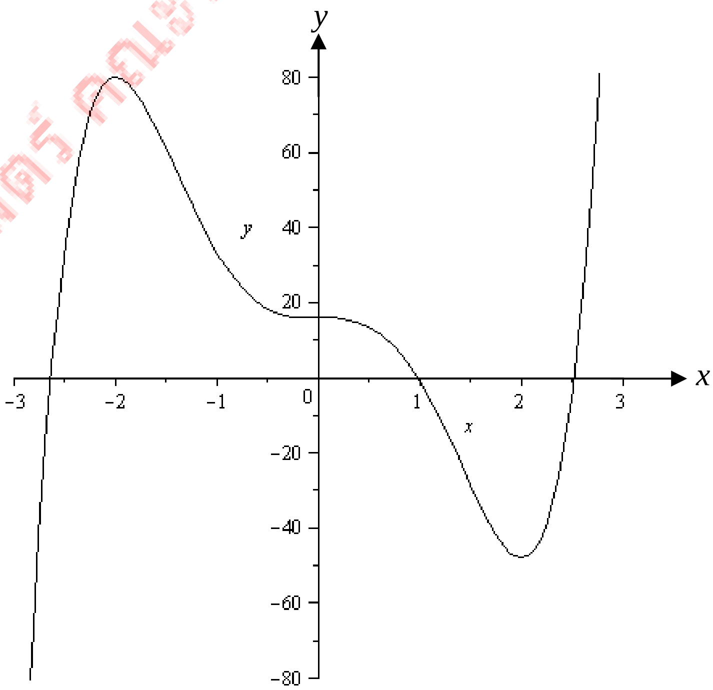
4.4



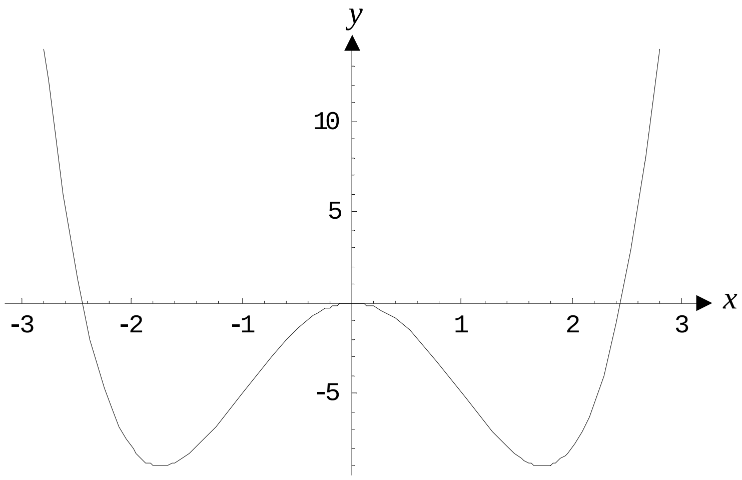
4.5



4.6



4.7



แบบฝึกหัด 3.6

1) จำนวนจริงบวกทั้งสองตัวที่ต้องการคือ $\sqrt{k}$

2) จำนวนจริงทั้งสองตัวที่ต้องการคือ 0 และ 36

3) คนงานมีประสิทธิภาพการทำงานสูงสุดเมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง

4) ความชันของกราฟมีค่าสูงสุด คือ -8 เมื่อ $x=1$ ความชันของกราฟมีค่าต่ำสุด คือ -20 เมื่อ $x=3$

5) ราคาขายที่ทำให้โรงงานมีรายได้มากที่สุดคือ 10 บาท

6) สี่เหลี่ยมนี้จะมีพื้นที่มากที่สุดเมื่อมีขนาดกว้าง 3 เซนติเมตร ยาว 4 เซนติเมตร

7) นักศึกษาแต่ละคนจะเสียค่าใช้จ่ายน้อยสุดเมื่อมีนักศึกษาเข้าค่ายครั้งละ 50 คน

8) ควรนำลวดมาขดเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่านั้น

9) สามเหลี่ยมนี้มีพื้นที่มากที่สุดเมื่อมุมระหว่างด้านที่ยาว a และ b เป็นมุมฉาก

10) $t=\dfrac{\pi}{3}$

แบบฝึกหัด 3.7

1) 1.1 Δy = -0.72   1.2 Δy = -0.019

1.3 Δy = -.0033

2) 2.1 $\Delta y=(6x+5)\Delta x+3(\Delta x)^2$, $dy=(6x+5)\Delta x$, $dy-\Delta y=-3(\Delta x)^2$

2.2 $\Delta y = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$, $dy = -\frac{\Delta x}{x^2}$, $dy - \Delta y = \frac{-(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)}$

2.3 $\Delta y = 0$, $dy = 0$, $dy - \Delta y = 0$

2.4 $\Delta y = 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, $dy = 3x^2\Delta x$, $dy - \Delta y = -3x(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3$

3) 3.1 $\Delta y \approx 0.06$ 3.2 $\Delta y \approx 11.2$

3.3 $\Delta y \approx 0.04$

4) ค่าคลาดเคลื่อนสูงสุดในการคำนวณพื้นที่ด้านหนึ่งมีค่าประมาณ 0.96π นิ้ว^2

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์มีค่าประมาณ 0.015

ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละของพื้นที่มีค่าประมาณ 1.5%

5) ค่าประมาณของปริมาตรที่เพิ่มขึ้นคือ 30 ลูกบาศก์นิ้ว

ปริมาตรที่เปลี่ยนไปที่แท้จริงเท่ากับ 30.301 ลูกบาศก์นิ้ว

6) ค่าประมาณของพื้นที่ผิวของบอลลูนที่ลดลงคือ 0.32π ตารางฟุต

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์คือ 0.02

ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละคือ 2%

7) ค่าประมาณของรัศมีที่เปลี่ยนไปคือ $\frac{0.2}{\pi}$ เซนติเมตร

8) ความหมายเชิงเรขาคณิตของ dA คือ ถ้าความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพิ่มขึ้นด้านละ Δs แล้ว พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้จะเพิ่มขึ้นโดยประมาณ $2s\Delta s$

ความหมายเชิงเรขาคณิตของ $\Delta A - dA$ คือ ถ้าความยาวของด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพิ่มขึ้นด้านละ Δs แล้วค่าที่แท้จริงของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้จะมากกว่าค่าประมาณของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ประมาณ $(\Delta s)^2$ พื้นที่ของนี้จะเพิ่มขึ้นโดยประมาณ $2s\Delta s$

9) ต้องใช้ไม้ประมาณ 120 ตารางนิ้ว

10) ค่าคลาดเคลื่อนร้อยละในการคำนวณพื้นที่สามเหลี่ยมนี้คือ 8%

11) 11.1 1.0006×10^{12} 11.2 $4+\frac{1}{48}$ หรือ 4.0208

11.3 0.92

11.4 $\frac{180+\sqrt{3}\pi}{360}$ หรือ 0.51511

11.5 $\frac{90+\sqrt{3}\pi}{180}$ หรือ 0.53023

11.6 3.12

12) 12.1 จะได้กำไรปีละประมาณ 150,000 บาท

12.2 จะได้กำไรปีละประมาณ 130,000 บาท

แบบฝึกหัด 3.8

1) 1.1 $-\frac{8}{3}$

1.2 $\frac{8}{3}$

1.3 -1

1.4 $-\frac{9}{4}$

2) ปริมาตรของลูกบาศก์ลูกนี้จะเพิ่มด้วยอัตรา 900 ลูกบาศก์เซนติเมตร/วินาที

3) ความยาวของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งจะหดลงด้วยอัตรา $\frac{8}{\sqrt{2009}}$ เซนติเมตร/นาที

4) พื้นที่ผิวของลูกโป่งลูกนี้จะหดลงด้วยอัตรา 0.75 ตารางเมตร/นาที

5) ระดับน้ำจะสูงขึ้นด้วยอัตรา $\frac{1}{30}$ เมตร/นาที

6) $-\frac{3}{2\sqrt{55}}$ เมตร/วินาที เมื่อฐานของบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 3 เมตร

$-\frac{3}{2\sqrt{7}}$ เมตร/วินาที เมื่อฐานของบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 6 เมตร

7) น้ำหนักของวัตถุนี้จะลดลงด้วยอัตรา 4.8171 ปอนด์/วินาที

8) ปริมาตรของวัตถุทรงกลมนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 512π ลูกบาศก์นิ้ว/วินาที

9) ปลายเงาของเด็กคนนี้จะเคลื่อนที่ออกห่างเสาไฟด้วยอัตรา $\frac{64}{11}$ ฟุต/วินาที

และความยาวของเงาจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{20}{11}$ ฟุต/วินาที

10) ความยาวของเงาของเด็กคนนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $\frac{3}{2}$ ฟุต/วินาที

11) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 120 ตารางเซนติเมตร/นาที

12) ความยาวของด้านของสามเหลี่ยมจะลดลงด้วยอัตรา $\frac{1}{5\sqrt{3}}$ ตารางเซนติเมตร/นาที

บทที่ 4 กฎโลปิตาล

แบบฝึกหัด 4.1

1) $\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{40}$

3) $\frac{3}{13}$

4) 0

5) $-\frac{1}{2}$

6) $-\frac{1}{2}$

7) $\frac{1}{6}$

8) $\frac{1}{2}$

9) $\frac{1}{3}$

10) $+\infty$

11) 0

12) 2

13) 0

14) 0

15) $\frac{2}{5}$

16) $+\infty$

17) $+\infty$

18) 0

19) 1

20) 2

แบบฝึกหัด 4.2

1) 1

2) 0

3) 0

4) 0

5) 0

6) $\frac{2}{\pi}$

7) 0

8) 0

9) $\frac{1}{2}$

10) $\frac{1}{2}$

11) 1

12) 1

13) 1

14) e

15) 1 16) e^5

17) 1 18) 1

19) 1 20) e^2

บทที่ 5 ลำดับ อนุกรม และอนุกรมกำลังของจำนวนจริง

แบบฝึกหัด 5.1

1) 1.1 e 1.2 0

1.3 0 1.4 0

1.5 1 1.6 0

1.7 0 1.8 5

1.9 0 1.10 0

2) 2.1 ลู่เข้า 2.2 ลู่เข้า

2.3 ลู่เข้า 2.4 ลู่เข้า

2.5 ลู่ออก 2.6 ลู่ออก

2.7 ลู่เข้า 2.8 ลู่เข้า

2.9 ลู่เข้า 2.10 ลู่เข้า

แบบฝึกหัด 5.2

1) 1.1 $\frac{3}{4}$ 1.2 1

1.3 1 1.4 $\frac{16}{5}$

1.5 ∞ 1.6 $\frac{3}{4}$

1.7 $\frac{25}{48}$ 1.8 $\frac{1}{4}$

1.9 ∞

1.10 $\frac{1}{4}$

1.11 1

1.12 ∞

1.13 ∞

1.14 ∞

1.15 ∞

1.16 ∞

1.17 $\frac{e}{e-1}$

1.18 $\frac{17}{12}$

2) 2.1 ลู่เข้า

2.2 ลู่ออก

2.3 ลู่เข้า

2.4 ลู่ออก

2.5 ลู่เข้า

2.6 ลู่เข้า

2.7 ลู่เข้า

2.8 ลู่เข้า

2.9 ลู่เข้า

2.10 ลู่ออก

2.11 ลู่เข้า

2.12 ลู่เข้า

2.13 ลู่เข้า

2.14 ลู่เข้า

2.15 ลู่เข้า

2.16 ลู่เข้า

2.17 ลู่เข้า

2.18 ลู่ออก

2.19 ลู่ออก

2.20 ลู่เข้า

2.21 ลู่เข้า

2.22 ลู่ออก

2.23 ลู่เข้า

2.24 ลู่เข้า

2.25 ลู่ออก

2.26 ลู่เข้า

2.27 ลู่เข้า

2.28 ลู่เข้า

2.29 ลู่เข้า

2.30 ลู่เข้า

2.31 ลู่ออก

2.32 ลู่เข้า

2.33 ลู่เข้า

2.34 ลู่เข้า

2.35 ลู่เข้า

2.36 ลู่เข้า

2.37 ลู่เข้า

2.38 ลู่เข้า

3) 3.1 $x \in (-1,1)$, ผลบวกคือ $\dfrac{1}{1-x}$

3.2 $x \in (-1,1)$, ผลบวกคือ $\dfrac{x}{1-x^2}$

3.3 $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, ผลบวกคือ $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$

3.4 $x \in \left(\dfrac{1}{e}, \mathrm{e}\right)$, ผลบวกคือ $\dfrac{1}{1-\ln x}$

แบบฝึกหัด 5.3

1) 1.1 $[-1,1)$

1.2 $[-1,1]$

1.3 $(-\infty,\infty)$

1.4 $\{0\}$

1.5 $(-2,2)$

1.6 $[-2,2)$

1.7 $(-1,1)$

1.8 $\left[-\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$

1.9 $\left(-\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a}\right)$

1.10 $(0,2)$

2) 2.1 0

2.2 0

4) 4.1 $\ln(1-2x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-2^n}{n} x^n$ สำหรับทุก ๆ $|x| < \dfrac{1}{2}$

4.2 $e^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!} x^n$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$

4.3 $\cosh x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)x^{2n-2}}{(2n-1)!}$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$

4.4. $\sinh(2x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$

4.5 $\sin^2 x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-4)^n}{2(2n)!} x^{2n}$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$

4.6 $\dfrac{1}{3-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^{n+1}}$ สำหรับทุกๆ $|x|<3$

4.7 $\dfrac{4x}{1+2x-3x^2}=-\dfrac{1}{3x+1}-\dfrac{1}{x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1}3^n+1\right)x^n$ สำหรับทุกๆ $|x|<\dfrac{1}{3}$

4.8 $\dfrac{1}{1-x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$ สำหรับทุกๆ $|x|<1$

5) 5.1 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-4)^n}{2(2n)!}x^{2n}$

5.2 $\dfrac{1}{2}\left[1-\sqrt{3}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{1}{2!}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)^2+\dfrac{\sqrt{3}}{3!}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)^3+\ldots\right]$

5.3 $e\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{6}+\ldots\right)$

5.4 $x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2x^5}{15}+\ldots$

5.5 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

5.6 $\sqrt{2}+\dfrac{1}{2^{3/2}}(x-2)-\dfrac{1}{2^{7/2}}\dfrac{(x-2)^2}{2!}+\dfrac{1}{2^{11/2}}\dfrac{(x-2)^3}{3!}+\ldots$

ดรรชนี

บรรณานุกรม

[1] Tom M.Apostal, **Calculus Volume I.** Blaisdell Publishing Company, New York, 1962.

[2] Dennis Berkey, **Applied Calculus.** Third Edition, Saunders College Publishing, Fort Worth, 1994.

[3] William E. Boyce and Richard C. Diprima, **Calculus.** John Wiley & Sons, New York, 1988.

[4] James W. Burgmeier, Monte B. Boisen JR. and Max D. Larsen, **Calculus with Applications.** McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1990.

[5] Philip S. Clarke, Jr., **Calculus with Analytic Geometry.** D. C. Heath and Company, Lexington, 1974.

[6] J. Douglas Fairs and Barbara T. Faires, **Calculus of One Variable.** Second Edition Random House, New York, 1989.

[7] Larry J. Goldstein, David C. Lay and David I. Schneider, **Calculus and its Applications.** Fourth Edition, Prientice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1987.

[8] Wilfred Kaplan and D. J. Lewis, **Calculus and Linear Algebra.** John Wiley & Sons, Inc.,1971

[9] Abe Mizrahi and Michael Sullivan, **Calculus & Analytic Geometry.** Third Edition, Wadsworth Publishing Company, Belmont, 1990.

[10] James Stewart, **Calculus Early Transcendentals.** Third Edition, Brooks/Cole Publish Company, California, 1994.

[11] Earl W. Swokowski, **Calculus with Analytic Geometry.** Second Edition, Prindle, Weber &Schmidt, Boston, 1979.

[12] Kenneth L. Whipkey and Mary Nell Whipkey, **The Power of Calculus.** Fourth Edition, John Wiley & Sons, New York, 1986.