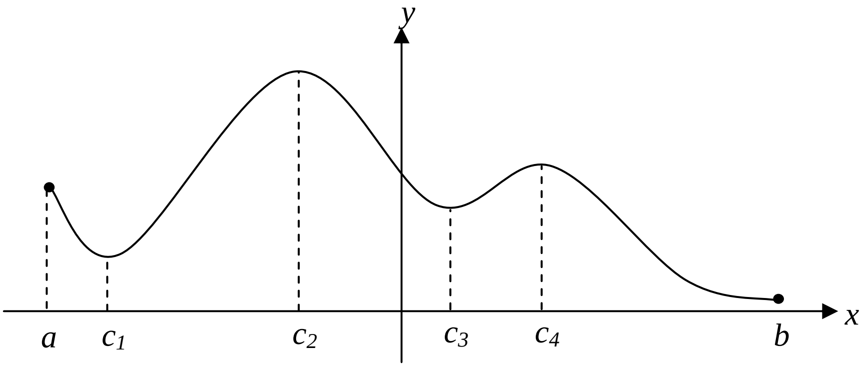
บทที่ 3
การประยุกต์ของอนุพันธ์
Applications of Derivatives

แคลคูลัสได้ถูกค้นพบในศตวรรษที่ 17 เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ เช่น การศึกษาวงโคจรของดาวเคราะห์ การทำนายวิถีทางการเคลื่อนที่ของวัตถุในสนามแม่เหล็ก เป็นต้น เราสามารถนำแคลคูลัสไปประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาต่าง ๆ ได้มากมาย เพราะว่านอกจากการเคลื่อนที่ของวัตถุแล้วเรายังสามารถนำความรู้ในเรื่องของอนุพันธ์ไปใช้ในการศึกษาอัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่าง ๆ เช่นนักเคมีใช้อนุพันธ์ในการทำนายผลต่าง ๆ ของปฏิกิริยาทางเคมี นักชีววิทยาใช้อนุพันธ์ในการหาอัตราการเจริญเติบโตของแบคทีเรีย วิศวกรไฟฟ้าใช้อนุพันธ์ในการอภิปรายการเปลี่ยนแปลงของกระแสในวงจรไฟฟ้า นักเศรษฐศาสตร์ใช้อนุพันธ์ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับกำไรและขาดทุน เป็นต้น

ในบทนี้เราจะศึกษาการประยุกต์ของอนุพันธ์เพื่อหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน สำหรับอีกการประยุกต์หนึ่งของอนุพันธ์ซึ่งเราจะศึกษาในบทที่ 4 คือการหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด (indeterminate form)

3.1 ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

ปัญหาต่าง ๆ หลายปัญหาที่เราประสบเกี่ยวข้องกับการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของสิ่งใดสิ่งหนึ่ง เช่นในการผลิตสินค้าชิ้นหนึ่ง บริษัทควรตั้งราคาขายเท่าใดจึงได้กำไรมากที่สุด ทั้งนี้ต้องคำนึงด้วยว่าสินค้าที่มีราคาแพงมากอาจมียอดจำหน่ายต่ำ หรือในการก่อสร้างถนน วิศวกรอาจต้องศึกษาว่าควรออกแบบการก่อสร้างอย่างไรจึงประหยัดค่าใช้จ่ายมากที่สุด ในขณะเดียวกันต้องคำนึงถึงความปลอดภัยของผู้ใช้ถนนด้วย การศึกษาเรื่องค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันช่วยให้เราสามารถนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหาประเภทเหล่านี้ได้ เราเริ่มการศึกษาด้วยการพิจารณากราฟของฟังก์ชัน f ที่นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ ในรูป 3.1.1 ต่อไปนี้



รูป 3.1.1

จากการพิจารณากราฟของ f ในรูป 3.1.1 เราจะเห็นว่า มีช่วงเปิดเล็ก ๆ รอบ c_4 ซึ่ง $f(c_4)$ มีค่ามากสุดในช่วงนั้น และถ้าพิจารณาในทำนองเดียวกันนี้กับ c_2, c_1 และ c_3 แล้ว เราพบว่า $f(c_2)$ มีค่ามากสุดในช่วงเปิดเล็ก ๆ รอบ c_2 ในขณะที่ $f(c_1)$ และ $f(c_3)$ มีค่าน้อยสุดในช่วงเปิดเล็ก ๆ รอบ c_1 และ c_3 ตามลำดับ เรากล่าวว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum หรือ local maximum) ที่ c_2 และ c_4 และกล่าวว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum หรือ local minimum) ที่ c_1 และ c_3

แต่ถ้าเราพิจารณาค่าของฟังก์ชัน f บน $[a,b]$ เราพบว่า $f(c_2)$ มีค่ามากที่สุด และ $f(b)$ มีค่าน้อยที่สุด เราเรียกค่ามากที่สุดและค่าน้อยที่สุดของ f นี้ว่า ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ของ f ตามลำดับ เราจะให้บทนิยามที่ชัดเจนของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดเหล่านี้ดังนี้

บทนิยาม 3.1.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I และ c เป็นสมาชิกของ I

เรากล่าวว่า f มี**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์** (relative maximum หรือ local maximum) ที่ c เมื่อมีช่วงเปิด $(a,b)\subseteq I$ โดยที่ $c\in(a,b)$ และ $f(c)\geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x\in(a,b)$ และจะเรียก $f(c)$ ว่า **ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ** f

เรากล่าวว่า f มี**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์** (relative minimum หรือ local minimum) ที่ c เมื่อมีช่วงเปิด $(a,b)\subseteq I$ โดยที่ $c\in(a,b)$ และ $f(c)\leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x\in(a,b)$ และจะเรียก $f(c)$ ว่า **ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ** f

เราเรียกค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันว่า**ค่าสุดขีดสัมพัทธ์** (local extremum หรือ relative extremum)

ในการหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์เรา**จะ**เปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันในช่วงเปิดซึ่งเป็นสับเซตในโดเมนของฟังก์ชัน บทนิยามต่อไปเราจะพิจารณาการเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันตลอด**ทั้ง**โดเมน

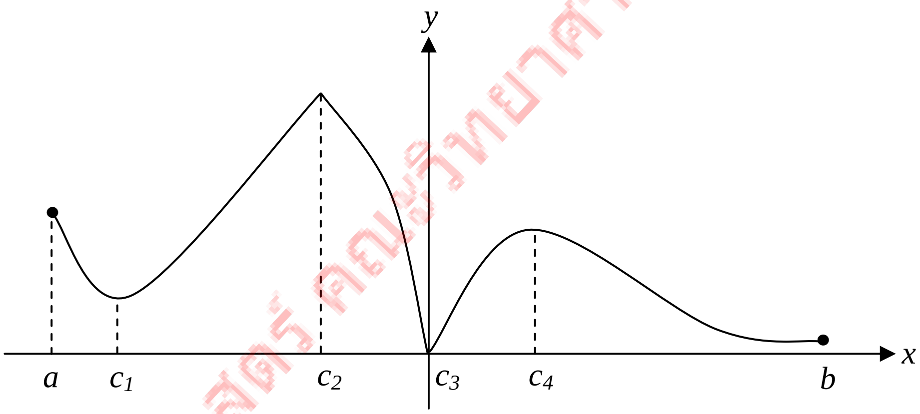
บทนิยาม 3.1.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I และ c เป็นสมาชิกของ I

เรากล่าวว่า f มี**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** (absolute maximum) ที่ c ถ้า $f(c) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ใน I และเรียก $f(c)$ ว่า**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** ของ f บน I

เรากล่าวว่า f มี**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** (absolute maximum) ที่ c ถ้า $f(c) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ใน I และเรียก $f(c)$ ว่า**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** ของ f บน I

เราเรียกค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันว่า**ค่าสุดขีดสัมบูรณ์** (absolute extremum)

ตัวอย่าง 3.1.3 พิจารณากราฟของฟังก์ชัน f ที่นิยามบน $[a,b]$ ในรูป 3.1.2 ต่อไปนี้



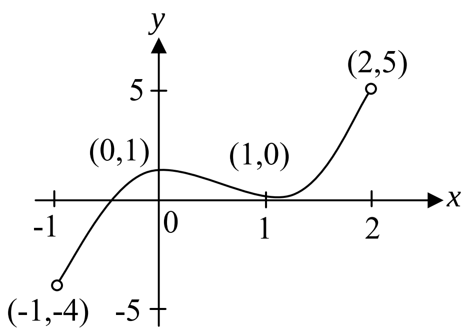
รูป 3.1.2

เราได้ว่าค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f เกิดขึ้นที่ c_2 และ c_4 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เกิดขึ้นที่ c_1 และ c_3 ในขณะที่ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f เกิดขึ้นที่ c_2 และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f เกิดขึ้นที่ c_3 ❍

ขอให้สังเกตว่าถ้าเราลากเส้นสัมผัสกราฟ f ในรูป 3.1.2 ที่ $(c_1, f(c_1))$ และ $(c_4, f(c_4))$ แล้ว เส้นสัมผัสกราฟเหล่านี้จะขนานกับแกน x นั่นคือความชันของเส้นสัมผัสเหล่านี้มีค่าเท่ากับ 0 หรืออาจกล่าวว่า $f'(c_1)=0$ และ $f'(c_4)=0$ ในขณะที่ $f'(c_2)$ และ $f'(c_3)$ หาค่าไม่ได้

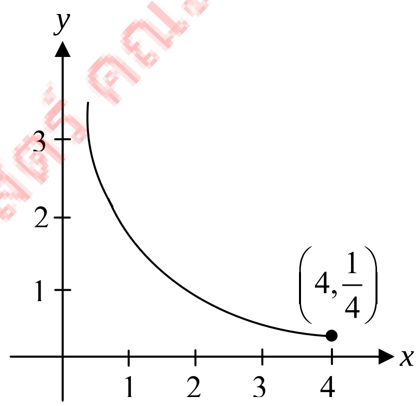
ข้อสังเกตนี้มิได้เป็นจริงเฉพาะกราฟในรูป 3.1.2 เท่านั้น แต่ยังคงเป็นจริงสำหรับกรณีทั่ว ๆ ไปด้วย ซึ่งเราจะได้ศึกษาต่อไปในทฤษฎีบท 3.1.9

ตัวอย่าง 3.1.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=2x^3-3x^2+1$ เมื่อ $-1<x<2$ ซึ่งกราฟของฟังก์ชันเขียนได้ดังรูป 3.1.3 เราจะเห็นว่า f ไม่มีค่าสุดขีดสัมบูรณ์ แต่ f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์



รูป 3.1.3

ตัวอย่าง 3.1.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=\dfrac{1}{x}$ เมื่อ $0<x\leq 4$ ซึ่งกราฟของฟังก์ชันเขียนได้ดังรูป 3.1.4 เราจะเห็นว่า f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์และไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ แต่ f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ 4



รูป 3.1.4

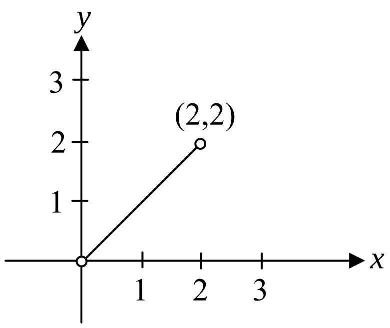
จากตัวอย่างที่ผ่านมาเราจะเห็นว่าฟังก์ชัน f อาจมีหรือไม่มีค่าสุดขีดสัมบูรณ์หรือค่าสุดขีดสัมพัทธ์ หรือทั้งสองอย่าง ทฤษฎีบทต่อไปนี้ให้เงื่อนไขเพียงพอสำหรับฟังก์ชันที่จะมีค่าสุดขีดสัมบูรณ์ ซึ่งจะขอละบทพิสูจน์ ผู้สนใจบทพิสูจน์ศึกษาได้จากหนังสือแคลคูลัสขั้นสูงทั่ว ๆ ไป

ทฤษฎีบท 3.1.6 (ทฤษฎีบทค่าสุดขีด : Extreme Value Theorem)

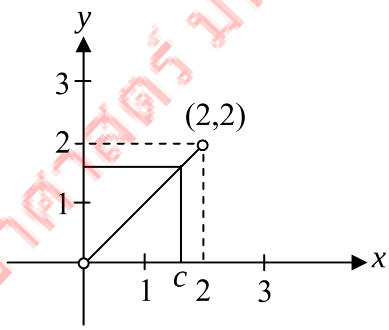
ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว f มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน $[a,b]$

เงื่อนไขความต่อเนื่องของฟังก์ชันและช่วงปิดในทฤษฎีบท 3.1.6 มีความสำคัญเท่า ๆ กัน ถ้าฟังก์ชัน f ขาดสมบัติข้อใดข้อหนึ่งแล้ว f ไม่จำเป็นต้องมีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ดังตัวอย่าง 3.1.7 และตัวอย่าง 3.1.8 ต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=x$ เมื่อ $0<x<2$ เราได้ว่า f ต่อเนื่องบนช่วงเปิด $(0,2)$ และกราฟของ f เขียนได้ดังรูป 3.1.5



รูป 3.1.5



รูป 3.1.6

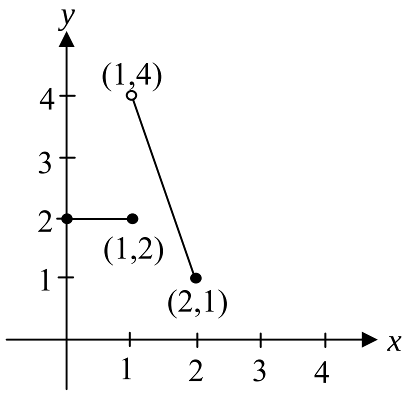
จะเห็นว่าสำหรับจำนวนจริง c ใด ๆ ซึ่ง $c<2$ จะมีจำนวนจริง $\dfrac{c+2}{2}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่า $c<\dfrac{c+2}{2}<2$ และจากการนิยามฟังก์ชัน f ซึ่ง $f(x)=x$ เมื่อ $0<x<2$ เราได้ว่า $f(c)=c<\dfrac{c+2}{2}=f\left(\dfrac{c+2}{2}\right)$

ดังนั้น f ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บน $(0,2)$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถแสดงได้ว่า f ไม่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน $(0,2)$ ❍

ตัวอย่าง 3.1.8 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=\begin{cases} 2, & 0\le x\le 1 \\ -3x+7, & 1<x\le 2 \end{cases}$

จากความรู้เรื่องฟังก์ชันต่อเนื่องในบทที่ 1 เราสามารถแสดงได้ว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$ ซึ่งกราฟของ f เขียนได้ดังรูป 3.1.7



รูป 3.1.7

เราได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ที่ 2 โดยการพิจารณาในทำนองเดียวกันกับตัวอย่าง 3.1.7 f ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ ❍

ทฤษฎีบทค่าสุดขีดที่เราได้กล่าวไปแล้วนั้นเป็นตัวอย่างของทฤษฎีบทที่เรียกกันว่าทฤษฎีบทการมีอยู่ (existence theorem) ซึ่งทฤษฎีบทค่าสุดขีดให้เงื่อนไขของฟังก์ชันที่จะมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ แต่ไม่ได้บอกว่าการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์เหล่านี้ทำได้อย่างไร ในการศึกษาต่อไปเราพบว่าการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วงปิดใด ๆ จะเกี่ยวข้องกับการหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันนั้น ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะบอกเงื่อนไขจำเป็นสำหรับฟังก์ชันที่จะมีค่าสุดขีดสัมพัทธ์

ทฤษฎีบท 3.1.9 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง I และ $c \in I$ ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ c แล้ว $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

บทพิสูจน์ เราจะแสดงการพิสูจน์ในกรณีที่ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c สำหรับการพิสูจน์กรณีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ทำได้ในทำนองเดียวกัน ให้ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c แล้ว โดยบทนิยาม 3.1.1 จะมีช่วงเปิด $(a,b) \subseteq I$ ซึ่ง $c \in (a,b)$ โดยที่ $f(x) \le f(c)$ สำหรับทุก ๆ x ใน (a,b) ดังนั้น $f(x) - f(c) \le 0$ พิจารณา

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad (3.1.1)$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าไม่ได้ แล้วจะได้ว่า $f'(c)$ หาค่าไม่ได้ ซึ่งเราได้ตามที่ต้องการพิสูจน์

ต่อไปสมมติว่าลิมิตใน (3.1.1) หาได้ เราจะได้ว่า

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \qquad (3.1.2)$$

เพราะว่า $f(x)-f(c)\le 0$ ดังนั้น ถ้า $x<c$ แล้ว $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$ เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0 \qquad (3.1.3)$$

แต่ถ้า $x>c$ แล้ว $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$ และเราได้ว่า

$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0 \qquad (3.1.4)$$

จาก (3.1.2), (3.1.3) และ (3.1.4) เราสรุปได้ว่า

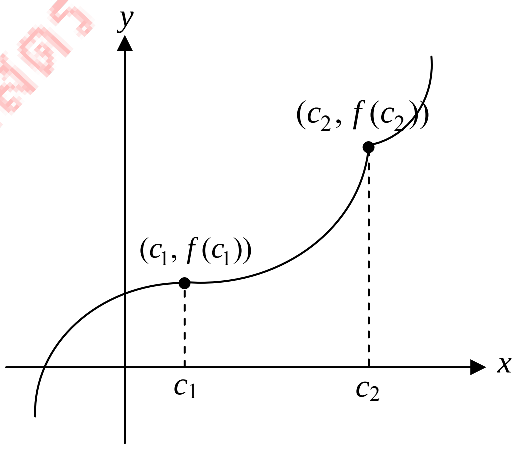
$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) = 0$$

□

บทแทรกต่อไปนี้เป็นผลที่ได้โดยตรงจากทฤษฎีบท 3.1.9

บทแทรก 3.1.10 ถ้าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้และมีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ c แล้ว $f'(c)=0$

หมายเหตุ บทกลับของทฤษฎีบท 3.1.9 ไม่จริง นั่นคือ ถ้า $f'(c)=0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้แล้ว ฟังก์ชัน f ไม่จำเป็นต้องมีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ c กราฟในรูป 3.1.8 เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่า $f'(c_1)=0$ และ $f'(c_2)$ หาค่าไม่ได้ แต่ f ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ c_1 และ c_2



รูป 3.1.8

บทนิยาม 3.1.11 เราเรียก c ในโดเมนของฟังก์ชัน f ว่า **จุดวิกฤต** (critical point) ถ้า $f'(c)=0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

โดยทฤษฎีบท 3.1.9 เราจะเห็นว่าค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันเกิดขึ้นที่จุดวิกฤต และจากหมายเหตุท้ายทฤษฎีบท 3.1.10 เราได้ว่าจุดวิกฤตแต่ละจุดไม่จำเป็นต้องเป็นจุดที่ก่อให้เกิดค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันเสมอไป อย่างไรก็ตามจุดวิกฤตของฟังก์ชันจะจำกัดขอบเขตการพิจารณาจุดในโดเมนในการหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ให้แคบลง

เราจบหัวข้อนี้ด้วยการกล่าวถึงการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วงปิดโดยใช้ความรู้จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.12 ให้ f เป็นฟังก์ชันบนช่วงปิด $[a,b]$ และมีค่าสุดขีดสัมบูรณ์ที่ c

1. ถ้า $a<c<b$ แล้ว ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
2. ถ้า $a<c<b$ แล้ว ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

บทพิสูจน์ เราจะพิสูจน์ข้อ 1 เท่านั้น สำหรับการพิสูจน์ข้อ 2 ทำได้ในทำนองเดียวกัน ให้ A แทนช่วงเปิด (a,b) เห็นได้ชัดว่า $c\in A$ และ $A\subseteq[a,b]$ เพราะว่า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f เราได้ว่า $f(c)\geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x\in(a,b)$ ดังนั้น $f(c)\geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x\in A$ นั่นคือ $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f □

โดยผลของทฤษฎีบท 3.1.6 ทฤษฎีบท 3.1.9 และทฤษฎีบท 3.1.12 เราได้ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว ค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f จะเกิดขึ้นที่จุดปลายของช่วงคือ a หรือ b หรือเกิดขึ้นที่จุดวิกฤตของ f ดังนั้นการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันดังกล่าวอาจทำได้ดังต่อไปนี้

1. สำหรับจุดวิกฤต c แต่ละจุด คำนวณหาค่าของ $f(c)$
2. คำนวณหาค่าของ $f(a)$ และ $f(b)$
3. เปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันใน (1) และ (2) ค่าใดมีค่ามากที่สุด ค่านั้นจะเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าใดมีค่าน้อยที่สุด ค่านั้นจะเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 3.1.13 จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=x^3-12x$, $x\in[-3,5]$

วิธีทำ เนื่องจาก f เป็นพหุนาม เราได้ว่า f ต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง ดังนั้น f ต่อเนื่องบน $[-3,5]$ โดยทฤษฎีบท 3.1.6 เราได้ว่า f มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

เพราะว่า $f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$ ดังนั้นจุดวิกฤตของ f คือ 2 และ -2

ต่อไปพิจารณาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ $x=2,-2,-3$ และ 5 เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
f(2) &= 2^3-12(2)=-16\\
f(-2) &= (-2)^3-12(-2)=16\\
f(-3) &= (-3)^3-12(-3)=9\\
f(5) &= 5^3-12(5)=65
\end{aligned}$$

ดังนั้นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน $[-3,5]$ คือ $f(5)=65$ เกิดขึ้นที่ $x=5$ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน $[-3,5]$ คือ $f(2)=-16$ เกิดขึ้นที่ $x=2$ ❍

ตัวอย่าง 3.1.14 จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & 0\le x\le 2\\ x^2-5x+9, & 2<x\le 3\end{cases}$$

วิธีทำ สังเกตว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน $[0,3]$ (นักศึกษาควรตรวจสอบด้วย) โดยทฤษฎีบท 3.1.6 เราได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ พิจารณา $f'(x)$ เมื่อ $x\in(0,3)$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to0^+}\frac{((2+h)^2-5(2+h)+9)-(2(2)-1)}{h}\\
&= \lim_{h\to0^+}\frac{h^2-h}{h}=-1
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to0^-}\frac{(2(2+h)-1)-(2(2)-1)}{h}\\
&= \lim_{h\to0^-}\frac{2h}{h}=2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(2)$ หาค่าไม่ได้ สำหรับ $x\in(0,3)$ และ $x\neq2$ เราจะเห็นว่า f' หาค่าได้ และ

$$f'(x)=\begin{cases} 2, & 0<x<2\\ 2x-5, & 2<x<3\end{cases}$$

เห็นได้ชัดว่า $f'(x) \neq 0$ เมื่อ $0 < x < 2$ และสำหรับ $x \in (2,3)$ เราได้ว่า $f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = \frac{5}{2}$

ดังนั้นจุดวิกฤตของ f คือ $x = \frac{5}{2}$ และ 2

ต่อไปพิจารณาค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ $x = 0,\ 2,\ \frac{5}{2}$ และ 3 เราจะได้ว่า

$$f(2) = 2(2) - 1 = 3$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 9 = \frac{11}{4}$$

$$f(0) = 2(0) - 1 = -1$$

$$f(3) = 3^2 - 5(3) + 9 = 3$$

ดังนั้นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน $[0,3]$ คือ 3 เกิดขึ้นที่ $x = 2$ และ 3

และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน $[0,3]$ คือ $f(0) = -1$ เกิดขึ้นที่ $x = 0$ ❍

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 1.2 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

1.3 $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ 1.4 $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 9}}{x}$

1.5 $f(x) = |x - 1|$ 1.6 $f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \le x < 1 \\ 4 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

2. จงหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของฟังก์ชันบนช่วงปิดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

2.1 $f(x) = 5 - 6x^2 - 2x^3;\ [-3,1]$ 2.2 $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}};\ [-1,8]$

2.3 $f(x) = \cos x;\ [-1,1]$ 2.4 $f(x) = |x^3 - 4x|;\ [-2,2]$

2.5 $f(x) = \begin{cases} 2x + 7, & -2 \le x < -1 \\ 4 - x, & -1 \le x \le 5 \end{cases}$ 2.6 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \le x < 1 \\ x^3, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

2.7 $f(x) = \frac{x^2}{x - 1};\ \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 2.8 $f(x) = \frac{(x-3)^{\frac{1}{3}}}{x - 1};\ [2,11]$

3.2 ทฤษฎีบทของโรลล์และทฤษฎีบทค่ามัชฌิม

ทฤษฎีบทที่สำคัญและรู้จักกันดีทฤษฎีบทหนึ่งในการศึกษาเรื่องอนุพันธ์คือ ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม ทฤษฎีบทนี้เป็นพื้นฐานการศึกษาของทฤษฎีบทต่าง ๆ มากมาย เช่น ทฤษฎีบทที่ใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมเป็นการขยายทฤษฎีบทของโรลล์ซึ่งเราจะได้ศึกษากันต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.1 (**ทฤษฎีบทของโรลล์** : Rolle's Theorem)

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) โดยที่ $f(a)=f(b)$ แล้ว จะมี c ใน (a,b) ซึ่ง $f'(c)=0$

บทพิสูจน์ เนื่องจากฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน $[a,b]$ โดยทฤษฎีบท 3.1.6 f มีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ เราแยกการพิจารณาออกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณี 1 f เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว

เราได้ว่า $f'(x)=0$ สำหรับทุก ๆ $x\in(a,b)$ ดังนั้นเราได้สิ่งที่ต้องการพิสูจน์

กรณี 2 f ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว

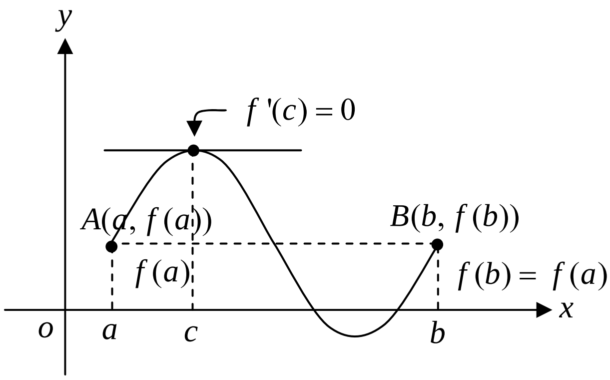
จะมี $k\in(a,b)$ ซึ่ง $f(k)\neq f(a)$

กรณี 2.1 ถ้า $f(k)>f(a)$ แล้ว ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f จะไม่เกิดขึ้นที่ a และเนื่องจาก $f(a)=f(b)$ ทำให้ได้ว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f จะไม่เกิดขึ้นที่ b เช่นกัน ดังนั้นจะต้องมี c ใน (a,b) ซึ่ง $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f

กรณี 2.2 ถ้า $f(k)<f(a)$ แล้ว ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f จะไม่เกิดขึ้นที่ a และเนื่องจาก $f(a)=f(b)$ ทำให้ได้ว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f จะไม่เกิดขึ้นที่ b เช่นกัน ดังนั้นจะต้องมี c ใน (a,b) ซึ่ง $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f

จากกรณี 2.1 และ กรณี 2.2 สรุปได้ว่า จะมี c ใน (a,b) ซึ่ง $f(c)$ เป็นค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f โดยผลของทฤษฎีบท 3.1.12 และทฤษฎีบท 3.1.9 ทำให้ $f'(c)=0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้ แต่เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้บน (a,b) และ $c\in(a,b)$ ดังนั้น $f'(c)=0$ □

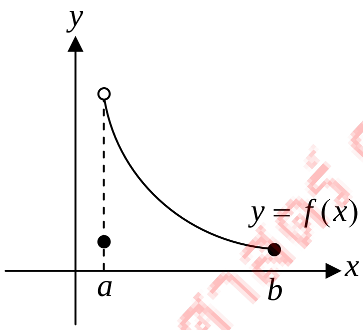
กราฟในรูป 3.2.1 ต่อไปนี้แสดงให้เห็นความหมายเชิงเรขาคณิตของทฤษฎีบทของโรลล์



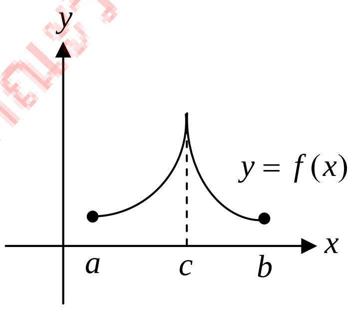
รูป 3.2.1

นั่นคือ ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน $[a,b]$ หาอนุพันธ์ได้บน (a,b) และ $f(a)=f(b)$ แล้ว จะมี $(c, f(c))$ โดยที่ $a<c<b$ ซึ่งเส้นสัมผัสกราฟของ f ที่จุด $(c, f(c))$ ขนานกับแกน x

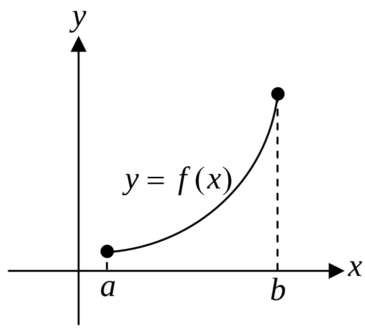
ตัวอย่าง 3.2.2 กราฟของฟังก์ชันในแต่ละรูปต่อไปนี้เป็นตัวอย่างแสดงให้เห็นว่าข้อสรุปของทฤษฎีบทของโรลล์จะไม่จริงเมื่อฟังก์ชันขาดสมบัติข้อใดข้อหนึ่งในเงื่อนไขของทฤษฎีบท



รูป 3.2.2 (ก)



รูป 3.2.2 (ข)



รูป 3.2.2 (ค)

เราจะเห็นว่าฟังก์ชัน f ที่มีกราฟดังในรูป 3.2.2 (ก) หรือรูป 3.2.2 (ข) หรือรูป 3.2.2 (ค) จะไม่มีค่าของ c ใน (a,b) ที่ทำให้ $f'(c)=0$

จากการพิจารณากราฟเหล่านี้ เราจะเห็นว่าฟังก์ชันของกราฟในรูป 3.2.2 (ก) ไม่ต่อเนื่องที่ $x=a$ ฟังก์ชันของกราฟในรูป 3.2.2 (ข) หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ c โดยที่ $c\in(a,b)$ และค่าของ $f(a)$ และ $f(b)$ ของฟังก์ชันของกราฟในรูป 3.2.2 (ค) ไม่เท่ากัน ❍

ตัวอย่าง 3.2.3 จงแสดงว่าฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=\sqrt{x}-x;\ x\in[0,1]$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทของโรลล์และหาค่าของ c ซึ่ง $f'(c)=0$

วิธีทำ เห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,1]$

เนื่องจาก $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-1=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-2\sqrt{x}\right)$ ดังนั้น f สามารถหาอนุพันธ์ได้บน $(0,1)$

เพราะว่า $f(0)=0$ และ $f(1)=0$ ดังนั้น $f(0)=f(1)$ โดยทฤษฎีบทของโรลล์ จะมี $c\in(0,1)$ ซึ่ง $f'(c)=0$ ดังนั้น $f'(c)=\dfrac{1}{2\sqrt{c}}\left(1-2\sqrt{c}\right)=0$ จะได้ว่า $c=\dfrac{1}{4}$ ❍

ตัวอย่าง 3.2.4 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=x^{\frac{2}{3}};\quad x\in[-1,1]$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทของโรลล์หรือไม่ ถ้าสอดคล้องจงหาค่าของ c ซึ่ง $f'(c)=0$

วิธีทำ จาก $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ จะได้ว่า $f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ เราได้ว่า $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ นั่นคือ f หาอนุพันธ์ไม่ได้บน $(-1,1)$ ดังนั้น f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทของโรลล์ ❍

ตัวอย่าง 3.2.5 จงแสดงว่าฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=(x-1)\sin x$ สำหรับทุก ๆ $x\in[0,1]$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทของโรลล์ และใช้ผลอันนี้ในการแสดงว่าสมการ $\tan x+x=1$ มีคำตอบอยู่ใน $(0,1)$

วิธีทำ เห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,1]$ และ f หาอนุพันธ์ได้บน $(0,1)$

เพราะว่า $f(0)=(0-1)\sin 0=0$ และ $f(1)=(1-1)\sin 1=0$ เราได้ว่า $f(0)=f(1)$ ดังนั้น f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทของโรลล์ เพราะฉะนั้น จะมี $c\in(0,1)$ ซึ่ง $f'(c)=0$

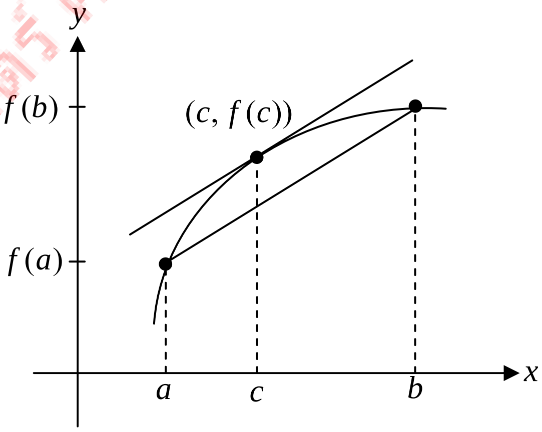
เนื่องจาก $f'(x)=\sin x+(x-1)\cos x$ จะได้ว่า $f'(c)=\sin c+(c-1)\cos c=0$ หรืออาจเขียนได้ว่า $\dfrac{\sin c}{\cos c}+c-1=0$ นั่นคือ $\tan c+c=1$ ซึ่งเป็นการแสดงว่าสมการ $\tan x+x=1$ มี $c\in(0,1)$ ที่เป็นคำตอบของสมการ ❍

ตัวอย่าง 3.2.6 จงแสดงว่าสมการ $x^3+3x^2+6x+k=0$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงอย่างมากคำตอบเดียวไม่ว่า k จะเป็นค่าคงตัวใด ๆ

วิธีทำ สมมติว่า x_1 และ x_2 เป็นจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของสมการ $x^3+3x^2+6x+k=0$ และ $x_1<x_2$ ให้ $f(x)=x^3+3x^2+6x+k$ แล้ว เราได้ว่า $f(x_1)=0$ และ $f(x_2)=0$ เห็นได้ชัดว่า f สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทของโรลล์บนช่วงปิด $[x_1,x_2]$ ดังนั้นจะมี $c\in(x_1,x_2)$ ซึ่ง $f'(c)=0$ เพราะว่า $f'(x)=3x^2+6x+6$ เราได้ว่า $f'(c)=3c^2+6c+6=3[(c+1)^2+1]$

ดังนั้น $3[(c+1)^2+1]=0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น สมการ $x^3+3x^2+6x+k=0$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงได้อย่างมากเพียงคำตอบเดียว ❍

ถ้าเราย้อนไปดูความหมายเชิงเรขาคณิตของทฤษฎีบทของโรลล์และกราฟในรูป 3..2.1 แล้ว เราจะเห็นว่าเส้นสัมผัสกราฟของ f ที่จุด $(c, f(c))$ นอกจากจะขนานกับแกน x แล้ว ยังขนานกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(a, f(a))$ และ $B(b, f(b))$ อีกด้วย ข้อสังเกตนี้นำไปสู่การวางนัยทั่วไป (generalization) ของทฤษฎีบทของโรลล์ ดังกราฟในรูป 3..2.3 เราจะเห็นว่าถึงแม้ว่า $f(a)\neq f(b)$ แต่ยังคงมีจุด $(c, f(c))$ บนกราฟของ f โดยที่ $a<c<b$ ซึ่งเส้นสัมผัสกราฟที่จุด ๆ นี้ขนานกับเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(a, f(a))$ และ $(b, f(b))$



รูป 3.2.3

เพราะว่าความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $(a, f(a))$ และ $(b, f(b))$ เท่ากับ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ เราจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ซึ่งรู้จักกันในชื่อว่าทฤษฎีบทค่ามัชฌิม (Mean Value Theorem)

ทฤษฎีบท 3.2.7 (ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม : Mean Value Theorem)

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) แล้ว จะมี c ใน (a,b) ซึ่ง

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

บทพิสูจน์ ให้ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ โดย

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

เราจะแสดงว่า g สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทของโรลล์ เพราะว่า f ต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) และ ฟังก์ชัน h ที่กำหนดโดย

$$h(x) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

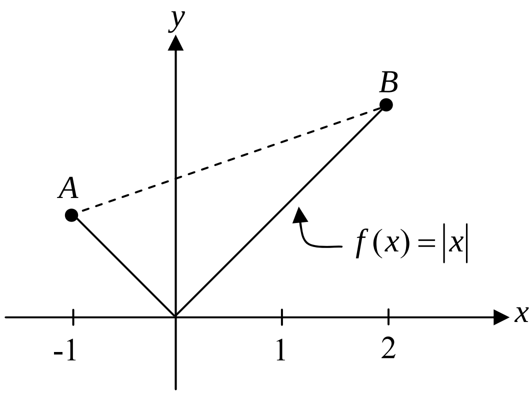
เป็นพหุนาม ดังนั้น g ต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) เราจะเห็นได้โดยง่ายว่า $g(a) = g(b) = 0$ ดังนั้น g สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทของโรลล์ เพราะฉะนั้นจะมี $c \in (a,b)$ ซึ่ง $g'(c) = 0$ เนื่องจาก

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

เพราะฉะนั้น $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ นั่นคือ

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ □

ข้อสังเกต ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมจะไม่จริงเมื่อมีจุดบางจุดใน (a,b) ซึ่งอนุพันธ์ของฟังก์ชันหาค่าไม่ได้ที่จุด ๆ นั้น ตัวอย่างเช่นฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x) = |x|$ นักศึกษาได้ทราบมาก่อนแล้วว่า ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริงและหาอนุพันธ์ได้ที่ทุก ๆ จำนวนจริง $x \neq 0$ รูป 3.2.4 แสดงให้เห็นกราฟของฟังก์ชัน f บน $[-1,2]$



รูป 3.2.4

เราจะเห็นว่าความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A และ B มีค่าเท่ากับ

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$$

แต่ไม่มีจุดใดเลยที่อยู่ใน $(-1,2)$ ซึ่งอนุพันธ์ที่จุดนั้นมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{3}$

ตัวอย่าง 3.2.8 จงแสดงว่าฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=x^3-8x-5$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัชฌิมบน $[1,4]$ และจงหาจำนวนจริง c ใน $(1,4)$ ซึ่งสอดคล้องกับบทสรุปของทฤษฎีบท

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชัน f เป็นพหุนาม เราได้ว่า f ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ที่ x เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้น f ต่อเนื่องบน $[1,4]$ และหาอนุพันธ์ได้บน $(1,4)$ โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมจะมีจำนวนจริง $c\in(1,4)$ โดยที่ $f(4)-f(1) = f'(c)(4-1)$ หรือ $27-(-12)=(3c^2-8)(3)$ ซึ่งทำให้ได้ $c=\pm\sqrt{7}$ ดังนั้น ค่า c ที่ต้องการ คือ $\sqrt{7}$ ❍

ตัวอย่าง 3.2.9 จงใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมในการพิสูจน์ว่า $e^x>1+x$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $x\neq 0$

วิธีทำ ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=e^x$ แล้ว เราได้ว่า f ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้บนเซตของจำนวนจริง เราจะเริ่มพิจารณาในกรณีที่ x เป็นจำนวนจริงบวกก่อน เห็นได้ชัดว่า f ต่อเนื่องบน $[0,x]$ และหาอนุพันธ์ได้บน $(0,x)$ โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิม จะมีจำนวนจริง $c\in(0,x)$ ซึ่ง $f(x)-f(0)=f'(c)(x-0)$ หรือ $e^x-1=e^c x$ เพราะว่า $0<c<x$ เราได้ว่า $e^c>e^0=1$ ดังนั้น $e^x-1>x$

ต่อไปเราจะพิจารณาในกรณีที่ x เป็นจำนวนจริงลบ ในทำนองเดียวกัน โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิมจะมีจำนวนจริง $c_1\in(x,0)$ ซึ่ง $f(0)-f(x)=f'(c_1)(0-x)$ หรือ $1-e^x=e^{c_1}(-x)$ หรือ $e^x-1=e^{c_1}x$ เนื่องจาก $x<c_1<0$ เราได้ว่า $e^{c_1}<e^0=1$ และเพราะว่า $x<0$ ดังนั้น $e^{c_1}x>x$ เพราะฉะนั้น $e^x-1>x$ จากทั้งสองกรณีเราได้ว่า $e^x>1+x$ ❍

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทของโรลล์บนช่วงที่กำหนดหรือไม่ ถ้าสอดคล้องจงหาค่า c ซึ่ง $f'(c)=0$

   1.1 $f(x)=x^2-3x+2;\quad [1,2]$

   1.2 $f(x)=x^3-2x^2-x+2;\quad [-1,2]$

   1.3 $f(x)=x^3-x;\quad [-1,0]$

   1.4 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}};\quad [-1,1]$

   1.5 $f(x)=x^2-3x+4;\quad [1,4]$

   1.6 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+1};\quad [-2,2]$

   1.7 $f(x)=|x+1|;\quad [-4,2]$

   1.8 $f(x)=\sin x+\cos x;\quad [0,2\pi]$

   1.9 $f(x)=x^3-3x;\quad [2,4]$

   1.10 $f(x)=x^{\frac{2}{5}};\quad [-1,1]$

2. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทค่ามัชฌิมบนช่วงที่กำหนดหรือไม่ ถ้าสอดคล้องจงหาค่า c ซึ่ง $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

   2.1 $f(x)=x^2+1;\quad [0,2]$

   2.2 $f(x)=\dfrac{x+1}{x};\quad [-1,1]$

   2.3 $f(x)=x^4+5;\quad [0,1]$

   2.4 $f(x)=x^3-7x^2+5x;\quad [-2,2]$

   2.5 $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1};\quad [0,1]$

   2.6 $f(x)=|x-3|;\quad [-1,4]$

   2.7 $f(x)=x^{\frac{2}{3}};\quad [-8,8]$

   2.8 $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2};\quad [0,2]$

3. จงใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมในการแสดงว่าอสมการต่อไปนี้เป็นจริง

   3.1 $\tan x > x;\quad 0<x<\dfrac{\pi}{2}$

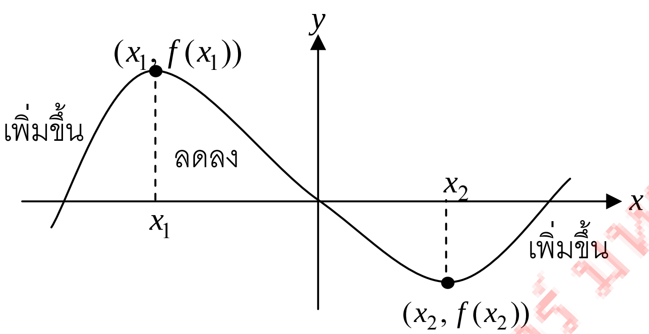
   3.2 $\dfrac{x}{1+x^2}<\arctan x<x;\quad x>0$

4. ถ้าฟังก์ชัน f และ f' ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว จงพิสูจน์ว่าจะมีจำนวนจริง u และ v ใน $[a,b]$ ที่ทำให้ $f(a)+(b-a)f'(u)\le f(b)\le f(a)+(b-a)f'(v)$

3.3 การเพิ่มขึ้นและการลดลงของฟังก์ชัน

ในหัวข้อ 3.1 เราได้ศึกษามาแล้วว่าค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันจะเกิดขึ้นที่จุดวิกฤต แต่จุดวิกฤตแต่ละจุดไม่จำเป็นต้องเป็นจุดที่ก่อให้เกิดค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันเสมอไป การศึกษาการเพิ่มขึ้นและการลดลงของฟังก์ชันจะช่วยทำให้เราสามารถระบุได้ว่าจุดวิกฤตจุดใดจะเป็นจุดที่ก่อให้เกิดค่าสุดขีดสัมพัทธ์

พิจารณากราฟของฟังก์ชันต่อเนื่อง f ในรูป 3.3.1 ต่อไปนี้



รูป 3.3.1

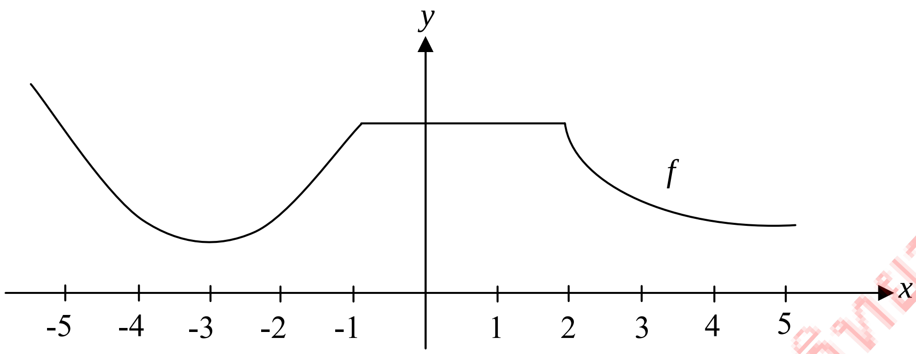
เมื่อพิจารณากราฟของ f จากซ้ายไปขวา เราจะเห็นว่าบางส่วนของกราฟจะเพิ่มขึ้นและบางส่วน จะลดลง ยิ่งไปกว่านั้นกราฟของ f เพิ่มขึ้นทางด้านซ้ายของ x_1 และลดลงทางด้านขวาของ x_1 ในขณะที่ x_1 เป็นจุดที่ก่อให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และกราฟของ f ลดลงทางด้านซ้ายของ x_2 และเพิ่มขึ้นทางด้านขวาของ x_2 ในขณะที่ x_2 เป็นจุดที่ก่อให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ จากข้อสังเกตนี้ทำให้เราได้แนวคิดว่า การทราบว่าฟังก์ชันเพิ่มขึ้นหรือลดลงในช่วงใดบ้างจะทำให้เราระบุได้ว่าจุดวิกฤตจุดใดเป็นจุดที่ก่อให้เกิดค่าสุดขีดสัมพัทธ์ เราเริ่มศึกษาการเพิ่มขึ้นและการลดลงของฟังก์ชันในหัวข้อนี้โดยการให้บทนิยามที่แจ่มชัดของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดต่อไปนี้

บทนิยาม 3.3.1 เรากล่าวว่าฟังก์ชัน f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม** (increasing function) บนช่วง I ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ x_1 และ x_2 ใน I ซึ่ง $x_1 < x_2$

เรากล่าวว่าฟังก์ชัน f เป็น**ฟังก์ชันลด** (decreasing function) บนช่วง I ถ้า $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ x_1 และ x_2 ใน I ซึ่ง $x_1 < x_2$

และกล่าวว่าฟังก์ชัน f เป็น**ฟังก์ชันค่าคงตัว** (constant function) บนช่วง I ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก x_1 และ x_2 ใน I

ตัวอย่าง 3.3.2 จากกราฟของฟังก์ชัน f ในรูป 3.3.2 เราได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[-3,-1]$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty,-3]$ และบนช่วง $[2,\infty)$ สำหรับช่วง $[-1,2]$ f ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด แท้ที่จริงแล้ว f เป็นฟังก์ชันค่าคงตัวบน $[-1,2]$



รูป 3.3.2

สังเกตว่าเมื่อเราลากเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน ณ จุดต่าง ๆ เราพบว่าช่วงที่ความชันของเส้นสัมผัสกราฟเป็นบวก เป็นช่วงเดียวกันกับที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเพิ่ม และช่วงที่ความชันของเส้นสัมผัสกราฟเป็นลบเป็นช่วงเดียวกันกับที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันลด จากข้อสังเกตนี้จะเห็นว่าแนวคิดในเรื่องการเพิ่มขึ้นและลดลงของฟังก์ชันเกี่ยวข้องกับความชันของเส้นสัมผัสของกราฟ ซึ่งจะมีผลเกี่ยวเนื่องกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.3

1. ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง I และ f' หาค่าได้บน I แล้ว $f'(x)\geq 0$ สำหรับทุก ๆ x ใน I

2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง I และ f' หาค่าได้บน I แล้ว $f'(x)\leq 0$ สำหรับทุก ๆ x ใน I

บทพิสูจน์ เราจะพิสูจน์ข้อ 1 เท่านั้น สำหรับการพิสูจน์ข้อ 2 ทำได้ในทำนองเดียวกัน จึงให้เป็นแบบฝึกหัด

ให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ f' หาค่าได้บน I และให้ x_1 และ x_2 เป็นสมาชิกใด ๆ ใน I โดยที่ $x_1 < x_2$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เราได้ว่า $f(x_1) < f(x_2)$ เพราะฉะนั้น $f(x_2)-f(x_1) > 0$ เพราะว่า $x_2 - x_1 > 0$ เราได้ว่า $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x_2\to x_1^+}\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$ เนื่องจาก f' หาค่าได้บน I แสดงว่า $f'(x_1)$ หาค่าได้ และ $f'(x_1)=\lim\limits_{x_2\to x_1^+}\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ดังนั้น $f'(x_1)\geq 0$ □

หมายเหตุ บทกลับของทฤษฎีบท 3.3.3 ไม่จริง นั่นคือถ้า $f'(x) \ge 0$ บนช่วงใดแล้ว ไม่จำเป็นว่า f ต้องเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงนั้น ตัวอย่างเช่นฟังก์ชัน $f(x)=1$ เป็นฟังก์ชันค่าคงตัวซึ่งไม่เป็นทั้งฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดบนช่วงใดเลย แต่ $f'(x) \ge 0$ (แท้ที่จริงแล้ว $f'(x)=0$) ในขณะเดียวกันมีฟังก์ชันเพิ่มบางฟังก์ชันซึ่งอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ 0 ณ จุดใดจุดหนึ่ง เช่น $f(x)=x^3$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มซึ่ง $f'(x)=0$ เมื่อ $x=0$ ดังนั้นทฤษฎีบท 3.3.3 จึงจำเป็นต้องรวมกรณีที่ $f'(x)=0$ ไว้ด้วย เมื่อเลี่ยงกรณีที่ $f'(x)=0$ เราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b)

1. ถ้า $f'(x)>0$ สำหรับทุก ๆ x ใน (a,b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a,b]$
2. ถ้า $f'(x)<0$ สำหรับทุก ๆ x ใน (a,b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบน $[a,b]$

บทพิสูจน์ เราจะพิสูจน์ข้อ 1 เท่านั้น สำหรับการพิสูจน์ข้อ 2 ทำได้ในทำนองเดียวกัน จึงให้เป็นแบบฝึกหัด

ให้ $f'(x)>0$ สำหรับทุก ๆ x ใน (a,b) เราจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a,b]$ ให้ x_1 และ x_2 เป็นสมาชิกใด ๆ ใน I โดยที่ $x_1<x_2$ โดยทฤษฎีบทค่ามัชฌิม (ทฤษฎีบท 3.2.7) จะมี $c \in (x_1,x_2)$ โดยที่ $f'(c)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ เพราะว่า $x_2-x_1>0$ และ $f'(c)>0$ เราได้ว่า $f(x_2)-f(x_1)>0$ นั่นคือ $f(x_1)<f(x_2)$ □

ในกรณีที่ช่วงที่เราต้องการพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด เป็นช่วงอนันต์ที่อยู่ในรูป $(-\infty,a]$ หรือ $[b,\infty)$ เราอาจใช้การพิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ในทฤษฎีบท 3.3.4 เพื่อแสดงว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $f'(x)>0$ สำหรับทุก ๆ x ที่อยู่ในช่วงดังกล่าวแล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty,a]$ หรือ $[b,\infty)$ และในทำนองเดียวกันถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ $f'(x)<0$ สำหรับทุก ๆ x ที่อยู่ในช่วงดังกล่าวแล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty,a]$ หรือ $[b,\infty)$

ในการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 3.3.4 และข้อความข้างต้น การหาช่วงที่จะทำให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดนั้น เราจะหาช่วงที่กราฟของฟังก์ชัน f' อยู่เหนือแกน x หรืออยู่ใต้แกน x อย่างใดอย่างหนึ่งตลอดทั้งช่วงนั้น ซึ่งในการหาช่วงดังกล่าว เราอาจจะใช้วิธีการดังต่อไปนี้

ถ้าเรามีฟังก์ชัน g ที่นิยามบน $\mathbb{R}$ ซึ่งอาจจะยกเว้นได้ที่จุด $a_1, a_2, ..., a_n$ โดยที่กราฟของ g ตัดแกน x ที่จุด $b_1, b_2, ..., b_k$ นั่นคือ $b_1, b_2, ..., b_k$ เป็นจุดทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $g(x) = 0$ และถ้า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนแต่ละช่วงย่อยที่เกิดจากการแบ่งส่วนของ $\mathbb{R}$ ด้วยจุด $a_1, a_2, ..., a_n$ และ $b_1, b_2, ..., b_k$ แล้วเราจะได้ว่า ในแต่ละช่วงย่อยนั้น กราฟของ g จะอยู่เหนือแกน x หรืออยู่ใต้แกน x อย่างใดอย่างหนึ่งตลอดทั้งช่วงย่อยนั้นอย่างแน่นอน ดังนั้น โดยอาศัยความจริงนี้ ในการตรวจสอบว่ากราฟของ g จะอยู่เหนือแกน x หรืออยู่ใต้แกน x ในแต่ละช่วงย่อย เราสามารถทำได้โดยเลือกจุด t ใด ๆ ในแต่ละช่วงย่อย ซึ่งเรียกว่า **ค่าทดสอบ** (test value) แล้วพิจารณาเครื่องหมายของ $g(t)$ ว่าเป็นบวกหรือเป็นลบ ถ้าเครื่องหมายของ $g(t)$ เป็นบวก (นั่นคือ $g(t) > 0$) แล้วจะได้ว่าเครื่องหมายของ $g(x)$ เป็นบวก (นั่นคือ $g(x) > 0$) สำหรับทุก ๆ x ในช่วงย่อยนั้น แต่ถ้าเครื่องหมายของ $g(t)$ เป็นลบ (นั่นคือ $g(t) < 0$) แล้วจะได้ว่าเครื่องหมายของ $g(x)$ เป็นลบ (นั่นคือ $g(x) < 0$) สำหรับทุก ๆ x ในช่วงย่อยนั้น ด้วย

สำหรับปัญหาของเรา จะเห็นว่าฟังก์ชันที่เราจะนำมาพิจารณาคือ f' และช่วงย่อยที่เกิดขึ้นนั้นเกิดจากการนำจุด x ทั้งหลาย ซึ่ง $f'(x) = 0$ หรือ $f'(x)$ หาไม่ได้ มาแบ่งส่วนของเซต $\mathbb{R}$ และถ้า f' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนแต่ละช่วงย่อยที่เกิดขึ้น เราสามารถใช้วิธีที่อธิบายไว้ข้างต้นในการพิจารณาว่ากราฟของ f' อยู่เหนือแกน x หรืออยู่ใต้แกน x ในแต่ละช่วงย่อยนั้นได้

ตัวอย่าง 3.3.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ จงหาช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด และจงวาดกราฟของ f อย่างคร่าว ๆ

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ แล้ว เราได้ว่า $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$

เห็นได้ชัดว่า $f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = -1$ หรือ 3 ดังนั้นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ -1 และ 3

เราจะเห็นว่าจุดวิกฤต 2 จุดนี้แบ่งแกน x ที่เหลือออกเป็น 3 ส่วนด้วยกันคือ $x < -1$, $-1 < x < 3$ และ $x > 3$

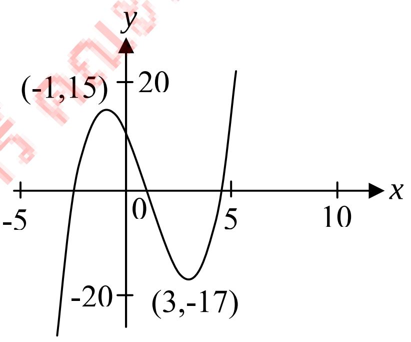
ในการพิจารณาว่า $f'(x)$ มีค่ามากกว่าศูนย์หรือน้อยกว่าศูนย์ในแต่ละช่วงดังกล่าวข้างต้น เราสามารถทำได้โดยใช้วิธีการใช้ค่าทดสอบที่ได้อธิบายไว้ข้างต้นได้ ทั้งนี้เพราะว่า f' เป็นพหุนาม ซึ่งเราทราบว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง บน $\mathbb{R}$

ตาราง 3.3.1 ต่อไปนี้แสดงให้เห็นเครื่องหมายของ $f'(t)$ เมื่อ t เป็นค่าทดสอบในแต่ละช่วง และเครื่องหมายของ $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ ในแต่ละช่วง

ช่วง	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
ค่าทดสอบ t	-2	0	4
$f'(t)$	15	-9	15
เครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง	+	-	+
ลักษณะของกราฟของ f	เพิ่ม	ลด	เพิ่ม

ตาราง 3.3.1

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,-1]$ และบนช่วง $[3,\infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-1,3]$ จากความรู้ข้างต้นเราอาจร่างกราฟของ f ได้ดังนี้



รูป 3.3.3

ข้อสังเกต จุดวิกฤต $x=-1$ ก่อให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์และจุดวิกฤต $x=3$ ก่อให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

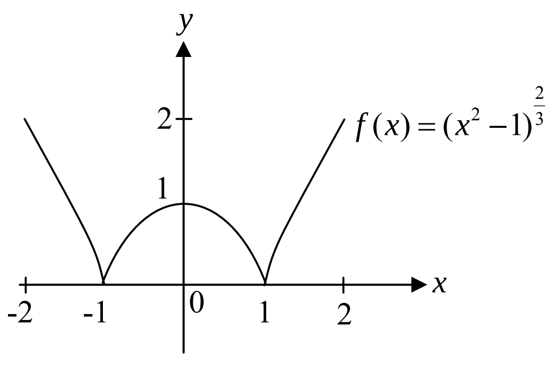
ตัวอย่าง 3.3.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$ จงหาช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด และจงวาดกราฟของ f อย่างคร่าว ๆ

วิธีทำ ให้ $f(x)=(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$ แล้ว เราได้ว่า $f'(x)=\dfrac{4x}{3(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}$ เพราะว่า $f'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=0$ และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x=1,-1$ ดังนั้นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ $x=0,1,-1$ ตาราง 3.3.2 แสดงให้เห็นเครื่องหมายของ $f'(t)$ เมื่อ t เป็นค่าทดสอบในแต่ละช่วง และเครื่องหมายของ $f'(x)=\dfrac{4x}{3(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}$

ช่วง	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
ค่าทดสอบ t	-3	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	3
$f'(t)$	-2	$\frac{2}{3(63)^{1/3}}$	$-\frac{2}{3(63)^{1/3}}$	2
เครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง	$-$	$+$	$-$	$+$
ลักษณะของกราฟของ f	ลด	เพิ่ม	ลด	เพิ่ม

ตาราง 3.3.2

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-1,0]$ และบนช่วง $[1,\infty)$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty,-1]$ และบนช่วง $[0,1]$ เราอาจวาดกราฟของ f อย่างคร่าว ๆ ได้ดังนี้



รูป 3.3.4

❍

ข้อสังเกต จุดวิกฤต 1 และ -1 ก่อให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และจุดวิกฤต 0 ก่อให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์

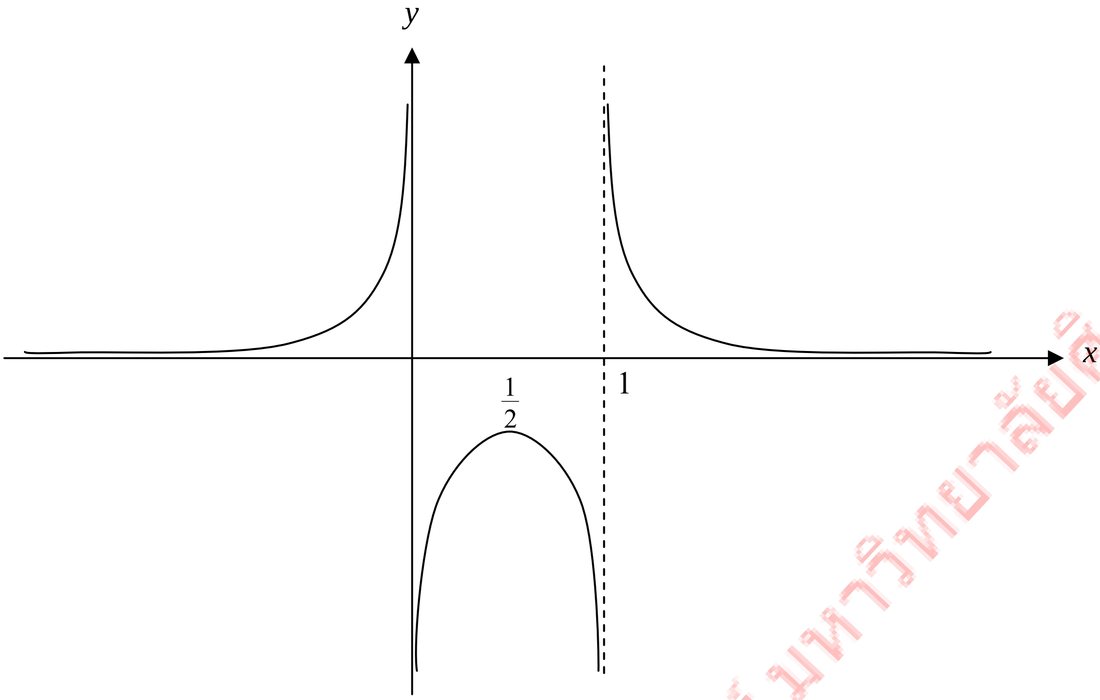
ตัวอย่าง 3.3.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$ จงหาช่วงที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด และจงวาดกราฟของ f อย่างคร่าว ๆ

วิธีทำ ให้ $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$ แล้ว เราได้ว่า $f'(x)=-\dfrac{2x-1}{(x^2-x)^2}$ เพราะว่า $f'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=\dfrac{1}{2}$ และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x=0,1$ ดังนั้นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ $x=\dfrac{1}{2}$ (เพราะว่า 0 และ 1 ไม่เป็นสมาชิกในโดเมนของ f) ตาราง 3.3.3 แสดงให้เห็นเครื่องหมายของ $f'(t)$ เมื่อ t เป็นค่าทดสอบในแต่ละช่วง และเครื่องหมายของ $f'(x)=-\dfrac{2x-1}{(x^2-x)^2}$

ช่วง	$(-\infty,0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},1)$	$(1,\infty)$
ค่าทดสอบ t	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	2
$f'(t)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{128}{9}$	$-\frac{128}{9}$	$-\frac{3}{4}$
เครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง	$+$	$+$	$-$	$-$
ลักษณะของกราฟของ f	เพิ่ม	เพิ่ม	ลด	ลด

ตาราง 3.3.3

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,0)$ และบนช่วง $(0,\frac{1}{2}]$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[\frac{1}{2},1)$ และบนช่วง $(1,\infty)$ เราอาจวาดกราฟของ f อย่างคร่าว ๆ ได้ดังนี้



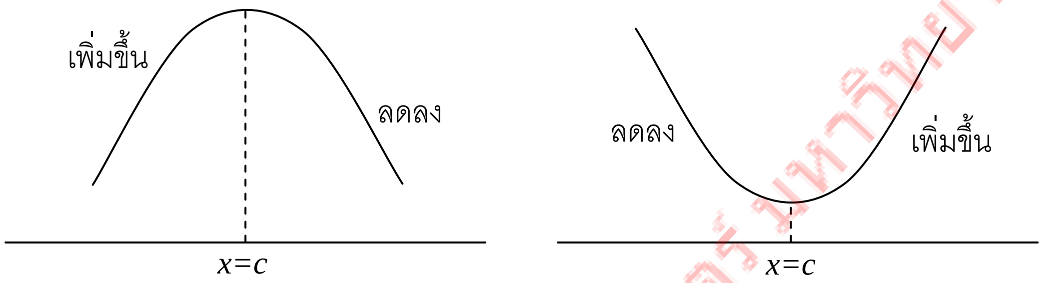
รูป 3.3.5

ข้อสังเกต จุดวิกฤต $\frac{1}{2}$ ก่อให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์

หมายเหตุ 1. การแบ่งช่วงเพื่อพิจารณาว่า f' มีค่ามากกว่าศูนย์หรือน้อยกว่าศูนย์ในตัวอย่าง 3.3.7 ข้างต้นนั้นเราจำเป็นต้องนำจุดที่ f' หาค่าไม่ได้มาประกอบการพิจารณาในการแบ่งช่วงด้วย ทั้งนี้เพื่อจะได้แน่ใจว่า $f'(x)$ หาค่าได้สำหรับทุก ๆ x ในช่วงที่พิจารณา

2. ขอให้สังเกตว่าเราสรุปว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,0)$ และบนช่วง $(0,\frac{1}{2}]$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[\frac{1}{2},1)$ และบนช่วง $(1,\infty)$ แทนที่จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,\frac{1}{2}]$ และเป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[\frac{1}{2},\infty)$ ทั้งนี้เพราะว่า 0 และ 1 ไม่เป็นสมาชิกในโดเมนของ f

จากข้อสังเกตท้ายตัวอย่าง 3.3.5 ตัวอย่าง 3.3.6 และตัวอย่าง 3.3.7 เราจะเห็นว่าถ้า $x=c$ เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f โดยที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a,c]$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $[c,b]$ แล้ว $x=c$ เป็นจุดที่ก่อให้เกิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ในขณะเดียวกันถ้า f เป็นฟังก์ชันลดบน $[a,c]$ และเป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[c,b]$ แล้ว จุดวิกฤต $x=c$ เป็นจุดที่ก่อให้เกิดค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f (ดูรูป 3.3.6) ซึ่งข้อสังเกตนี้สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.3.8 ที่จะกล่าวต่อไป ทฤษฎีบทนี้เป็นการทดสอบว่าจุดวิกฤตจุดใดเป็นจุดที่ก่อให้เกิดค่าสุดขีดสัมพัทธ์



รูป 3.3.6

ทฤษฎีบท 3.3.8 (การทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง : The First Derivative Test)

ให้ c เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f และ (a,b) เป็นช่วงเปิดที่ $c\in(a,b)$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) ซึ่งอาจยกเว้นที่ c

1. ถ้า $f'(x)>0$ เมื่อ $a<x<c$ และ $f'(x)<0$ เมื่อ $c<x<b$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

2. ถ้า $f'(x)<0$ เมื่อ $a<x<c$ และ $f'(x)>0$ เมื่อ $c<x<b$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

3. ถ้า $f'(x)>0$ สำหรับทุก ๆ $x\in(a,b)$ หรือ $f'(x)<0$ สำหรับทุก ๆ $x\in(a,b)$ ซึ่งอาจยกเว้นที่ c แล้ว $f(c)$ ไม่เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์

บทพิสูจน์ 1. จากเงื่อนไขของทฤษฎีบทเราได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a,c]$ และเป็นฟังก์ชันลดบน $[c,b]$ ดังนั้น $f(x)\le f(c)$ สำหรับทุก ๆ $x\in[a,c]$ และ $f(c)\ge f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x\in[c,b]$ แสดงว่า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f

การพิสูจน์ข้อ 2 และข้อ 3 ทำได้ในทำนองเดียวกันจึงให้เป็นแบบฝึกหัด $\square$

ตัวอย่าง 3.3.9 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x^2-8)$

วิธีทำ ให้ $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x^2-8)$ แล้ว เราได้ว่า

$$f'(x)=x^{\frac{2}{3}}(2x)+(x^2-8)\left(\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}\right)=\frac{6x^2+2(x^2-8)}{3x^{\frac{1}{3}}}=\frac{8(x^2-2)}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

เห็นได้ชัดว่าจุดวิกฤตของ f คือ $x=\sqrt{2},-\sqrt{2}$ และ 0 ตาราง 3.3.4 แสดงให้เห็นเครื่องหมายของ $f'(t)$ เมื่อ t เป็นค่าทดสอบในแต่ละช่วง และเครื่องหมายของ $f'(x)=\dfrac{8(x^2-2)}{3x^{\frac{1}{3}}}$

ช่วง	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2},0)$	$(0,\sqrt{2})$	$(\sqrt{2},\infty)$
ค่าทดสอบ t	-8	-1	1	8
$f'(t)$	$-\frac{248}{3}$	$\frac{8}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{248}{3}$
เครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง	$-$	$+$	$-$	$+$
ลักษณะของกราฟของ f	ลด	เพิ่ม	ลด	เพิ่ม

ตาราง 3.3.4

โดยทฤษฎีบท 3.3.8 เราจะได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $-\sqrt{2}$ และ $\sqrt{2}$ และ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ 0 ค่าสุดขีดสัมพัทธ์เหล่านี้คือ $f(0)=0$ และ $f(\sqrt{2})=-6\sqrt[3]{2}=f(-\sqrt{2})$ ❍

ตัวอย่าง 3.3.10 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=3x^4-16x^3+24x^2$

วิธีทำ ให้ $f(x)=3x^4-16x^3+24x^2$ แล้ว เราได้ว่า $f'(x)=12x^3-48x^2+48x=12x(x-2)^2$

เห็นได้ชัดว่าจุดวิกฤตของ f คือ $x=0$ และ 2 ตาราง 3.3.5 แสดงให้เห็นเครื่องหมายของ $f'(t)$ เมื่อ t เป็นค่าทดสอบในแต่ละช่วง และเครื่องหมายของ $f'(x)=12x^3-48x^2+48x$

ช่วง	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
ค่าทดสอบ t	-1	1	3
$f'(t)$	-108	12	36
เครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง	$-$	$+$	$+$
ลักษณะของกราฟของ f	ลด	เพิ่ม	เพิ่ม

ตาราง 3.3.5

โดยทฤษฎีบท 3.3.8 เราได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ 0 และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์นั้นคือ $f(0)=0$ สำหรับที่จุดวิกฤต $x=2$ f ไม่มีทั้งค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ❍

ตัวอย่าง 3.3.11 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=|x^2-1|$

วิธีทำ ให้ $f(x)=|x^2-1|$ แล้ว เราได้ว่า

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x^2-1\geq 0 \\ -(x^2-1), & x^2-1<0 \end{cases}$$

หรือ

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty) \\ -(x^2-1), & x\in(-1,1) \end{cases}$$

เราสามารถแสดงได้โดยไม่ยากว่าอนุพันธ์ของ f หาค่าไม่ได้ที่ $x=1$ และ -1 และสำหรับ $x\neq -1,1$ เราได้ว่า

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty) \\ -2x, & x\in(-1,1) \end{cases}$$

และ $f'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=0$ ดังนั้นจุดวิกฤตของ f คือ $x=-1,1$ และ 0 ตาราง 3.3.6 แสดงให้เห็นเครื่องหมายของ $f'(t)$ เมื่อ t เป็นค่าทดสอบในแต่ละช่วง และเครื่องหมายของ f'

ช่วง	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
ค่าทดสอบ t	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
$f'(t)$	-4	1	-1	4
เครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง	$-$	$+$	$-$	$+$
ลักษณะของกราฟของ f	ลด	เพิ่ม	ลด	เพิ่ม

ตาราง 3.3.6

ดังนั้น $f(-1)=0$ และ $f(1)=0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f และ $f(0)=1$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ❍

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3.3 ข้อ 2
2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3.4 ข้อ 2
3. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3.8 ข้อ 2 และทฤษฎีบท 3.3.8 ข้อ 3
4. จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด และจงวาดกราฟของ f อย่างคร่าว ๆ

   4.1 $f(x)=x^2+6x-10$ 4.2 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+12$

   4.3 $f(x)=\frac{1}{6}x^2-\sqrt[3]{x}$ 4.4 $f(x)=x-\sqrt{x}$

4.5 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

4.6 $f(x)=|4-x^2|$

4.7 $f(x)=2x+\dfrac{1}{2x}$

4.8 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

4.9 $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$

4.10 $f(x)=(x-2)^2(x+1)^2$

5. ถ้าฟังก์ชัน $f(x)=2x^3-3ax^2+6$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0,3]$ เท่านั้นแล้ว จงหาค่าของ a

6. ถ้าผลรวมของจำนวน 2 จำนวนเท่ากับ 50 และให้ x เป็นหนึ่งในจำนวนนี้แล้ว จงหาค่าของ x ที่จะทำให้ผลคูณของ 2 จำนวนนี้มากขึ้น

7. จงร่างกราฟของฟังก์ชัน f ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้

7.1 $f(-1)=0$, $f'(x)<0$ เมื่อ $x<-1$, $f'(-1)=0$ และ $f'(x)>0$ เมื่อ $x>-1$

7.2 $f(3)=5$, $f'(x)<0$ เมื่อ $x<3$, $f'(3)=0$ และ $f'(x)>0$ เมื่อ $x>3$

7.3 $f'(-5)=0$, $f'(0)=0$, $f'(5)=0$; $f'(x)>0$ เมื่อ $|x|>5$ และ $f'(x)<0$ เมื่อ $0<|x|<5$

8. จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

8.1 $f(x)=5-7x-4x^2$

8.2 $f(x)=2x^3+x^2-20x+1$

8.3 $f(x)=x^4-8x^2+1$

8.4 $f(x)=x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}$

8.5 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1}, & x\neq -1\\ 0, & x=-1\end{cases}$

8.6 $f(x)=x^3+\dfrac{3}{x}$

8.7 $f(x)=x-2\cos x$

8.8 $f(x)=\sqrt[3]{x^3-9x}$

8.9 $f(x)=\dfrac{2x-5}{x+3}$

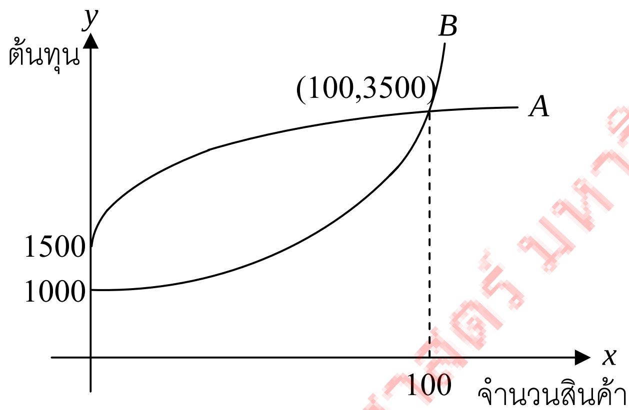
8.10 $f(x)=|x^3-12x|$

9. ให้ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ จงหาค่าของ a, b, c และ d เมื่อทราบว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 2 ที่ $x=-1$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -1 ที่ $x=1$

10. ให้ $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ จงหาค่าของ a, b, c, d และ e เมื่อทราบว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 2 ที่ $x=0$ และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -14 ที่ $x=2$ และ -2

3.4 ความเว้าของกราฟของฟังก์ชัน

ในหัวข้อ 3.3 เราได้ใช้ความรู้ในเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันในการศึกษาลักษณะการเพิ่มขึ้นและการลดลงของฟังก์ชันมาแล้ว ถึงแม้ว่าการเพิ่มขึ้นและการลดลงของฟังก์ชันจะทำให้เราเข้าใจลักษณะต่าง ๆ ของฟังก์ชันได้ แต่ก็ยังไม่เพียงพอต่อการนำความรู้ในเรื่องดังกล่าวไปใช้ในการประยุกต์ ตัวอย่างเช่นสมมติว่าต้นทุนในการผลิตสินค้าชนิดหนึ่งโดยใช้กรรมวิธี A และกรรมวิธี B เป็นไปตามกราฟในรูป 3.4.1

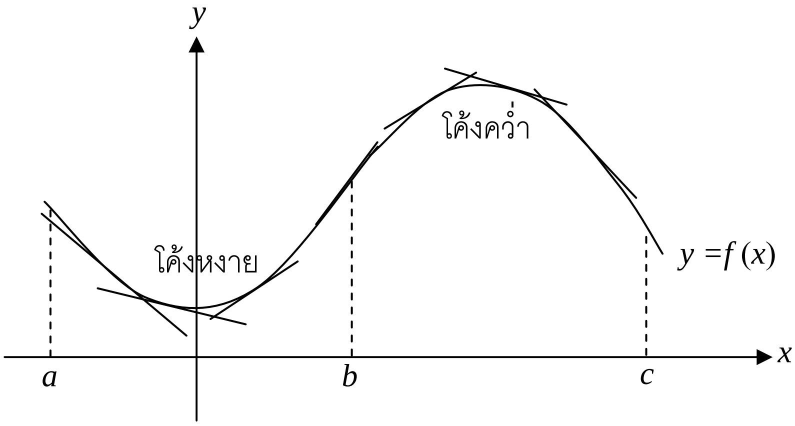


รูป 3.4.1

เราจะเห็นว่าถ้าบริษัทต้องการผลิตสินค้าไม่เกิน 100 ชิ้น การใช้กรรมวิธี B จะทำให้ต้นทุนการผลิตสินค้าต่ำกว่าการใช้กรรมวิธี A แต่ถ้าบริษัทต้องการผลิตสินค้ามากกว่า 100 ชิ้นเราจะเห็นว่า ต้นทุนการผลิตสินค้าโดยใช้กรรมวิธี A จะเพิ่มขึ้นอย่างช้า ๆ ในขณะที่ต้นทุนการผลิตสินค้าโดยใช้กรรมวิธี B เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว ดังนั้นในการผลิตสินค้าจำนวนมาก ๆ (มากกว่า 100 ชิ้น) บริษัทควรใช้กรรมวิธี A

ขอให้เราสังเกตว่ากราฟ A และ B เป็นลักษณะของฟังก์ชันเพิ่มทั้งคู่ แต่มีลักษณะความเว้าของกราฟต่างกัน กล่าวคือกราฟ A มีลักษณะของโค้งคว่ำ ในขณะที่กราฟ B มีลักษณะของโค้งหงาย เราเรียกลักษณะของโค้งคว่ำหรือโค้งหงายของกราฟของฟังก์ชันว่า**ความเว้า** (concavity) ของกราฟ

ก่อนที่เราจะให้บทนิยามของโค้งคว่ำและโค้งหงาย ขอให้เราสังเกตจากรูป 3.4.2 ว่า เมื่อเราลากเส้นสัมผัสกราฟที่มีลักษณะของโค้งหงาย เส้นกราฟของโค้งหงายนั้นจะอยู่เหนือเส้นสัมผัส (อาจยกเว้นที่จุดสัมผัส) ในขณะที่เส้นกราฟของโค้งคว่ำนั้นจะอยู่ใต้เส้นสัมผัส (อาจยกเว้นที่จุดสัมผัส)



รูป 3.4.2

บทนิยาม 3.4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) เรากล่าวว่า f เป็น **โค้งหงาย** (concave up) บน $[a,b]$ ถ้ากราฟของ f อยู่เหนือเส้นสัมผัสกราฟตลอดช่วง (a,b) และกล่าวว่า f เป็น**โค้งคว่ำ** (concave down) บน $[a,b]$ ถ้ากราฟ f อยู่ใต้เส้นสัมผัสกราฟตลอดช่วง (a,b)

ถ้าเราย้อนกลับไปพิจารณารูป 3.4.2 อีกครั้ง โดยพิจารณากราฟของ f จากซ้ายไปขวา เราจะเห็นว่าบน $[a,b]$ ซึ่ง f เป็นโค้งหงายนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกราฟมีค่าเพิ่มขึ้น หรืออาจกล่าวได้ว่า f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a,b]$ ซึ่งหมายความว่า $f''(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a,b)$ เมื่อ f'' หาค่าได้ ในขณะเดียวกันบน $[b,c]$ ซึ่ง f เป็นโค้งคว่ำนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกราฟมีค่าลดลง หรืออาจกล่าวได้ว่า f' เป็นฟังก์ชันลดบน $[b,c]$ ซึ่งหมายความว่า $f''(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (b,c)$ เมื่อ f'' หาค่าได้ เราจะเห็นว่าลักษณะความเว้าของกราฟของ f มีผลต่อเครื่องหมายของ f'' (เป็นบวกหรือลบ) ในทางกลับกัน เราอาจใช้เครื่องหมายของ f'' ในการบ่งบอกลักษณะความเว้าของกราฟของ f ได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

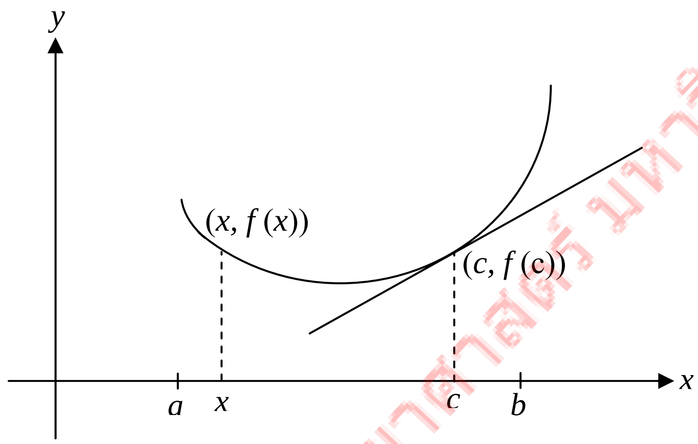
ทฤษฎีบท 3.4.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ f'' หาค่าได้บน (a,b)

1. ถ้า $f''(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a,b)$ แล้ว f เป็นโค้งหงายบน $[a,b]$

2. ถ้า $f''(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a,b)$ แล้ว f เป็นโค้งคว่ำบน $[a,b]$

บทพิสูจน์ เราจะแสดงการพิสูจน์ข้อ 1 เท่านั้น สำหรับการพิสูจน์ข้อ 2 ทำได้ในทำนองเดียวกันจึงให้เป็นแบบฝึกหัด

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทและ $f''(x)>0$ สำหรับทุก ๆ $x\in(a,b)$ เราจะแสดงว่า f เป็นโค้งหงาย ให้ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่อยู่ใน (a,b) เราได้ว่าสมการเส้นสัมผัสกราฟของ f ที่จุด $(c,f(c))$ คือ $y=f(c)+f'(c)(x-c)$ ในการแสดงว่า f เป็นโค้งหงายเราจะต้องแสดงว่า $f(x)\geq f(c)+f'(c)(x-c)$ สำหรับทุก ๆ x ใน (a,b) (ดูรูป3.4.3)



รูป 3.4.3

ถ้า $x=c$ เห็นได้ชัดว่าสมการข้างต้นเป็นจริง ต่อไปเราจะพิจารณากรณีที่ $x\neq c$ โดยใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม (ทฤษฎีบท 3.2.7) กับฟังก์ชัน f เราได้ว่าจะมีจำนวนจริง x_1 ที่อยู่ระหว่าง x และ c ซึ่ง

$$f'(x_1)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

หรืออาจเขียนได้ว่า

$$f(x)=f(c)+f'(x_1)(x-c) \tag{3.4.1}$$

เราจะเริ่มด้วยการพิจารณากรณี $c<x_1<x$ เพราะว่า $f''(t)>0$ สำหรับทุก ๆ $t\in(a,b)$ แสดงว่า f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a,b]$ ดังนั้น $f'(x_1)>f'(c)$ จากสมการ (3.4.1) เราได้ว่า $f(x)\geq f(c)+f'(c)(x-c)$

ต่อไปเราพิจารณากรณี $x<x_1<c$ ในทำนองเดียวกันเราได้ว่า $f'(x_1)<f'(c)$ เนื่องจาก $x<c$ ดังนั้น $f'(x_1)(x-c)>f'(c)(x-c)$ จากสมการ (3.4.1) เราได้ว่า $f(x)\geq f(c)+f'(c)(x-c)$ □

ตัวอย่าง 3.4.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=x^4-6x^2+2$ จงพิจารณาช่วงที่ f เป็นโค้งคว่ำและโค้งหงาย และจงวาดกราฟของ f อย่างคร่าว ๆ

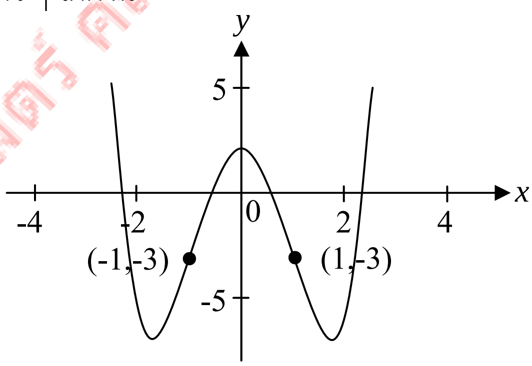
วิธีทำ ให้ $f(x)=x^4-6x^2+2$ แล้ว เราจะได้ว่า $f'(x)=4x^3-12x$ และ $f''(x)=12x^2-12$ $=12(x-1)(x+1)$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $f''(x)=0$ เมื่อ $x=1$ หรือ -1 เราจะเห็นว่า 1 และ -1 แบ่งแกน x ที่เหลือออกเป็น 3 ส่วนด้วยกันคือ $x<-1$, $-1<x<1$ และ $x>1$

ต่อไปเราพิจารณาว่า $f''(x)$ มีค่ามากกว่าศูนย์หรือน้อยกว่าศูนย์ในแต่ละช่วงดังกล่าวข้างต้นโดยใช้ค่าทดสอบ t ที่อยู่ในช่วงนั้น ๆ ดังตาราง 3.4.1 ต่อไปนี้

ช่วง	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
ค่าทดสอบ t	-2	0	2
$f''(t)$	36	-12	36
เครื่องหมายของ $f''(x)$ บนช่วง	$+$	$-$	$+$
ลักษณะความเว้าของ f	โค้งหงาย	โค้งคว่ำ	โค้งหงาย

ตาราง 3.4.1

เราจะได้ว่า f เป็นโค้งหงายบน $(-\infty,-1]$ และบน $[1,\infty)$ ในขณะที่ f เป็นโค้งคว่ำบน $[-1,1]$ เราอาจเขียนกราฟของ f อย่างคร่าว ๆ ได้ดังนี้



รูป 3.4.4

ตัวอย่าง 3.4.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=\dfrac{8}{(x+5)^3}$ จงพิจารณาช่วงที่ f เป็นโค้งคว่ำและโค้งหงาย และจงวาดกราฟของ f อย่างคร่าว ๆ

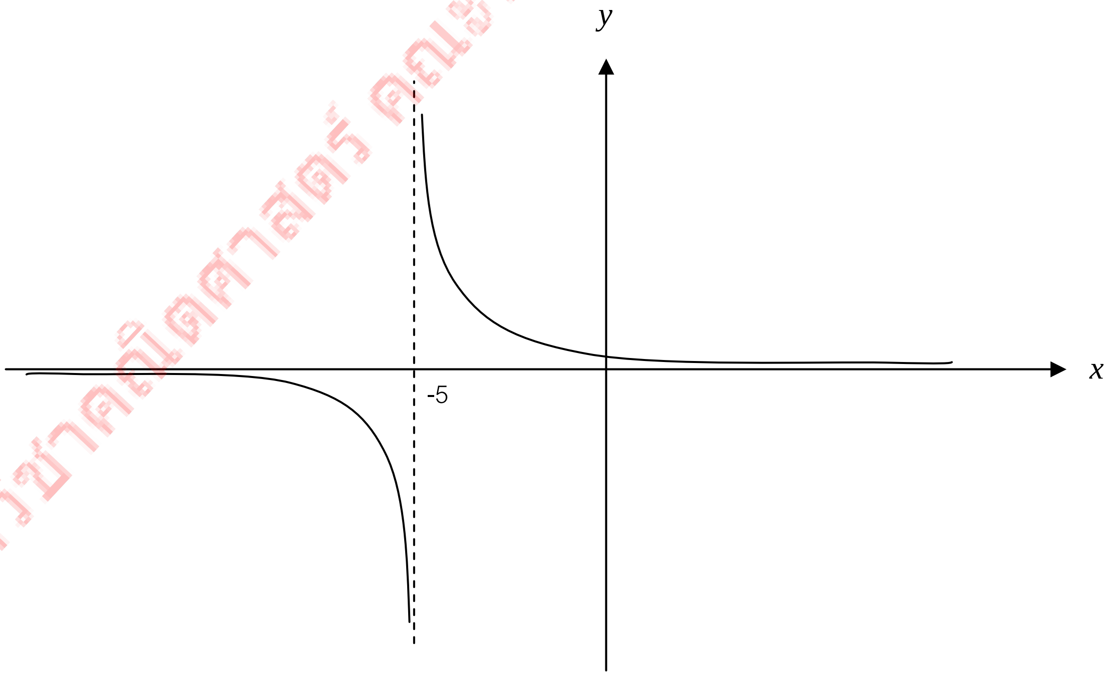
วิธีทำ ให้ $f(x)=\dfrac{8}{(x+5)^3}$ แล้ว เราจะได้ว่า $f'(x)=\dfrac{-24}{(x+5)^4}$ และ $f''(x)=\dfrac{96}{(x+5)^5}$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $f''(x)\neq 0$ ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใด ๆ และจะเห็นว่า $f''(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x=-5$ ซึ่ง -5 แบ่งแกน x ที่เหลือออกเป็น 2 ส่วนด้วยกันคือ $x<-5$ และ $x>-5$

ต่อไปเราพิจารณาว่า $f''(x)$ มีค่ามากกว่าศูนย์หรือน้อยกว่าศูนย์ในแต่ละช่วงดังกล่าวข้างต้นโดยใช้ค่าทดสอบ t ที่อยู่ในช่วงนั้น ๆ ดังตาราง 3.4.2 ต่อไปนี้

ช่วง	$(-\infty,-5)$	$(-5,\infty)$
ค่าทดสอบ t	-6	1
$f''(t)$	-96	$\dfrac{1}{81}$
เครื่องหมายของ $f''(x)$ บนช่วง	$-$	$+$
ลักษณะความเว้าของ f	โค้งคว่ำ	โค้งหงาย

ตาราง 3.4.2

เราจะได้ว่า f เป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty,-5)$ และ f เป็นโค้งหงายบน บน $(-5,\infty)$ เราอาจเขียนกราฟของ f อย่างคร่าว ๆ ได้ดังนี้



รูป 3.4.5 ❍

หมายเหตุ 1. ในตัวอย่าง 3.4.4 เราจะเห็นว่า $f''(x) \neq 0$ ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใด ๆ แต่การแบ่งช่วงเพื่อพิจารณาว่า f'' มีค่ามากกว่าศูนย์หรือน้อยกว่าศูนย์ในตัวอย่าง 3.4.4 ข้างต้นนั้นเราจำเป็นต้องนำจุดที่ f'' หาค่าไม่ได้มาประกอบการพิจารณาในการแบ่งช่วงด้วย ทั้งนี้เพื่อจะได้แน่ใจว่า $f''(x)$ หาค่าได้สำหรับทุก ๆ x ในช่วงที่พิจารณา

2. ขอให้สังเกตว่าเราสรุปว่า f เป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty,-5)$ และเป็นโค้งหงายบน $(-5,\infty)$ แทนที่จะกล่าวว่า f เป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty,-5]$ และเป็นโค้งหงายบน $[-5,\infty)$ ทั้งนี้เพราะว่า -5 ไม่เป็นสมาชิกในโดเมนของ f

จากตัวอย่าง 3.4.3 เราจะเห็นว่าจุด $(-1,-3)$ และ $(1,-3)$ เป็นจุดที่กราฟเปลี่ยนจากโค้งหงายไปเป็นโค้งคว่ำ และเปลี่ยนจากโค้งคว่ำไปเป็นโค้งหงายตามลำดับ เราเรียกจุดเหล่านี้ว่าจุดเปลี่ยนความเว้า ซึ่งจะให้บทนิยามที่ชัดเจนต่อไปนี้

บทนิยาม 3.4.5 เราจะเรียกจุด $(c, f(c))$ บนกราฟของฟังก์ชัน f ว่า**จุดเปลี่ยนความเว้า** (inflection point) ถ้ามีช่วงเปิด (a,b) ซึ่ง c เป็นสมาชิกใน (a,b) ที่ทำให้ข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

1. f เป็นโค้งหงายบน $[a,c]$ และ f เป็นโค้งคว่ำบน $[c,b]$

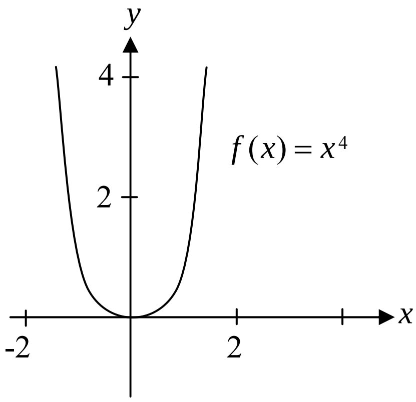
หรือ

2. f เป็นโค้งคว่ำบน $[a,c]$ และ f เป็นโค้งหงายบน $[c,b]$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ให้เงื่อนไขจำเป็นของฟังก์ชันที่จะมีจุดเปลี่ยนความเว้า สำหรับการพิสูจน์จะละไว้ให้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.4.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้บน (a,b) ถ้า f มี $(c, f(c))$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้าโดยที่ $c \in (a,b)$ แล้ว $f''(c) = 0$ หรือ $f''(c)$ หาค่าไม่ได้ □

บทกลับของทฤษฎีบท 3.4.6 ไม่จริง นั่นคือถ้า $f''(c)=0$ หรือ $f''(c)$ หาค่าไม่ได้แล้ว $(c, f(c))$ ไม่จำเป็นต้องเป็นจุดเปลี่ยนความเว้าของ f ตัวอย่างเช่นฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=x^4$ กราฟของ f แสดงดังในรูป 3.4.6 เห็นได้ชัดว่า $f''(0)=0$ แต่ $(0,0)$ ไม่ใช่จุดเปลี่ยนความเว้าของ f



รูป 3.4.6

จากทฤษฎีบท 3.4.6 เราทราบว่า ถ้า $(c, f(c))$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้าของฟังก์ชัน f แล้ว $f''(c)=0$ หรือ $f''(c)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นในการพิจารณาหาจุดเปลี่ยนความเว้าของฟังก์ชัน f เราจะทำได้ดังนี้

1. พิจารณาค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน f ซึ่ง $f''(x)=0$ หรือ $f''(x)$ หาค่าไม่ได้

2. จากค่าในข้อ 1 ค่า x ค่าใดที่มีสมบัติว่าเครื่องหมายของ f'' ต่างกันบนช่วง (a,x) และ (x,b) สำหรับ a และ b บางตัว จุด $(x, f(x))$ ดังกล่าวนี้เป็นจุดเปลี่ยนความเว้าของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 3.4.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}$ จงหาจุดวิกฤต จุดเปลี่ยนความเว้าของฟังก์ชัน f และช่วงที่ f เป็นโค้งคว่ำและโค้งหงาย พร้อมทั้งวาดกราฟของ f อย่างคร่าว ๆ

วิธีทำ ให้ $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}$ แล้วเราได้ว่า $f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}=\frac{2-x}{3x^{\frac{1}{3}}}$ เห็นได้ชัดว่าจุดวิกฤตของ f คือ 0 และ 2 ต่อไปพิจารณา f'' เราได้ว่า

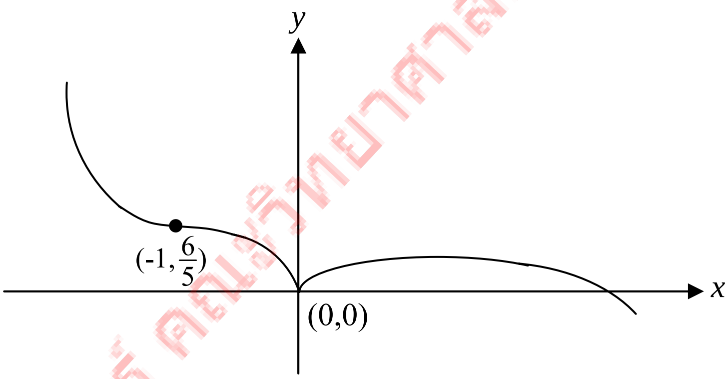
$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{\frac{-4}{3}}-\frac{2}{9}x^{\frac{-1}{3}}=-\frac{2(1+x)}{9x^{\frac{4}{3}}}$$

เห็นได้ชัดว่า $f''(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=-1$ และ $f''(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x=0$ ซึ่งทำให้เราพิจารณาเครื่องหมายของ f'' บนช่วง $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$ และ $(0,\infty)$ ดังในตารางต่อไปนี้

ช่วง	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
ค่าทดสอบ t	-2	$-\frac{1}{2}$	1
$f''(t)$	$\frac{2}{9(-2)^{4/3}}$	$-\frac{2^{4/3}}{9}$	$-\frac{4}{9}$
เครื่องหมายของ $f''(x)$ บนช่วง	$+$	$-$	$-$
ลักษณะความเว้าของ f	โค้งหงาย	โค้งคว่ำ	โค้งคว่ำ

ตาราง 3.4.3

เราจะได้ว่า f เป็นโค้งหงายบน $(-\infty,-1]$ และโค้งคว่ำบน $[-1,\infty)$ ดังนั้นจุด $\left(-1,\frac{6}{5}\right)$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า ในขณะที่ $(0,0)$ ไม่เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า กราฟของ f อาจเขียนคร่าว ๆ ได้ดังในรูป 3.4.7



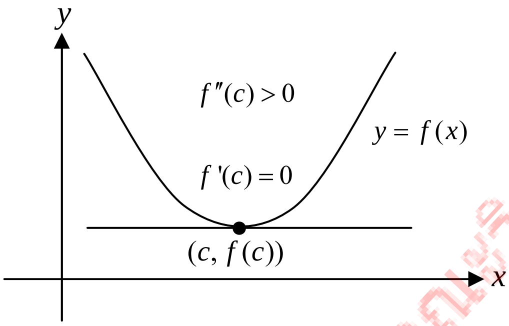
รูป 3.4.7

ตัวอย่าง 3.4.8 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=\frac{1}{x}$ จงหาจุดเปลี่ยนความเว้า และช่วงที่ฟังก์ชันเป็นโค้งคว่ำและโค้งหงาย

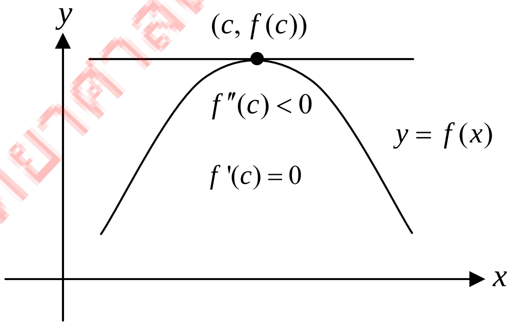
วิธีทำ ให้ $f(x)=\frac{1}{x}$ แล้ว เราจะได้ว่า $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ และ $f''(x)=\frac{2}{x^3}$ เห็นได้ชัดว่า $f''(x)\neq 0$ สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ และ $f''(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x=0$ นอกจากนั้น $f''(x)>0$ เมื่อ $x>0$ และ $f''(x)<0$ เมื่อ $x<0$ ดังนั้น f เป็นโค้งหงายบน $(0,\infty)$ และเป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty,0)$ เนื่องจาก f ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$ ดังนั้น f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 3.4.8 จะเห็นว่าโดเมนของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{1}{x}$ คือ $\mathbb{R}-\{0\}$ ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องบน $(-\infty,0]$ และ $[0,\infty)$ แต่ต่อเนื่องบน $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ เราจึงสรุปได้เพียงว่า f เป็นโค้งคว่ำบน $(-\infty,0)$ และเป็นโค้งหงายบน $(0,\infty)$

เราอาจนำความรู้ในเรื่องโค้งคว่ำและโค้งหงายมาใช้ในการศึกษาการทดสอบว่าจุดวิกฤตจุดใดเป็นจุดที่ก่อให้เกิดค่าสุดขีดสัมพัทธ์ ก่อนอื่นขอให้เราสังเกตว่า ถ้า c เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f โดยที่ $f'(c)=0$ แล้ว โดยความหมายทางเรขาคณิตเราได้ว่ากราฟของฟังก์ชัน f มีเส้นสัมผัสกราฟที่ $(c, f(c))$ ซึ่งขนานกับแกน x ถ้าอนุพันธ์อันดับสองของ f หาค่าได้บนช่วงเปิดที่มี c เป็นสมาชิกอยู่ด้วย และ $f''(c)>0$ แสดงว่า f เป็นโค้งหงายที่ $(c, f(c))$ (ดูรูป 3.4.8) ผลที่ตามมาคือ $f(c)$ น่าจะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ในทำนองเดียวกันถ้า $f''(c)<0$ แล้ว f เป็นโค้งคว่ำที่ $(c, f(c))$ และ $f(c)$ น่าจะเป็นค่าสูดสุดสัมพัทธ์ของ f (ดูรูป 3.4.9)



รูป 3.4.8



รูป 3.4.9

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ยืนยันข้อสังเกตข้างต้น

ทฤษฎีบท 3.4.9 **(การทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่สอง** : The Second Derivative Test)

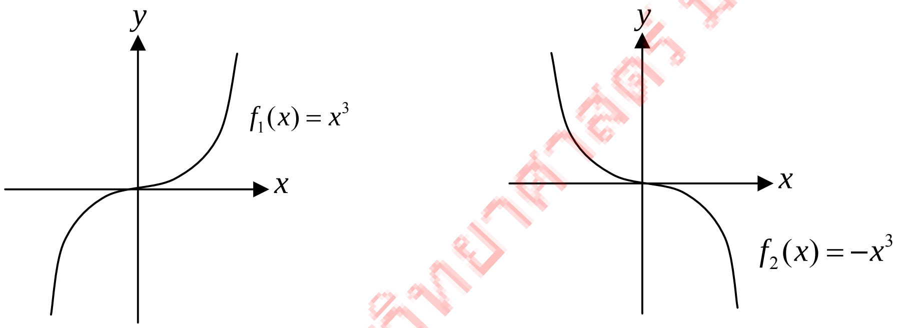
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์อันดับที่สองได้บนช่วงเปิด (a,b) ที่มี c เป็นสมาชิก และ $f'(c)=0$

1. ถ้า $f''(c)<0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
2. ถ้า $f''(c)>0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

บทพิสูจน์ เราจะพิสูจน์ข้อ 1 เท่านั้น สำหรับการพิสูจน์ข้อ 2 ทำได้ในทำนองเดียวกันจึงให้เป็นแบบฝึกหัด

ให้ $f''(c)<0$ เราได้ว่า $f''(c)=\lim_{x\to c}\dfrac{f'(x)-f'(c)}{x-c}<0$ จากความรู้เรื่องลิมิตเราได้ว่า จะมีช่วงบางช่วงที่มี c เป็นสมาชิก และ $\dfrac{f'(x)-f'(c)}{x-c}<0$ เพราะว่า $f'(c)=0$ ดังนั้น $\dfrac{f'(x)}{x-c}<0$ ถ้า $x<c$ แล้ว $f'(x)>0$ และถ้า $x>c$ แล้ว $f'(x)<0$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.3.8 เราได้ว่า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f $\square$

เราจะเห็นว่าทฤษฎีบท 3.4.9 ไม่ได้กล่าวถึงกรณีที่ $f'(c)=0$ และ $f''(c)=0$ ทั้งนี้เพราะว่ากรณีที่ $f'(c)=0$ และ $f''(c)=0$ นั้น เราไม่สามารถสรุปได้ว่าที่จุด $x=c$ ค่าของฟังก์ชัน $f(c)$ จะเป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์หรือไม่ ทั้งนี้พิจารณาได้จากฟังก์ชัน f_1 และ f_2 ซึ่งกราฟของฟังก์ชัน f_1 และ f_2 แสดงดังในรูป 3.4.10 ขอให้สังเกตว่าค่าของ $f_1'(0)=f_1''(0)=0$ และ $f_2'(0)=f_2''(0)=0$ แต่ $f_1(0)$ และ $f_2(0)$ ต่างไม่เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์



รูป 3.4.10

ตัวอย่าง 3.4.10 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

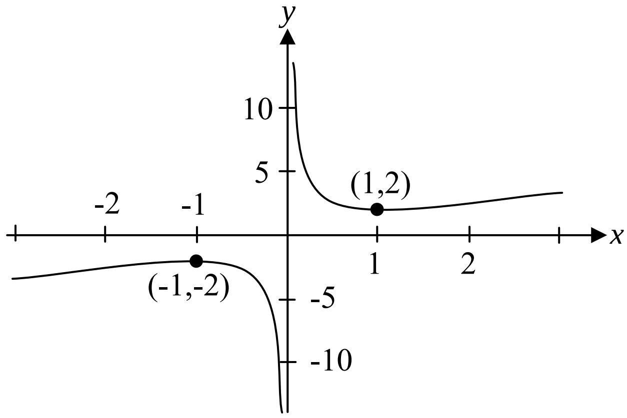
วิธีทำ ให้ $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ เราได้ว่า $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ เห็นได้ชัดว่า $f'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=1$ หรือ -1 และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x=0$ เพราะว่า 0 ไม่เป็นสมาชิกในโดเมนของ f

ดังนั้นจุดวิกฤตของ f คือ 1 และ -1 เนื่องจาก $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$ เราได้ว่า

$$f''(1)=2>0 \qquad \text{และ} \qquad f''(-1)=-2<0$$

ดังนั้น $f(1)=2$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f และ $f(-1)=-2$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ❍

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 3.4.10 ขอให้สังเกตว่าค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f มีค่าน้อยกว่าค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f ซึ่งเป็นไปได้ เราจะเห็นได้จากกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ ซึ่งแสดงไว้ในรูป 3.4.11



รูป 3.4.11

ตัวอย่าง 3.4.11 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=3x^{\frac{1}{3}}-x$

วิธีทำ ให้ $f(x)=3x^{\frac{1}{3}}-x$ เราได้ว่า $f'(x)=x^{\frac{-2}{3}}-1=\frac{1-x^{2/3}}{x^{2/3}}$ เห็นได้ชัดว่า $f'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=1$ หรือ -1 และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x=0$ ดังนั้นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ 1, -1 และ 0 ต่อไปเราจะหา f'' เราได้ว่า $f''(x)=-\frac{2}{3}x^{-5/3}$ เพราะว่า $f''(1)=-\frac{2}{3}$ และ $f''(-1)=\frac{2}{3}$ ดังนั้น $f(1)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ และ $f(-1)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เพราะว่า 0 เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชันซึ่ง $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ เราจึงไม่อาจนำการทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับที่สองมาใช้ เราต้องใช้การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง เนื่องจากจุดวิกฤต 1, -1 และ 0 แบ่งแกน x ที่เหลือออกเป็น 4 ช่วง คือ $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ และ $(1,\infty)$ และเราต้องการพิจารณาว่า 0 เป็นจุดวิกฤตที่ก่อให้เกิดค่าสุดขีดสัมพัทธ์หรือไม่ ดังนั้นเราจะพิจารณากราฟของฟังก์ชันบนช่วง $(-1,0)$ และ $(0,1)$ เท่านั้น

พิจารณาตารางต่อไปนี้

ช่วง	$(-1,0)$	$(0,1)$
ค่าทดสอบ t	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$f'(t)$	3	3
เครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง	+	+
ลักษณะของกราฟของ f	เพิ่ม	เพิ่ม

ตาราง 3.4.4

โดยการทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเราได้ว่า $f(0)$ ไม่เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ดังนั้น f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $x=1$ และ -1 เท่านั้น ❍

ตัวอย่าง 3.4.12 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=x^2-3x^{\frac{4}{3}}$

วิธีทำ ให้ $f(x)=x^2-3x^{\frac{4}{3}}$ เราได้ว่า $f'(x)=2x-4x^{\frac{1}{3}}=2x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}}-2)$ เห็นได้ชัดว่า $f'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=0, \sqrt{8}, -\sqrt{8}$ ดังนั้นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน f คือ $0, \sqrt{8}, -\sqrt{8}$ ต่อไปเราจะหา f'' เราได้ว่า $f''(x)=2-\frac{4}{3}x^{\frac{-2}{3}}$ และ $f''(\sqrt{8})=f''(-\sqrt{8})=\frac{4}{3}$ ดังนั้น $f(\sqrt{8})=-4$ และ $f(-\sqrt{8})=-4$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เนื่องจาก $f''(0)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นเราไม่สามารถใช้การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับที่สอง เราต้องใช้การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง เนื่องจากจุดวิกฤต $0, \sqrt{8}$ และ $-\sqrt{8}$ แบ่งแกน x ที่เหลือออกเป็น 4 ช่วง คือ $(-\infty,-\sqrt{8})$, $(-\sqrt{8},0)$, $(0,\sqrt{8})$ และ $(\sqrt{8},\infty)$ และเราต้องการพิจารณาว่าจุดวิกฤต 0 เป็นจุดที่ก่อให้เกิดค่าสุดขีดสัมพัทธ์หรือไม่ ดังนั้นเราจะพิจารณากราฟของฟังก์ชันเฉพาะบนช่วง $(-\sqrt{8},0)$ และ $(0,\sqrt{8})$

พิจารณาตารางต่อไปนี้

ช่วง	$(-\sqrt{8},0)$	$(0,\sqrt{8})$
ค่าทดสอบ t	-1	1
$f'(t)$	2	-2
เครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง	$+$	$-$
ลักษณะของกราฟของ f	เพิ่ม	ลด

ตาราง 3.4.5

ดังนั้น $f(0)=0$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน f ❍

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.4.2 (2)
2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.4.8 (2)
3. จงพิจารณาช่วงที่ฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นโค้งคว่ำและโค้งหงาย พร้อมทั้งหาจุดเปลี่ยนความเว้าของฟังก์ชัน

   3.1 $f(x)=x^3-3x^2+3$ 3.2 $f(x)=x^3-9x^2+12x-6$

   3.3 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ 3.4 $f(x)=(2x+1)^3$

   3.5 $f(x)=(x-2)^{\frac{1}{3}}$ 3.6 $f(x)=\dfrac{1}{12}(x^4-8x^3+18x^2+9)$

   3.7 $f(x)=x^4-2x^3$ 3.8 $f(x)=3x^5-20x^3$

4. สำหรับฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาจุดวิกฤต ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน ช่วงที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด โค้งคว่ำ โค้งหงาย พร้อมทั้งจุดเปลี่ยนความเว้าของฟังก์ชัน

   4.1 $f(x)=x\sqrt{x+1}$ 4.2 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3$

   4.3 $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ 4.4 $f(x)=(x-1)^2(x+1)^2$

   4.5 $f(x)=3+x^{\frac{2}{3}}$ 4.6 $f(x)=x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}$

   4.7 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ 4.8 $f(x)=x\sqrt{x^2-4}$

   4.9 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\neq -1\\ 0, & x=-1\end{cases}$ 4.10 $f(x)=x^4-6x^2$

5. ในแต่ละข้อต่อไปนี้จงร่างกราฟของฟังก์ชัน f ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

   5.1 กราฟของ f เป็นโค้งหงายและเป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty,0]$ เป็นโค้งคว่ำและเป็นฟังก์ชันลดบน $[0,\infty)$; $f(0)=3$ และ $f(-1)=0$

   5.2 กราฟของ f เป็นโค้งคว่ำและเป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty,0]$ เป็นโค้งคว่ำและเป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[0,1]$ เป็นโค้งหงายและเป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[1,\infty)$; $f(0)=1$ และ $f(1)=2$

   5.3 $f''(0)=0$; $f'(0)=0$; $f''(x)>0$ เมื่อ $x<0$; $f''(x)<0$ เมื่อ $x>0$ และ $f(0)=1$

   5.4 $f'(0)=0$; $f'(x)>0$ เมื่อ $x\neq 0$; $f''(x)<0$ เมื่อ $x<0$; $f''(x)>0$ เมื่อ $x>0$ และ $f(0)=1$

3.5 การวาดกราฟ

จากการศึกษาที่ผ่านมาเราได้ใช้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันในการบอกลักษณะของฟังก์ชันว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือฟังก์ชันลด มีลักษณะของกราฟเป็นโค้งคว่ำหรือโค้งหงายบนช่วงใด รวมทั้งตำแหน่งที่จะเกิดจุดวิกฤตและจุดเปลี่ยนความเว้าของฟังก์ชัน ถึงแม้ ว่าความรู้เหล่านี้ช่วยให้เราวาดกราฟของฟังก์ชันได้อย่างคร่าว ๆ ก็ตาม แต่องค์ประกอบอื่น ๆ เช่นส่วนตัด (intercept) บนแกน x และแกน y การสมมาตร (symmetry) ของกราฟ รวมทั้งเส้นกำกับ (asymptote) ของกราฟที่เราจะกล่าวต่อไปนี้ช่วยทำให้เราวาดกราฟได้ถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น สำหรับส่วนตัดบนแกน x และแกน y และการสมมาตรของกราฟเราได้เคยศึกษามาบ้างแล้ว ในที่นี้เราจะกล่าวทบทวนเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

บทนิยาม 3.5.1 เรากล่าวว่า a เป็น**ส่วนตัดบนแกน** x (x-intercept) ของฟังก์ชัน f เมื่อ $f(a)=0$ และเรียก $(a,0)$ ว่า**จุดตัดแกน** x และกล่าวว่า b เป็น**ส่วนตัดบนแกน** y (y-intercept) ของฟังก์ชัน f เมื่อ $f(0)=b$ และเรียก $(0,b)$ ว่า**จุดตัดแกน** y

ตัวอย่าง 3.5.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=x^2-3x-4$ จงหาจุดตัดแกน x และจุดตัดแกน y

วิธีทำ เนื่องจาก $f(4)=4^2-3(4)-4=0$ และ $f(-1)=(-1)^2-3(-1)-4=0$ ดังนั้น 4 และ -1 เป็นส่วนตัดบนแกน x ของฟังก์ชัน f และเนื่องจาก $f(0)=0^2-3(0)-4=-4$ ดังนั้น -4 เป็นส่วนตัดบนแกน y ของฟังก์ชัน f ดังนั้นจุดตัดแกน x ของฟังก์ชัน f คือ $(4,0)$ และ $(-1,0)$ และจุดตัดแกน y ของฟังก์ชัน f คือ $(0,-4)$ ❍

บทนิยาม 3.5.3 กราฟของฟังก์ชัน f **สมมาตรเทียบกับแกน** y (symmetric with respect to the y-axis) ถ้า $f(-x)=f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ในโดเมนของ f

กราฟของฟังก์ชัน f **สมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด** (symmetric with respect to the origin) ถ้า $f(-x)=-f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ในโดเมนของ f

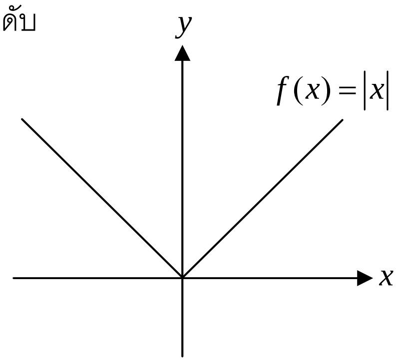
ข้อสังเกต ถ้า $f(x)\neq 0$ แล้ว ความสมมาตรของกราฟของฟังก์ชัน f เทียบกับแกน y และ ความสมมาตรของกราฟของฟังก์ชัน f เทียบกับจุดกำเนิด จะไม่เกิดขึ้นพร้อมกัน

ตัวอย่าง 3.5.4 กราฟของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=|x|$ สมมาตรเทียบกับแกน y เพราะว่า $|-x|=|x|$ และจากข้อสังเกตข้างต้น กราฟของฟังก์ชัน f ไม่สมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด

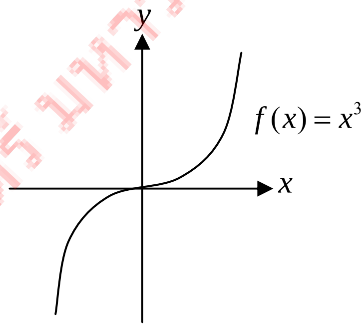
กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x^3$ สมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด เพราะว่า $(-x)^3=-(x^3)$ และจากข้อสังเกตข้างต้น กราฟของฟังก์ชัน f ไม่สมมาตรเทียบกับแกน y

ในขณะที่กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=x+x^2$ ไม่สมมาตรเทียบกับแกน y เพราะว่า $f(-1)=-1+(-1)^2=0\neq 1+1^2=f(1)$ และไม่สมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด เพราะว่า $f(-1)=-1+(-1)^2=0 \neq -(1+1^2)=-f(1)$

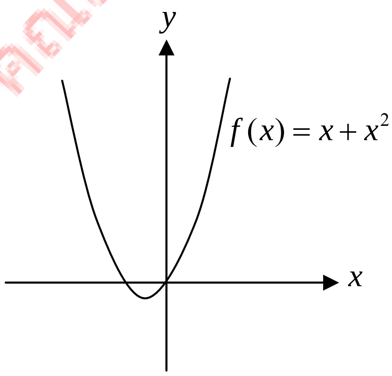
กราฟของฟังก์ชัน $f(x)=|x|$, $f(x)=x^3$ และ $f(x)=x+x^2$ แสดงดังในรูป 3.5.1 (ก)-(ค) ตามลำดับ



(ก)



(ข)



(ค)

รูป 3.5.1

❍

ขอให้สังเกตว่าเมื่อกราฟของฟังก์ชันสมมาตรเทียบกับแกน y และเราพับรูปของกราฟตามแนวแกน y แล้ว เส้นกราฟจะทับกันสนิท ในทำนองเดียวกันเมื่อกราฟของฟังก์ชันสมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด และเราพับรูปของกราฟตามแนวแกน y แล้วตามด้วยแนวแกน x เส้นกราฟจะทับกันสนิท

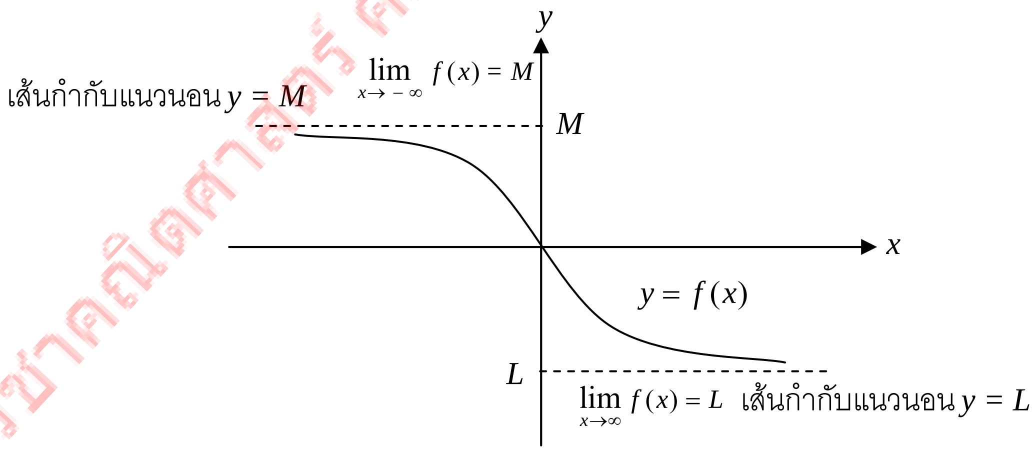
ประโยชน์ของความรู้ในเรื่องการสมมาตรของกราฟช่วยทำให้เราไม่ต้องวาดกราฟทั้งหมดของฟังก์ชัน เราเพียงแต่วาดกราฟของฟังก์ชันทางด้านใดด้านหนึ่งของแกน y แล้วใช้คุณสมบัติการสมมาตรที่เกี่ยวข้องเพื่อทำให้ได้กราฟส่วนที่เหลือ

เราใช้ความรู้ในเรื่องลิมิตที่อนันต์และลิมิตที่เป็นอนันต์ในการนิยามเส้นกำกับแนวนอนและเส้นกำกับแนวตั้งดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.5.5 เรากล่าวว่าเส้นตรง $y=b$ เป็น**เส้นกำกับแนวนอน** (horizontal asymptote) ของกราฟของ f ถ้า

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b \quad \text{หรือ} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

ตัวอย่าง 3.5.6 กราฟของฟังก์ชัน f ในรูป 3.5.2 แสดงให้เห็นว่าเส้นตรง $y=L$ และ $y=M$ ต่างเป็นเส้นกำกับแนวนอนของกราฟของ f



รูป 3.5.2 ❍

ตัวอย่าง 3.5.7 จงหาเส้นกำกับแนวนอนของกราฟของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

วิธีทำ เราได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}=1$ ดังนั้นเส้นตรง $y=1$ เป็นเส้นกำกับแนวนอน ในขณะเดียวกันเราได้ว่า $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}=-1$ ดังนั้นเส้นตรง $y=-1$ เป็นเส้นกำกับแนวนอน ดังนั้น เส้นกำกับแนวนอนของกราฟของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ คือ $y=-1$ และ $y=1$

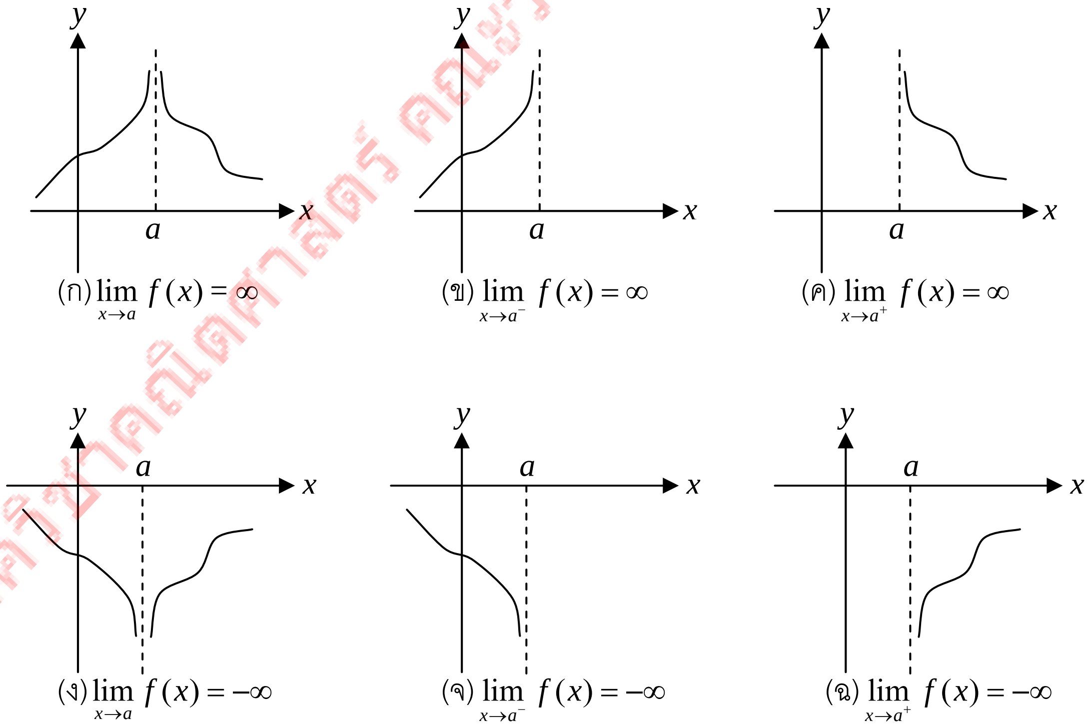
ตัวอย่าง 3.5.8 จงหาเส้นกำกับแนวนอนของกราฟของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=2x$

วิธีทำ เราได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty}2x=\infty$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$ ดังนั้นฟังก์ชัน $f(x)=2x$ ไม่มีเส้นกำกับแนวนอน

บทนิยาม 3.5.9 เรากล่าวว่าเส้นตรง $x=a$ เป็น**เส้นกำกับแนวตั้ง** (vertical asymptote) ของกราฟของ f ถ้า

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty \qquad \text{หรือ} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$$

กราฟในรูป 3.5.3 แสดงให้เห็นลักษณะต่าง ๆ ที่จะเป็นไปได้ เมื่อฟังก์ชันมีลิมิตที่เป็นอนันต์



(ก) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ (ข) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$ (ค) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$

(ง) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ (จ) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ (ฉ) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

รูป 3.5.3

ข้อสังเกต ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a แล้ว $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ซึ่งหาค่าได้ และ $\lim_{x\to a} f(x) \neq \pm\infty$ ดังนั้น $x = a$ จะไม่เป็นเส้นกำกับแนวตั้งสำหรับ f เพราะฉะนั้นในการพิจารณาว่าเส้นตรง $x = a$ เป็นเส้นกำกับแนวตั้งสำหรับ f หรือไม่ เราจะเลือกพิจารณาเฉพาะ a ที่ทำให้ f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ตัวอย่าง 3.5.10 จงหาเส้นกำกับแนวตั้งของกราฟของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

วิธีทำ เห็นได้ชัดว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ และ $x = -1$ เราอาจคาดหวังว่า $x = 1$ และ $x = -1$ เป็นเส้นกำกับแนวตั้งของกราฟของฟังก์ชันโดยพิจารณา $\lim_{x\to 1} f(x)$ และ $\lim_{x\to -1} f(x)$ ดังต่อไปนี้

เนื่องจาก $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ และ $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \infty$

ดังนั้นเส้นตรง $x = 1$ และ $x = -1$ เป็นเส้นกำกับแนวตั้งของกราฟของฟังก์ชัน f ❍

ตัวอย่าง 3.5.11 จงหาเส้นกำกับแนวนอนและเส้นกำกับแนวตั้งของกราฟของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย

$$f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x - 3}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ ดังนั้น f ไม่มีเส้นกำกับแนวนอน

เนื่องจาก f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 3$ เราอาจคาดหวังว่า $x = 3$ เป็นเส้นกำกับแนวตั้งของกราฟของฟังก์ชันโดยพิจารณา $\lim_{x\to 3} f(x)$ ดังต่อไปนี้

เพราะว่า $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ ดังนั้นเส้นตรง $x = 3$ เป็นเส้นกำกับแนวตั้งของกราฟของฟังก์ชัน f ❍

เราอาจนำความรู้ที่ได้ศึกษามาแล้วมาช่วยในการวาดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ โดยใช้แนวทางต่อไปนี้

1. หาโดเมนของฟังก์ชัน f

2. หาตำแหน่งของส่วนตัดบนแกน x และส่วนตัดบนแกน y

3. ตรวจสอบสมบัติการสมมาตรว่า ฟังก์ชัน f สมมาตรเทียบกับแกน y หรือสมมาตรเทียบกับจุดกำเนิดหรือไม่

4. หาเส้นกำกับแนวนอนและเส้นกำกับแนวตั้งของกราฟของฟังก์ชัน f

5. หาจุดวิกฤตของฟังก์ชัน

6. หาช่วง I ที่ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ($f'(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ x ใน I) และช่วง I ที่ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันลด ($f'(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ x ใน I)

7. หาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

8. หาช่วง I ที่ฟังก์ชัน f มีลักษณะเป็นโค้งหงาย ($f''(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ x ใน I) และช่วง I ที่ฟังก์ชัน f มีลักษณะเป็นโค้งคว่ำ ($f''(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ x ใน I)

9. หาจุดเปลี่ยนความเว้า

10. วาดกราฟโดยใช้ข้อมูลข้างต้น และถ้าจำเป็นเราอาจคำนวณค่าของฟังก์ชันที่จุดบางจุดเพิ่มเติมเพื่อช่วยในการวาดกราฟ

ตัวอย่าง 3.5.12 จงวาดกราฟของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

วิธีทำ เราจะใช้แนวทางข้างต้นเพื่อช่วยในการวาดกราฟ

1. โดเมนของฟังก์ชัน f คือ $\mathbb{R}$

2. จุดตัดแกน x คือ $(0,0)$ และ $\left(\frac{4}{3},0\right)$ และจุดตัดแกน y คือ $(0,0)$

3. เพราะว่า $f(1) \neq f(-1)$ ดังนั้น f ไม่สมมาตรเทียบกับแกน y และ $f(-1) \neq -f(1)$ ดังนั้น f ไม่สมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด

4. เนื่องจาก $\lim_{x\to\infty}\left(3x^4-4x^3\right)=\infty$ และ $\lim_{x\to-\infty}\left(3x^4-4x^3\right)=\infty$ ดังนั้น $f(x)=3x^4-4x^3$ ไม่มีเส้นกำกับแนวนอน และ $f(x)=3x^4-4x^3$ ไม่มีเส้นกำกับแนวตั้ง เนื่องจาก f พหุนามซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง

5. เพราะว่า $f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$ จะได้ว่า $f'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=0,1$ ดังนั้น จุดวิกฤตของ f คือ 0 และ 1

6. พิจารณาช่วงเพิ่มขึ้นและลดลงของฟังก์ชัน

ช่วง	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
เครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง	$-$	$-$	$+$
ลักษณะกราฟของ f	ลด	ลด	เพิ่ม

เนื่องจาก $f'(x)>0$ เมื่อ $x>1$ และ $f'(x)<0$ เมื่อ $x<1$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[1,\infty)$ และ f เป็นฟังก์ชันลดบน $(\infty,1]$

7. จากการทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่งเราได้ว่า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x=1$ และ $f(1)=-1$

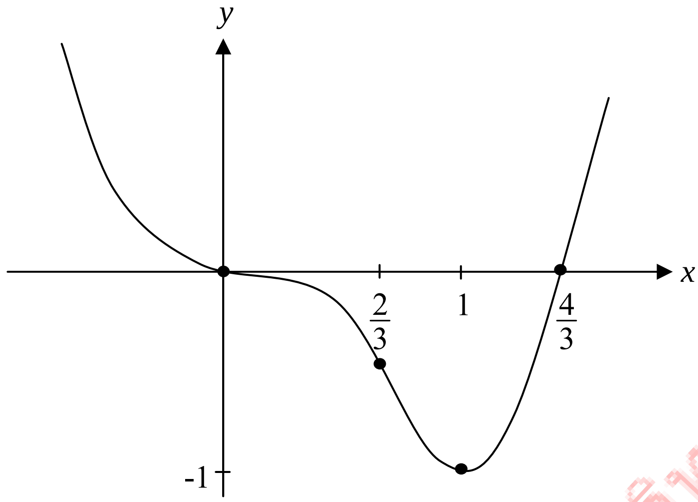
8. เพราะว่า $f''(x)=36x^2-24x=12x(3x-2)$ และ $f''(x)=0$ เมื่อ $x=0$ หรือ $x=\dfrac{2}{3}$ เราจะได้ตารางสรุปลักษณะความเว้าของกราฟของ f ดังนี้

ช่วง	$(-\infty,0)$	$\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$	$\left(\dfrac{2}{3},\infty\right)$
เครื่องหมายของ $f''(x)$ บนช่วง	$+$	$-$	$+$
ลักษณะความเว้าของ f	โค้งหงาย	โค้งคว่ำ	โค้งหงาย

เราจะได้ว่ากราฟของ f เป็นโค้งหงายบน $(-\infty,0]$ และบน $\left[\dfrac{2}{3},\infty\right)$ ในขณะที่กราฟของ f เป็นโค้งคว่ำบน $\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$

9. ดังนั้นจุด $(0,0)$ และ $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{16}{27}\right)$ เป็นจุดเปลี่ยนความเว้า

10. จากข้อมูลข้างต้นเราจะวาดกราฟของ f ได้ดังนี้



รูป 3.5.4

ตัวอย่าง 3.5.13 จงวาดกราฟของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

วิธีทำ เราจะใช้แนวทางข้างต้นเพื่อช่วยในการวาดกราฟ

1. โดเมนของฟังก์ชัน f คือ $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

2. จุดตัดแกน x และจุดตัดแกน y คือ $(0,0)$

3. เพราะว่า $f(x)=f(-x)$ ดังนั้น f สมมาตรเทียบกับแกน y แต่ $f(-2)=\dfrac{4}{3}\neq-\dfrac{4}{3}=-f(2)$ ดังนั้น f ไม่สมมาตรเทียบกับจุดกำเนิด

4. เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=1$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=1$ ดังนั้นเส้นตรง $y=1$ เป็นเส้นกำกับแนวนอน และเส้นตรง $x=1$ และ $x=-1$ เป็นเส้นกำกับแนวตั้ง (ดูตัวอย่าง 3.5.10)

5. เพราะว่า $f'(x)=\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$ จะได้ว่า $f'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=0$ และ $f'(1)$ และ $f'(-1)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นจุดวิกฤตของ f คือ 0 (1 และ -1 ไม่เป็นจุดวิกฤตของ f เพราะว่า 1 และ -1 ไม่เป็นสมาชิกในโดเมนของ f)

6. พิจารณาช่วงเพิ่มขึ้นและลดลงของฟังก์ชัน

ช่วง	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
เครื่องหมายของ $f'(x)$ บนช่วง	$+$	$+$	$-$	$-$
ลักษณะของกราฟของ f	เพิ่ม	เพิ่ม	ลด	ลด

เนื่องจาก $f'(x)>0$ เมื่อ $x<0$ และ $f'(x)<0$ เมื่อ $x>0$ และเนื่องจาก 1 และ -1 ไม่เป็นสมาชิกในโดเมนของ f ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty,-1)$ และบน $(-1,0)$ ในขณะที่ f เป็นฟังก์ชันลดบน $(0,1)$ และบน $(1,\infty)$

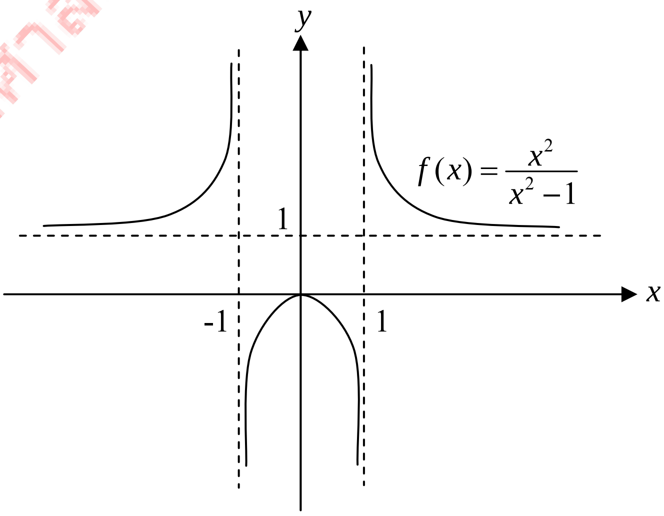
7. จากการทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเราได้ว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x=0$ และ $f(0)=0$

8. เพราะว่า $f''(x)=\dfrac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$ และ $f''(-1)$, $f''(1)$ หาค่าไม่ได้ เราจะได้ตารางสรุปลักษณะความเว้าของ f ดังนี้

ช่วง	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
เครื่องหมายของ $f''(x)$ บนช่วง	$+$	$-$	$+$
ลักษณะความเว้าของ f	โค้งหงาย	โค้งคว่ำ	โค้งหงาย

9. เนื่องจาก $f''(x)\neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$ เราได้ว่ากราฟของ f ไม่มีจุดเปลี่ยนความเว้า

10. จากข้อมูลข้างต้นเราจะวาดกราฟของ f ได้ดังนี้



รูป 3.5.5

❍

แบบฝึกหัด 3.5

1. ในแต่ละข้อต่อไปนี้จงหาเส้นกำกับแนวนอน (ถ้ามี) ของกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้

1.1 $f(x)=\dfrac{3}{x+5}$ 1.2 $f(x)=\dfrac{3x^2}{1+x^2}$

1.3 $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^3}$ 1.4 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+7x^2}{x^2+3}}$

2. ในแต่ละข้อต่อไปนี้จงหาเส้นกำกับแนวตั้ง (ถ้ามี) ของกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้

2.1 $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ 2.2 $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$

2.3 $f(x)=\dfrac{4}{4+5x+x^2}$ 2.4 $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$

3. ในแต่ละข้อต่อไปนี้จงร่างกราฟของฟังก์ชัน f ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

3.1 $f'(2)=0$, $f(2)=-1$, $f(0)=0$, $f'(x)<0$ เมื่อ $0<x<2$, $f'(x)>0$ เมื่อ $x>2$, $f''(x)<0$ เมื่อ $0\le x<1$ และ เมื่อ $x>4$, $f''(x)>0$ เมื่อ $1<x<4$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ และ $f(-x)=f(x)$

3.2 $f(1)=f'(1)=0$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $f''(x)>0$ เมื่อ $x>2$, $f''(x)<0$ เมื่อ $x<0$ และเมื่อ $0<x<2$

4. ในแต่ละข้อต่อไปนี้จงวาดกราฟของฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้

4.1 $f(x)=2x^3-3x^2$ 4.2 $f(x)=\dfrac{x+4}{x-4}$

4.3 $f(x)=\left|4-x^2\right|$ 4.4 $f(x)=\dfrac{1}{x(x-4)}$

4.5 $f(x)=\dfrac{x}{(2x+1)^2}$ 4.6 $f(x)=16-20x^3+3x^5$

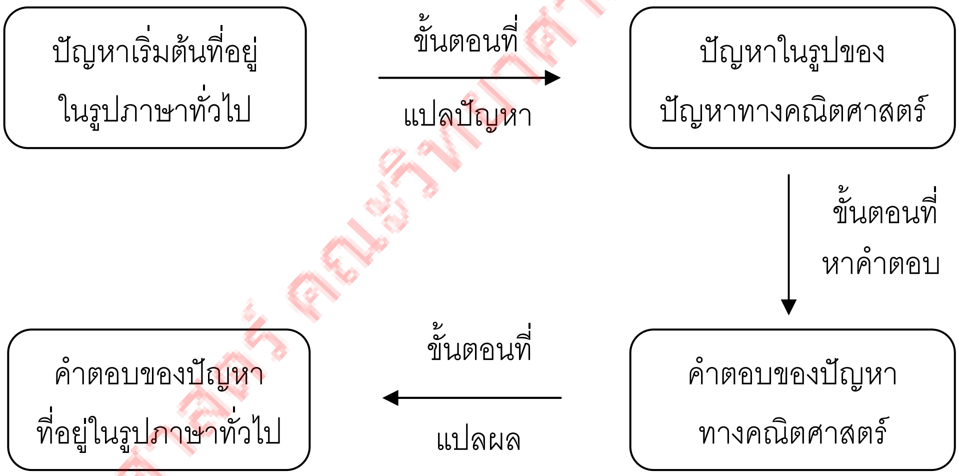
4.7 $f(x)=x^4-6x^2$

3.6 การประยุกต์เรื่องค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

การประยุกต์ของอนุพันธ์ที่สำคัญมากที่สุดอันหนึ่งคือการนำไปใช้ในการแก้ปัญหาการหาค่าที่เหมาะที่สุด (optimization problem) ซึ่งปัญหาเหล่านี้เป็นการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของปริมาณใดปริมาณหนึ่งซึ่งขึ้นอยู่กับปริมาณอื่น ๆ เช่นบริษัทสายการบินแห่งหนึ่งต้องตัดสินใจว่าจะจัดให้มีเที่ยวบินระหว่างเมือง 2 เมืองในแต่ละวันจำนวนกี่เที่ยวจึงจะได้กำไรมากที่สุด หรือวิศวกรจะต้องออกแบบการสร้างถนนอย่างไรจึงจะประหยัดค่าใช้จ่ายมากที่สุด แต่ในขณะเดียวกันให้มีความปลอดภัยสูงสุดด้วย เป็นต้น

ในสถานการณ์จริงโดยทั่วไปแล้ว ปัญหาที่เราต้องการจะแก้นั้นไม่ได้อยู่ในรูปของข้อความทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นในการแก้ปัญหาเหล่านี้เราจำเป็นต้องแปลปัญหาให้อยู่ในรูปของปัญหาทางคณิตศาสตร์เสียก่อน เพื่อที่จะได้นำเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมไปใช้ในการแก้ ปัญหาดังกล่าว เราเรียกการแปลรูปของปัญหานี้ว่าการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model)

แผนภาพในรูป 3.6.1 ต่อไปนี้แสดงให้เห็นขั้นตอนพื้นฐาน 3 ขั้นตอนในการแก้ปัญหาประยุกต์



รูป 3.6.1

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาปัญหาการหาค่าที่เหมาะที่สุด ซึ่งปัญหาเหล่านี้จะให้มาในรูปของภาษาทั่วไป และการหาคำตอบของปัญหาดังกล่าวนี้เกี่ยวข้องกับการใช้อนุพันธ์ในการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชันบนช่วงใดช่วงหนึ่ง ซึ่งในการแก้ปัญหาเหล่านี้เราจำเป็นต้องแปลงรูปของปัญหาให้อยู่ในรูปของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการจะหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุด โดยใช้ความรู้ที่กล่าวมาแล้วในตอนต้นของบทนี้

ก่อนที่เราจะให้แนวทางการแก้ปัญหาการหาค่าที่เหมาะที่สุด ขอให้นักศึกษาศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.6.1 ชายคนหนึ่งต้องการสร้างบ้านชั้นเดียวรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าให้มีพื้นที่ใช้สอย 180 ตารางเมตร เพื่อความสวยงามของตัวบ้านชายคนนี้ไม่ต้องการให้ความยาวหรือความกว้างของบ้านน้อยกว่า 10 เมตร จงพิจารณาว่าชายคนนี้ควรออกแบบบ้านให้มีความกว้างและยาวเท่าใด จึงจะทำให้ความยาวของเส้นรอบรูปของตัวบ้านมีค่าน้อยที่สุด เพื่อประหยัดค่าใช้จ่ายในการก่อผนังและทำทางเดินรอบตัวบ้าน

วิธีทำ เราอาจเริ่มต้นด้วยการกำหนดตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องต่อไปนี้

ให้ x แทนความยาวของตัวบ้าน (หน่วยเป็นเมตร)

y แทนความกว้างของตัวบ้าน (หน่วยเป็นเมตร)

P แทนความยาวของเส้นรอบรูปของตัวบ้าน (หน่วยเป็นเมตร)

A แทนพื้นที่ใช้สอย (หน่วยเป็นตารางเมตร)

เราจะเห็นว่าตัวแปรที่กำหนดขึ้นมีความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &P = 2x + 2y \\ &A = xy = 180 \qquad (3.6.1) \\ &x \geq 10 \\ &y \geq 10 \end{aligned}$$

สิ่งที่โจทย์ต้องการคือให้หาค่า x และ y ที่ทำให้ $P = 2x + 2y$ มีค่าน้อยที่สุด โดยที่ $xy = 180$, $x \geq 10$ และ $y \geq 10$ ขอให้สังเกตว่า P เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร x และ y เราจะต้องทำให้ P เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียวโดยใช้ความสัมพันธ์ใน (3.6.1) เข้าช่วย ดังนี้

จาก $y = \dfrac{180}{x}$ ทำให้ได้ว่า

$$P(x) = 2x + 2\left(\frac{180}{x}\right)$$

เพราะว่า $x \geq 10$, $y \geq 10$ และ $y = \dfrac{180}{x}$ เราจะได้ว่า $x \leq 18$ ดังนั้นโดเมนของฟังก์ชัน P คือ $[10,18]$

เพราะว่า $P'(x) = 2 - \dfrac{360}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 360}{x^2}$ เห็นได้ชัดว่า $P('x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = \sqrt{180}$ หรือ $-\sqrt{180}$ และ $P'(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 0$ ดังนั้นจุดวิกฤตของ P คือ $\sqrt{180}$ เพราะว่า โดเมนของฟังก์ชัน P เป็นช่วงปิด ดังนั้นค่าต่ำสุดของ P จะเป็นค่าต่ำสุดระหว่าง $P\left(\sqrt{180}\right)$, $P(10)$ และ $P(18)$ เนื่องจาก

$$P\left(\sqrt{180}\right) = 2\sqrt{180} + \frac{360}{\sqrt{180}} \approx 53.67$$

$$P(10) = 2(10) + \frac{360}{10} = 56$$

$$P(18) = 2(18) + \frac{360}{18} = 56$$

ดังนั้น $P\left(\sqrt{180}\right)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ เพราะฉะนั้นชายคนนี้ควรจะสร้างบ้านให้มีความยาวเท่ากับ $x = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ เมตร และความกว้างเท่ากับ $y = \frac{180}{x} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ เมตร ❍

จากตัวอย่าง 3.6.1 เราอาจมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาการหาค่าที่เหมาะที่สุด และแยกแยะขั้นตอนทั้งสามซึ่งประกอบไปด้วยการแปลรูปโจทย์ให้อยู่ในรูปของปัญหาทางคณิตศาสตร์ การหาคำตอบ และการแปลผลได้บ้างแล้ว วิธีการต่อไปนี้เป็นการแจกแจงรายละเอียดของขั้นตอนทั้งสามเพื่อเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาการหาค่าที่เหมาะที่สุด

ขั้นตอนที่ 1 การแปลปัญหาให้อยู่ในรูปของปัญหาทางคณิตศาสตร์

1.1 กำหนดตัวแปรให้กับสิ่งที่เกี่ยวข้องในโจทย์

1.2 เขียนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรในข้อ 1.1 และเงื่อนไขต่าง ๆ ที่มี (ในกรณีนี้เราอาจเขียนรูปประกอบเพื่อช่วยให้มองเห็นความสัมพันธ์ของตัวแปรชัดเจนขึ้น)

1.3 จำแนกว่าตัวแปรใดเป็นสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

ขั้นตอนที่ 2 การหาคำตอบ

2.1 สร้างฟังก์ชันของตัวแปรที่โจทย์ต้องการให้หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

2.2 ถ้าฟังก์ชันในข้อ 2.1 ไม่เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียว ให้ใช้ความสัมพันธ์ในข้อ 1.2 เข้าช่วยเพื่อทำให้เป็นฟังก์ชันตัวแปรเดียว

2.3 หาโดเมนของฟังก์ชันตัวแปรเดียวที่ได้จากข้อ 2.2

2.4 หาคำตอบของฟังก์ชันโดยใช้ความรู้จากหัวข้อ 3.3 และหัวข้อ 3.4

2.5 หาค่าของตัวแปรที่เหลือจากคำตอบของตัวแปรที่ได้มาจากขั้นตอน 2.4 โดยใช้ความสัมพันธ์ในขั้นตอน 1.2

ขั้นตอนที่ 3 การแปลผล

แปลผลที่ได้ให้อยู่ในรูปของภาษาทั่วไป

ก่อนที่เราจะศึกษาตัวอย่างต่อไป ขอให้เข้าใจตรงกันว่าค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดที่เรากล่าวถึงในที่นี้ แท้ที่จริงคือค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์นั่นเอง ในกรณีที่โดเมนของฟังก์ชัน f ที่เราต้องการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์เป็นช่วงปิด นักศึกษาอาจใช้ความรู้ในหัวข้อ 3.1 เข้าช่วยในการหาค่าดังกล่าว แต่ในกรณีที่โดเมนของ f เป็นช่วงเปิด การหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f อาจยุ่งยากขึ้น อย่างไรก็ตามถ้า f มี c เป็นจุดวิกฤตเพียงจุดเดียวและ $f'(c)=0$ แล้ว ทฤษฎีบทต่อไปนี้ยืนยันว่าถ้า $f(c)$ เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสุดขีดสัมบูรณ์ เราจะกล่าวเฉพาะตัวทฤษฎีบทโดยไม่ให้บทพิสูจน์ ผู้สนใจบทพิสูจน์ศึกษาได้จาก Clarke [5]

ทฤษฎีบท 3.6.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ที่ทุก ๆ จุดใน I ที่ไม่ใช่จุดปลายของช่วง I และ f มี c เป็นจุดวิกฤตเพียงจุดเดียวโดยที่ $f'(c)=0$ ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของ f แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f □

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของปัญหาการหาค่าที่เหมาะที่สุดซึ่งจะใช้ขั้นตอนวิธีข้างต้นโดยไม่ระบุรายละเอียดของขั้นตอน ขอให้นักศึกษาทำความเข้าใจและสังเกตขั้นตอนต่าง ๆ ด้วยตนเอง

ตัวอย่าง 3.6.3 โรงพยาบาลแห่งหนึ่งต้องการสร้างบ่อบำบัดน้ำเสียรูปทรงกระบอกให้มีปริมาตร 125π ลูกบาศก์เมตร จงหาขนาดของบ่อใบนี้ที่จะทำให้สิ้นเปลืองวัสดุในการก่อสร้างน้อยที่สุด

วิธีทำ ให้ r แทนรัศมีของบ่อ (หน่วยเป็นเมตร)

h แทนความสูงของบ่อ (หน่วยเป็นเมตร)

V แทนปริมาตรของบ่อ (หน่วยเป็นลูกบาศก์เมตร)

A แทนพื้นที่ผิวของบ่อ (หน่วยเป็นตารางเมตร)

เราได้ว่า

$$V=\pi r^2 h=125\pi \qquad (3.6.2)$$

และ

$$A=\pi r^2+2\pi rh \qquad (3.6.3)$$

สิ่งที่โจทย์ต้องการคือให้หาค่า r และ h ที่ทำให้ $A=\pi r^2+2\pi rh$ มีค่าน้อยที่สุด โดยที่ $\pi r^2 h=125\pi$, $r>0$ และ $h>0$ จาก (3.6.2) เห็นได้ชัดว่า $h=\dfrac{125}{r^2}$ แทนค่า $h=\dfrac{125}{r^2}$ ลงไปใน (3.6.3) เราได้ว่า

$$A=A(r)=\pi r^2+2\pi r\left(\frac{125}{r^2}\right)=\pi r^2+\frac{250\pi}{r}$$

เพราะว่า $r>0$ เพราะฉะนั้นโดเมนของ A คือ $(0,\infty)$ เนื่องจาก

$$A'(r)=2\pi r-\frac{250\pi}{r^2}=\frac{2\pi(r^3-125)}{r^2}$$

เราจะได้ว่า $A'(r)=0$ ก็ต่อเมื่อ $r=5$ และ $A'(r)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $r=0$ ดังนั้นจุดวิกฤตของ A คือ 5 ต่อไปพิจารณา A'' เราได้ว่า $A''(r)=2\pi+\dfrac{500\pi}{r^3}$ และ $A''(5)=2\pi+\dfrac{500\pi}{125}>0$

ดังนั้น $A(5)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยทฤษฎีบท 3.6.2 เราได้ว่า $A(5)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ นั่นคือ บ่อที่ต้องการควรจะมีรัศมีเท่ากับ 5 เมตรและความสูงเท่ากับ $h=\dfrac{125}{5^2}=5$ เมตร ❍

ตัวอย่าง 3.6.4 บริษัทผลิตซอฟแวร์คอมพิวเตอร์แห่งหนึ่งพบว่า การตั้งราคาขาย p บาทต่อหน่วยมีความสัมพันธ์ต่อจำนวนยอดขายซอฟแวร์ x หน่วยต่อปี ซึ่งเป็นไปตามสมการ $x=10{,}000-200p$ ในขณะที่ต้นทุนการตลาดและการผลิตซอฟแวร์ x หน่วยต่อปีสอดคล้องกับสมการ $C(x)=50{,}000+5x$ บริษัทควรตั้งราคาขายเท่าใดจึงจะมีกำไรมากที่สุด

วิธีทำ เนื่องจากกำไรจากการขายขึ้นอยู่กับราคาต่อหน่วย ปริมาณการขาย ต้นทุนการผลิต และรายรับ เราอาจสมมติตัวแปรต่าง ๆ ต่อไปนี้

ให้ P แทนกำไรต่อปี (หน่วยเป็นบาท)

R แทนรายรับต่อปี (หน่วยเป็นบาท)

C แทนต้นทุนต่อปี (หน่วยเป็นบาท)

p แทนราคาขายต่อหน่วย (หน่วยเป็นบาท)

x แทนจำนวนที่ผลิตและขายได้ต่อปี

เห็นได้ชัดว่า $P=R-C$ เพราะว่า $R=px=10{,}000p-200p^2$ ดังนั้น

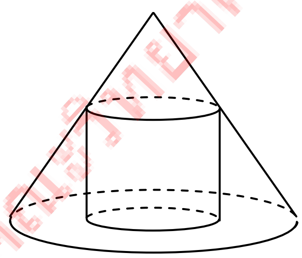
$$P=(10{,}000p-200p^2)-(50{,}000+5x)$$

สิ่งที่โจทย์ต้องการคือ ให้หาค่า p ที่จะทำให้ P มีค่ามากที่สุด โดยที่ $x = 10,000 - 200p$, $p \geq 0$ และ $x \geq 0$ เพราะว่า $10,000 - 200p \geq 0$ ดังนั้น $p \leq 50$ จาก

$$\begin{aligned} P &= (10,000p - 200p^2) - (50,000 + 5x) \\ &= (10,000p - 200p^2) - (50,000 + 5(10,000 - 200p)) \\ &= 11,000p - 200p^2 - 100,000 \end{aligned}$$

เราจะเห็นได้ว่า P เป็นฟังก์ชันของ p และโดเมนของ P คือ ช่วงปิด $[0,50]$ เพราะว่า $P'(p) = 11,000 - 400p$ และ $P'(p) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $p = \dfrac{11,000}{400} = 27.5$ ดังนั้นจุดวิกฤตของ P คือ 27.5 เนื่องจาก $P''(p) = -400$ และ $P''(27.5) = -400 < 0$ ดังนั้น $P(27.5)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ โดยทฤษฎีบท 3.6.2 เราได้ว่า $P(27.5)$ เป็นค่าสูงสุดสมบูรณ์ นั่นคือบริษัทควรตั้งราคาขาย 27.5 บาทต่อหน่วยจึงจะได้กำไรมากที่สุด ❍

ตัวอย่าง 3.6.5 จงหาขนาดของรูปทรงกระบอกตรงที่มีปริมาตรมากที่สุดที่สามารถบรรจุภายในกรวยกลมตรง ดังในรูป 3.6.2



รูป 3.6.2

วิธีทำ ให้ r แทนรัศมีของฐานของกรวยกลมตรง

h แทนความสูงของกรวยกลมตรง

x แทนรัศมีของรูปทรงกระบอกตรง

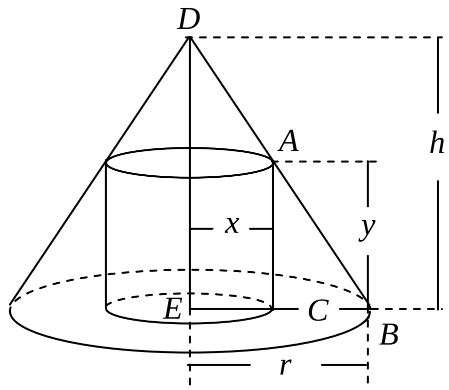
y แทนความสูงของรูปทรงกระบอกตรง

V แทนปริมาตรของรูปทรงกระบอกตรง

เราได้ว่า

$$V = \pi x^2 y \tag{3.6.4}$$

โจทย์ต้องการให้หาค่าของ x และ y ที่จะทำให้ $V=\pi x^2 y$ มีค่ามากที่สุด จากรูป 3.6.3 และความรู้ในเรื่องสามเหลี่ยมคล้าย ABC และ DBE เราได้ว่า $\dfrac{y}{h}=\dfrac{r-x}{r}$



รูป 3.6.3

ดังนั้น

$$y=(r-x)\frac{h}{r} \tag{3.6.5}$$

แทนค่า y ลงไปใน (3.6.4) เราได้ว่า

$$V=\pi x^2(r-x)\frac{h}{r}=\pi hx^2-\frac{\pi hx^3}{r}$$

เห็นได้ชัดว่า $0\le x\le r$ ดังนั้นโดเมนของ V คือ $[0,r]$ เพราะว่า

$$V'(x)=2\pi hx-\frac{3\pi hx^2}{r}=\frac{\pi hx(2r-3x)}{r}$$

จะเห็นได้ว่า $V'(x)=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=0$ หรือ $x=\dfrac{2r}{3}$ ดังนั้นจุดวิกฤตของ V คือ 0 และ $\dfrac{2r}{3}$

พิจารณาค่าของ $V(0)$, $V\left(\dfrac{2r}{3}\right)$ และ $V(r)$ เราได้ว่า $V(0)=0$, $V\left(\dfrac{2r}{3}\right)=\dfrac{4}{27}\pi hr^2$ และ $V(r)=0$

ดังนั้น $V\left(\dfrac{2r}{3}\right)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ เพราะฉะนั้นรูปทรงกระบอกตรงที่ต้องการควรจะมีรัศมีเท่ากับ $\dfrac{2r}{3}$ และมีความสูงเท่ากับ $\dfrac{h}{3}$ (แทนค่า $x=\dfrac{2r}{3}$ ลงในสมการ (3.6.5)) ❍

แบบฝึกหัด 3.6

1. จงหาจำนวนจริงบวก 2 จำนวนซึ่งผลคูณของจำนวนทั้งสองเท่ากับ k และผลบวกของจำนวนทั้งสองมีค่าน้อยที่สุด
2. จงหาจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ 2 จำนวนซึ่งผลบวกของจำนวนทั้งสองเท่ากับ 36 และผลบวกของจำนวนแรกกับกำลังสองของจำนวนที่สองมีค่ามากที่สุด
3. ผู้วิจัยประสิทธิภาพการทำงานของคนงานในโรงงานแห่งหนึ่งพบว่า ประสิทธิภาพการทำงานของคนงานสอดคล้องกับฟังก์ชัน $R(t)=0.92+0.08t-0.02t^2$ เปอร์เซ็นต์ เมื่อ t เป็นจำนวนชั่วโมงหลังจากเวลาเริ่มงาน อยากทราบว่าคนงานในโรงงานนี้มีประสิทธิภาพการทำงานสูงสุดเมื่อใด
4. จงหาค่าความชันของเส้นสัมผัสกราฟ $f(x)=x^3-9x^2+7x-6,\ 1\le x\le 4$ ที่มีค่ามากที่สุดและมีค่าน้อยที่สุด และให้ระบุตำแหน่งของจุดบนกราฟที่เส้นสัมผัสกราฟนั้นมีค่าความชันมากที่สุดและน้อยที่สุด
5. ยอดจำหน่ายของอุปกรณ์ไฟฟ้าชนิดหนึ่งขึ้นอยู่กับราคาขาย p ที่สอดคล้องกับสมการ $x=2000-100p$ โดยที่ x เป็นจำนวนอุปกรณ์ไฟฟ้าที่ขายได้ต่อเดือนในราคา p บาท จงหาราคาขายที่ทำให้โรงงานนี้มีรายได้มากที่สุด
6. ถ้าต้องการเขียนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งให้อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านยาว 6, 8 และ 10 เซนติเมตรตามลำดับ โดยที่ด้าน 2 ด้านของรูปสี่เหลี่ยมอยู่บนด้าน 2 ด้านของรูปสามเหลี่ยม อยากทราบว่ารูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ควรมีขนาดเท่าใดจึงจะมีพื้นที่มากที่สุด
7. ค่ายฤดูร้อนแห่งหนึ่งคิดคำนวณค่าใช้จ่ายของการที่มีนักศึกษา n คนเข้าค่ายเท่ากับ $C(n)=3n^2+2000n+7500$ บาทต่อสัปดาห์ จงหาว่านักศึกษาแต่ละคนต้องเสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดต่อสัปดาห์เมื่อมีนักศึกษาเข้าค่ายครั้งละกี่คน
8. เส้นลวดเส้นหนึ่งยาว x หน่วย ถ้าต้องการตัดเส้นลวดเส้นนี้ออกเป็น 2 ส่วน โดยที่นำส่วนที่หนึ่งมาขดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และส่วนที่สองมาขดเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จงหาว่าเราควรแบ่งเส้นลวดนี้อย่างไรจึงจะทำให้ผลบวกของพื้นที่ของรูปทั้งสองนี้มีค่ามากที่สุด
9. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีด้าน 2 ด้านยาว a และ b หน่วย จงหาว่าสามเหลี่ยมรูปนี้มีพื้นที่มากที่สุดเท่าใด
10. จงหาค่า t โดยที่ $0\le t\le 2\pi$ ที่ทำให้จุดบนวงกลม $x=\cos t$, $y=\sin t$ อยู่ใกล้กับจุด $(1,\sqrt{3})$ มากที่สุด

3.7 ผลต่างอนุพันธ์

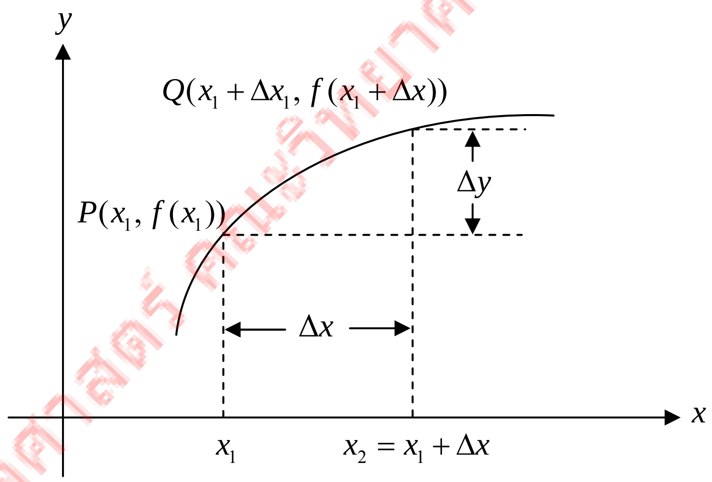
เมื่อเรามีสมการ $y = f(x)$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชัน ในการประยุกต์ต่าง ๆ มากมายที่เมื่อตัวแปรอิสระ x เปลี่ยนแปลงไปเพียงเล็กน้อย เราจำเป็นต้องหาค่าของตัวแปร y ที่แปรเปลี่ยนไปด้วย ถ้า x แปรเปลี่ยนจาก x_1 ไปเป็น x_2 แล้ว เราจะแทนปริมาณการเปลี่ยนแปลงนี้ด้วย Δx (อ่านว่า เดลตา (delta) x) นั่นคือ $\Delta x = x_2 - x_1$ และเรียก Δx ว่า **ส่วนที่เปลี่ยน** (increment) ของ x ขอให้สังเกตว่า $x_2 = x_1 + \Delta x$ ในทำนองเดียวกันเราจะให้ Δy แทนปริมาณการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร y ที่สมนัยกับการแปรเปลี่ยนของ x หรือ Δx ดังนั้น

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

หรือ

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \qquad (3.7.1)$$

รูป 3.7.1 แสดงให้เห็นความหมายเชิงเรขาคณิตของ Δx และ Δy



รูป 3.7.1

ตัวอย่าง 3.7.1 ให้ $y = 3x^2 - 5$ จงหา Δy เมื่อกำหนดให้ค่าเริ่มต้นของ x เท่ากับ 2 และ $\Delta x = 0.1$

วิธีทำ ให้ $y = 3x^2 - 5$ เราได้ว่า

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) = f(2.1) - f(2) = \left(3(2.1)^2 - 5\right) - \left(3(2)^2 - 5\right) = 1.23$$ ❍

จากการนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เราทราบมาแล้วว่า

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ถ้าเราแทน h ด้วย Δx และให้ x เป็นค่าเริ่มต้นของตัวแปรอิสระแล้ว

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

จากสมการ (3.7.1) เมื่อเราให้ x เป็นค่าเริ่มต้น เราจะได้ว่า

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) \tag{3.7.2}$$

ดังนั้น

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{3.7.3}$$

ขอให้สังเกตว่าเมื่อให้ $x = x_1$ ในรูป 3.7.1 แล้ว $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ คือความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q ผลที่ตามมาคือ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x) \quad \text{เมื่อ} \quad \Delta x \approx 0 \tag{3.7.4}$$

ความหมายเชิงเรขาคณิตของข้อความ (3.7.4) คือ เมื่อ Δx เข้าใกล้ 0 แล้ว ความชัน $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q มีค่าเข้าใกล้ความชัน $f'(x)$ ของเส้นสัมผัสกราฟของ f ที่จุด P

จากสมการ (3.7.4) เราอาจเขียนเสียใหม่ได้ว่า

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \quad \text{เมื่อ} \quad \Delta x \approx 0 \tag{3.7.5}$$

บทนิยาม 3.7.2 ให้ $y = f(x)$ โดยที่ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ Δx เป็นส่วนที่เปลี่ยนของ x แล้ว **ผลต่างอนุพันธ์** (differential) **ของตัวแปรตาม** y คือ $f'(x)\Delta x$ เขียนแทนด้วย dy และ **ผลต่างอนุพันธ์ของตัวแปรอิสระ** x คือ Δx เขียนแทนด้วย dx

จากบทนิยาม 3.7.2 เราจะเห็นว่า

$$dy = f'(x)dx \tag{3.7.6}$$

ถ้า $dx \neq 0$ แล้ว

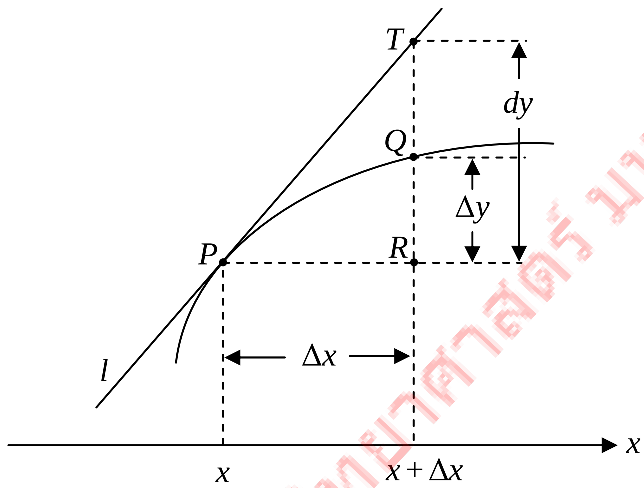
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{3.7.7}$$

จากสมการ (3.7.7) จะเห็นว่าเราสามารถเขียนอนุพันธ์ $f'(x)$ ให้อยู่ในรูปของผลหารของผลต่างอนุพันธ์ได้ ซึ่งเป็นเหตุผลอันหนึ่งในการที่เรานิยาม dy และ dx ดังในบทนิยาม 3.7.2

ตัวอย่าง 3.7.3 ให้ $y=x^4-3x^2+5x+4$ จงหา dy และค่าของ dy เมื่อกำหนดให้ $x=2$ และ $\Delta x=-0.1$

วิธีทำ ให้ $y=x^4-3x^2+5x+4$ จาก (3.7.6) เราได้ว่า $dy=(4x^3-6x+5)dx$ เมื่อแทนค่า $x=2$ และ $\Delta x=-0.1=dx$ ดังนั้น $dy=(4(2)^3-6(2)+5)(-0.1)=-2.5$ ❍

เราอาจกล่าวถึงความหมายเชิงเรขาคณิตของ dy และ dx ได้จากการพิจารณารูป 3.7.2 ต่อไปนี้ ทั้งนี้เพื่อให้ง่ายต่อการเข้าใจ เรากำหนดให้ Δx และ Δy เป็นค่าบวก



รูป 3.7.2

จากรูป 3.7.2 เราจะเห็นว่าเส้นตรง l เป็นเส้นสัมผัสกราฟ $y=f(x)$ ที่จุด P ซึ่ง T เป็นจุดบนเส้นตรง l ที่เกิดจากการลากเส้นขนานกับแกน Y ผ่านจุด Q ไปตัดกับ l และพิกัดของ R คือ $(x+\Delta x, f(x))$

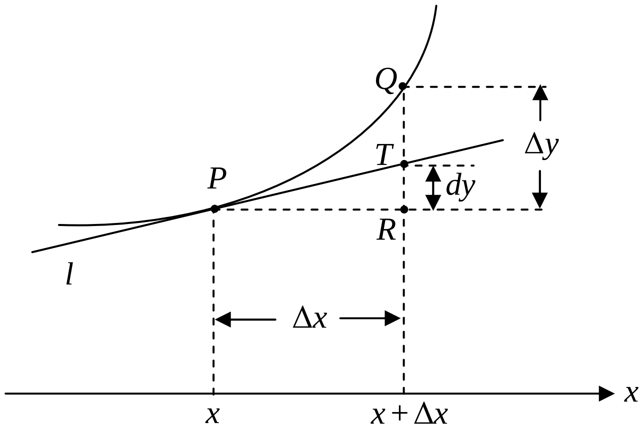
จากรูปสามเหลี่ยม PRT เราได้ว่า $f'(x)$ ซึ่งเป็นความชันของเส้นสัมผัส l จะเท่ากับ $\frac{|RT|}{\Delta x}$ เมื่อ $|RT|$ แทนความยาวของเส้นตรง RT นั่นคือ

$$f'(x) = \frac{|RT|}{\Delta x}$$

หรือ $$|RT| = f'(x)\Delta x$$

ดังนั้น $$|RT| = dy$$

ขอให้สังเกตว่ากราฟของฟังก์ชันในรูป 3.7.2 เป็นโค้งคว่ำ รูป 3.7.3 ต่อไปนี้แสดงให้เห็นความหมายเชิงเรขาคณิตของ dy และ dx เมื่อกราฟของฟังก์ชันเป็นโค้งหงาย



รูป 3.7.3

จากสมการ (3.7.5) และบทนิยาม 3.7.2 เราจะเห็นว่า ถ้า $\Delta x \to 0$ แล้ว

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx \qquad (3.7.8)$$

ซึ่งค่าประมาณใน (3.7.8) นี้เห็นได้จากรูป 3.7.2 และรูป 3.7.3 ด้วยเช่นกัน ดังนั้นถ้า $y = f(x)$ แล้ว เราอาจใช้ dy ในการประมาณค่าที่แท้จริงของ Δy เมื่อ $\Delta x \to 0$ ข้อความข้างต้นนี้มีประโยชน์มากต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในกรณีที่เราต้องการประมาณส่วนที่เปลี่ยนของ y

ตัวอย่าง 3.7.4 ให้ $y = 3x^2 - 5$ จงใช้ dy ในการประมาณค่าของ Δy เมื่อ x แปรเปลี่ยนจาก 2 ไปเป็น 2.1

วิธีทำ ให้ $y = 3x^2 - 5$ จาก (3.7.6) $dy = f'(x)dx = 6xdx$ โจทย์กำหนดให้ $x = 2$ และ $\Delta x = dx = 0.1$ ดังนั้น $dy = 6(2)(0.1) = 1.2$ เพราะฉะนั้น $\Delta y \approx 1.2$ ❍

จากตัวอย่าง 3.7.1 เราได้เห็นมาแล้วว่าค่าที่แท้จริงของ Δy คือ 1.23

ตัวอย่าง 3.7.5 รัศมีของบอลลูนรูปทรงกลมใบหนึ่งถูกประมาณไว้ว่ามีค่าเท่ากับ 12 นิ้ว โดยที่ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดในการวัดนี้ไม่เกิน 0.05 นิ้ว จงประมาณค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดในการคำนวณปริมาตรของบอลลูนใบนี้

วิธีทำ ให้ x แทนรัศมีของลูกบอลลูน และ V แทนปริมาตรของลูกบอลลูน เราจะได้ว่า $V = \frac{4}{3}\pi x^3$ ถ้าให้ dx แทนค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดในการวัดรัศมีของบอลลูนแล้วรัศมีที่แท้จริงของบอลลูนใบนี้จะมีค่าอยู่ระหว่าง $x - dx$ และ $x + dx$ ให้ ΔV แทนความคลาดเคลื่อนในการคำนวณปริมาตรที่เกิดจากความคลาดเคลื่อนในการวัดรัศมี เราอาจประมาณ ΔV ได้ด้วย dV โดยที่ $dV = V'(x)dx = 4\pi x^2 dx$

แทนค่า $x = 12$ และ $|dx| \le 0.05$ เราได้ว่า

$$|dV| = 4\pi x^2 |dx| \le 4\pi(12)^2(0.05) \approx 90.48$$

ดังนั้นความคลาดเคลื่อนสูงสุดในการคำนวณปริมาตรที่เกิดจากความคลาดเคลื่อนในการวัดรัศมีจะประมาณ 90.48 ลูกบาศก์นิ้ว ❍

บทนิยาม 3.7.6 ให้ Q เป็นปริมาณที่เราต้องการจะวัด และ ΔQ เป็นส่วนเปลี่ยนไปของ Q เราเรียก $\frac{|\Delta Q|}{Q}$ ว่า**ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์** (relative error) ของ Q และเรียก $\frac{|\Delta Q|}{Q}(100\%)$ ว่า**ค่าความคลาดเคลื่อนร้อยละ** (percentage error) ของ Q

ตัวอย่าง 3.7.7 สมมติว่าวัตถุชิ้นหนึ่งยาว 25 นิ้ว และค่าความคลาดเคลื่อนในการวัดวัตถุชิ้นนี้เท่ากับ 0.1 นิ้ว เราจะได้ว่าค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์เท่ากับ $\frac{0.1}{25} = 0.004$ ซึ่งหมายความว่าในการวัดแต่ละนิ้วจะมีค่าความคลาดเคลื่อนโดยเฉลี่ยเท่ากับ 0.004 นิ้ว และจากข้อมูลข้างต้นค่าความคลาดเคลื่อนร้อยละจะเท่ากับ $(0.004)(100) = 0.4\%$ ❍

หมายเหตุ เราอาจประมาณค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ $\frac{|\Delta Q|}{Q}$ และค่าความคลาดเคลื่อนร้อยละ $\frac{|\Delta Q|}{Q}(100\%)$ ได้ด้วย $\frac{|dQ|}{Q}$ และ $\frac{|dQ|}{Q}(100\%)$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 3.7.8 จากตัวอย่าง 3.7.5 เราจะได้ว่าค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของรัศมีเท่ากับ

$$\frac{|\Delta x|}{x} = \frac{|dx|}{x} = \frac{0.05}{12} \approx 0.0042$$

ค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของปริมาตรโดยประมาณเท่ากับ

$$\frac{|dV|}{V} = \frac{90.48}{\frac{4}{3}\pi(12)^3} \approx 0.0125$$

นั่นคือ ในการวัดรัศมีของบอลลูนแต่ละนิ้วจะมีค่าความคลาดเคลื่อนโดยเฉลี่ย 0.0042 นิ้ว และทำให้ปริมาตรของบอลลูนแต่ละลูกบาศก์นิ้วจะมีค่าความคลาดเคลื่อนโดยเฉลี่ยประมาณ 0.0125 ลูกบาศก์นิ้ว

ตัวอย่าง 3.7.9 ลูกบอลรูปทรงกลมใบหนึ่งมีรัศมี 2 นิ้วและค่าความคลาดเคลื่อนร้อยละในการวัดรัศมีไม่เกิน 1% จงประมาณค่าความคลาดเคลื่อนร้อยละของพื้นที่ผิวของลูกบอลใบนี้

วิธีทำ ให้ r แทนรัศมีของลูกบอล และ S แทนพื้นที่ผิวของลูกบอล เราจะได้ว่า $S = 4\pi r^2$

เราอาจจะประมาณค่าความคลาดเคลื่อนที่แท้จริง $\dfrac{|\Delta S|}{S}$ ด้วย $\dfrac{|dS|}{S}$ โดยที่

$$\frac{|dS|}{S} = \frac{|8\pi r dr|}{4\pi r^2} = 2\frac{|dr|}{r} \le 2(0.01) = 0.02$$

ดังนั้นค่าความคลาดเคลื่อนร้อยละของพื้นที่ผิวของลูกบอลใบนี้ไม่เกิน 2%

จากความสัมพันธ์ใน (3.7.8) เราได้ทราบมาแล้วว่า $\Delta y \approx dy$ เมื่อ Δx มีค่าน้อย ๆ เรา อาจใช้ความรู้ข้างต้นในการประมาณค่าของ $f(x+\Delta x)$ ได้ดังนี้

เพราะว่า $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ และ $dy = f'(x)dx$ ดังนั้น

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta y \approx f(x) + dy$$

นั่นคือ

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (3.7.9)$$

ตัวอย่าง 3.7.10 จงใช้ความรู้เรื่องผลต่างอนุพันธ์ในการหาค่าโดยประมาณของ $\sqrt{123}$

วิธีทำ เราทราบว่า $\sqrt{121} = 11$ เพราะฉะนั้น เราจะใช้ $\sqrt{121}$ ในการประมาณค่า $\sqrt{123}$ ให้ $f(x) = \sqrt{x}$ แล้วเราได้ว่า $dy = f'(x)\Delta x = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$ ให้ $x = 121$ และ $x + \Delta x = 123$ ดังนั้น $\Delta x = 2$ และ $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{121}} \times 2 = \dfrac{1}{11}$ จาก (3.7.9) เราได้ว่า

$$\sqrt{123} \approx \sqrt{121} + \frac{1}{11} = 11.0909$$

ตัวอย่าง 3.7.11 จงใช้ความรู้ในเรื่องผลต่างอนุพันธ์ในการหาค่าโดยประมาณของ $\tan 42^\circ$

วิธีทำ เพราะว่า $42^\circ = 42\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = \dfrac{7\pi}{30}$ เรเดียน และเราทราบว่า $\tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ ดังนั้นเราจะใช้ $\tan\dfrac{\pi}{4}$ ในการประมาณค่าของ $\tan 42^\circ$ ให้ $y = f(x) = \tan x$ แล้ว เราจะได้ว่า

$$dy = f'(x)\Delta x = (\sec^2 x)\Delta x$$

ให้ $x = \dfrac{\pi}{4}$ และ $x + \Delta x = \dfrac{7\pi}{30}$ ดังนั้น $\sec x = \sec\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ และ $\Delta x = -\dfrac{\pi}{60}$ เพราะฉะนั้น

$$dy = \left(\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(-\frac{\pi}{60}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2\left(-\frac{\pi}{60}\right) = -\frac{\pi}{30}$$

จาก (3.7.9) เราจะได้ว่า

$$\tan 42^\circ = \tan\frac{7\pi}{30} \approx \tan\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{30}\right) \approx 0.895$$

แบบฝึกหัด 3.7

1. ในแต่ละข้อต่อไปนี้จงหาค่าของ Δy จากค่า x และ Δx ที่กำหนดให้

   1.1 $y = 2x^2 - 4x + 5;\ x = 2,\ \Delta x = -0.2$

   1.2 $y = \dfrac{1}{x^2};\ x = 3,\ \Delta x = 0.3$

   1.3 $y = \dfrac{x+2}{x+3};\ x = 0,\ \Delta x = -0.03$

2. ในแต่ละข้อต่อไปนี้จงใช้ (3.7.2) ในการหารูปแบบทั่วไปของ Δy จากนั้นให้หา dy และหา $dy - \Delta y$

   2.1 $y = 3x^2 + 5x - 2$ 2.2 $y = \dfrac{1}{x}$

   2.3 $y = 8$ 2.4 $y = x^3$

3. ในแต่ละข้อต่อไปนี้จงใช้ผลต่างอนุพันธ์ในการประมาณการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ เมื่อ x เปลี่ยนจาก a ไปเป็น b

   3.1 $f(x) = 4x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 5;\ a = 1,\ b = 1.03$

   3.2 $f(x) = -6x^3 + 8x - 7;\ a = 4,\ b = 3.96$

   3.3 $f(x) = \dfrac{1}{2 - x^2};\ a = 1,\ b = 1.02$

4. รัศมีของแผ่นเหล็กรูปวงกลมอันหนึ่งวัดได้ 8 นิ้ว โดยที่ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดในการวัดนี้ไม่เกิน 0.06 นิ้ว จงประมาณค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดในการคำนวณพื้นที่ด้านหนึ่งของแผ่นเหล็กนี้ และให้ประมาณค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ และค่าความคลาดเคลื่อนร้อยละของพื้นที่ของแผ่นเหล็กนี้
5. จงประมาณค่าของปริมาตรของสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ที่เพิ่มขึ้น เมื่อความยาวของด้านเพิ่มจาก 10 นิ้วไปเป็น 10.1 นิ้ว และจงหาค่าปริมาตรที่เปลี่ยนไปที่แท้จริง
6. จงประมาณค่าของพื้นที่ผิวของบอลลูนรูปทรงกลมที่ลดลง เมื่อรัศมีของบอลลูนเปลี่ยนจาก 2 ฟุตไปเป็น 1.98 ฟุต จากนั้นให้ประมาณค่าความคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์และค่าความคลาด เคลื่อนร้อยละของพื้นที่ผิวนี้
7. ทรายถังหนึ่งรั่วลงบนพื้นดินทำให้เกิดกองทรายรูปกรวยกลมตรง โดยที่ความสูงของกรวยเท่ากับรัศมีที่ฐานของกรวยเสมอ ในชั่วขณะหนึ่งเราวัดความยาวของรัศมีได้ 10 เซนติเมตร จงประมาณค่าของรัศมีที่เปลี่ยนไปซึ่งทำให้ปริมาตรของกองทรายเพิ่มขึ้น 2 ลูกบาศก์เซนติเมตรหลังจากการวัด
8. กำหนดให้ A เป็นพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านแต่ละด้านยาว s หน่วย ถ้า s เพิ่มขึ้นอีก Δs จงอภิปรายความหมายเชิงเรขาคณิตของ dA และ $\Delta A - dA$
9. กล่องไม้รูปลูกบาศก์ใบหนึ่งมีปริมาตรภายในเท่ากับ 64 ลูกบาศก์นิ้ว ความหนาของไม้ที่ใช้ทำกล่องใบนี้เท่ากับ $\frac{1}{2}$ นิ้ว จงประมาณว่าจะต้องใช้ไม้ในการทำกล่องใบนี้เท่าใด
10. ถ้าค่าความคลาดเคลื่อนร้อยละในการวัดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่ง เท่ากับ 4% แล้ว จงหาค่าความคลาดเคลื่อนร้อยละในการคำนวณพื้นที่ของสามเหลี่ยมรูปนี้
11. จงใช้ความรู้เรื่องผลต่างอนุพันธ์ในการประมาณค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

11.1	$(100.01)^6$	11.2	$\sqrt[3]{65}$
11.3	$(0.98)^4$	11.4	$\sin 31^\circ$
11.5	$\cos 58^\circ$	11.6	$(2.01)^4 - 3(2.01)^3 + 4(2.01)^2 - 5$

12. โรงงานผลิตอุปกรณ์กอล์ฟแห่งหนึ่งมีกำไรปีละ $P(x) = 400x - 10,000 - 0.2x^2$ โดยที่ x เป็นจำนวนอุปกรณ์ที่โรงงานผลิตในแต่ละปี ในขณะนี้โรงงานผลิตอุปกรณ์ออกขายปีละ 500 ชิ้น จงประมาณผลกำไรต่อปีของโรงงานนี้ เมื่อ

    12.1 โรงงานเพิ่มการผลิต 50 ชิ้นต่อปี

    12.2 โรงงานลดการผลิตลง 50 ชิ้นต่อปี

3.8 อัตราสัมพัทธ์

จากการศึกษาที่ผ่านมาเราได้พบการประยุกต์ของอนุพันธ์ในลักษณะที่ว่า อนุพันธ์เป็นตัวระบุอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของปริมาณ ๆ หนึ่งเมื่อเทียบกับปริมาณอีกอันหนึ่ง เช่นความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน ๆ หนึ่ง เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของค่าของฟังก์ชันนั้นเทียบกับตัวแปรอิสระที่เปลี่ยนไป ความเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นการวัดอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของระยะทางที่เปลี่ยนไปเมื่อเทียบกับเวลา แต่ปัญหาหลายปัญหาในทางวิทยาศาสตร์และสังคมศาสตร์ เรามักจะพบปริมาณที่สัมพันธ์กันโดยที่ปริมาณแต่ละตัว แปรเปลี่ยนไปตามเวลาที่ผ่านไป เช่น ก้อนน้ำแข็งรูปลูกบาศก์เมื่อละลาย ปริมาตร น้ำหนัก และขนาดของก้อนน้ำแข็งแปรเปลี่ยนไปตามเวลาที่ผ่านไป เราจะเรียกปัญหาที่เกี่ยวข้องกับอัตราของตัวแปรที่สัมพันธ์กันว่า **ปัญหาอัตราสัมพัทธ์** (related rate problem) ในปัญหาดังกล่าวเราจะหาอัตราซึ่งตัวแปรหนึ่งเปลี่ยนแปลงไปในเวลาใดเวลาหนึ่ง ในขณะที่เราทราบอัตราซึ่งตัวแปรอื่น ๆ เปลี่ยนแปลงไป

ให้ y เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x และให้ t แทนเวลา โดยที่ x และ y ต่างเป็นฟังก์ชันของ t ปัญหาอัตราสัมพัทธ์นี้จะระบุความสัมพันธ์ระหว่างอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของตัวแปร x เมื่อเทียบกับ t (นั่นคือ $\frac{dx}{dt}$) และอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของตัวแปร y เมื่อเทียบกับ t (นั่นคือ $\frac{dy}{dt}$) ซึ่งเราอาจหา $\frac{dy}{dt}$ ได้โดยใช้กฎลูกโซ่ และจะได้ว่า

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของปัญหาอัตราสัมพัทธ์

ตัวอย่าง 3.8.1 เด็กชายคนหนึ่งโยนก้อนหินลงไปในสระน้ำนิ่ง ทำให้เกิดรอยกระเพื่อมของน้ำเป็นวงกลมที่ขยายตัวออกไป ถ้ารัศมีของวงกลมเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 0.5 เมตรต่อวินาที อยากทราบว่าพื้นที่ของรอยกระเพื่อมนี้เพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด เมื่อรัศมีของรอยกระเพื่อมเท่ากับ 20 เมตร

วิธีทำ ให้ t แทน เวลา (หน่วยเป็นวินาที) ที่ผ่านไปจากเวลาที่ก้อนหินกระทบพื้นน้ำ

r แทน รัศมีของรอยกระเพื่อม (หน่วยเป็นเมตร) หลังจาก t วินาที

และ A แทน พื้นที่ของรอยกระเพื่อม (หน่วยเป็นเมตร^2) หลังจาก t วินาที

โจทย์ต้องการทราบ $\frac{dA}{dt}$ เมื่อ $r = 20$

เนื่องจาก $A = \pi r^2$ และ A และ r ต่างเป็นฟังก์ชันของ t เราจะได้ว่า

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

ดังนั้นเมื่อ $\frac{dr}{dt} = 0.5$ และ $r = 20$ จะได้

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(20)(0.5) = 20\pi \approx 62.8 \quad \text{เมตร}^2\text{ต่อวินาที}$$

นั่นคือพื้นที่ของรอยกระเพื่อมเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 62.8 เมตร^{2}ต่อวินาที เมื่อรัศมีของรอยกระเพื่อมเท่ากับ 20 เมตร ❍

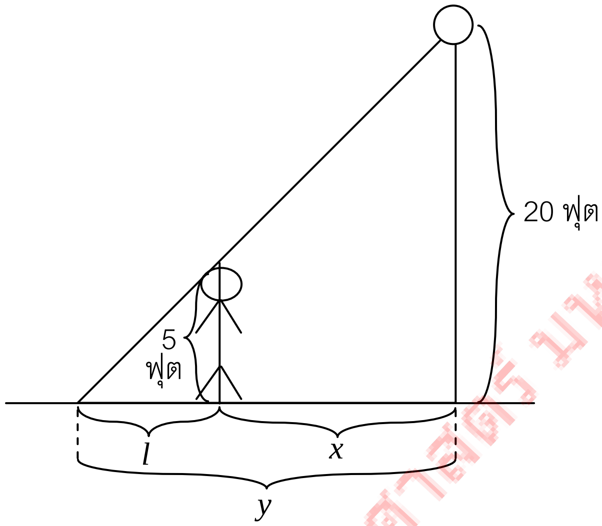
ข้อแนะนำต่อไปนี้จะเป็นแนวทางสำหรับการแก้ปัญหาอัตราสัมพัทธ์

1. ถ้าเป็นไปได้ให้เขียนรูปประกอบสถานการณ์ของโจทย์
2. กำหนดสัญลักษณ์แทนตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง
3. แปลความหมายของอัตราการเปลี่ยนแปลงในรูปของอนุพันธ์
4. หาสมการแทนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร ซึ่งเมื่อเราหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาแล้ว อัตราที่เราต้องการหามักจะเป็นอัตราเดียวในสมการที่เราไม่ทราบค่า
5. หาอนุพันธ์ของสมการใน (4) เทียบกับเวลา จากนั้นให้แก้สมการโดยการแทนค่าของตัวแปรและอัตราที่เราทราบค่า แล้วหาอัตราที่เราไม่ทราบค่าตามที่โจทย์ต้องการ

ตัวอย่าง 3.8.2 เด็กคนหนึ่งสูง 5 ฟุตเดินเข้าหาเสาไฟที่สูง 20 ฟุต ด้วยอัตรา 6 ฟุตต่อวินาที

1. อยากทราบว่าปลายเงาศีรษะของเด็กคนนี้เคลื่อนที่ด้วยอัตราเท่าใด
2. ความยาวของเงาของเด็กคนนี้เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด

วิธีทำ เราอาจกำหนดตัวแปรต่าง ๆ และเขียนรูปประกอบได้ดังนี้



รูป 3.8.1

ให้ t แทน เวลา (หน่วยเป็นวินาที) ที่ผ่านไปจากเวลาที่เด็กเริ่มเดิน

x แทน ระยะทางระหว่างเด็กคนนี้กับโคนเสาไฟ (หน่วยเป็นฟุต) หลังจาก t วินาที

และ y แทน ระยะทางระหว่างปลายเงาศีรษะของเด็กคนนี้กับโคนเสาไฟ (หน่วยเป็นฟุต) หลังจาก t วินาที

1. จากสามเหลี่ยมคล้ายในรูป 3.8.1 เราได้ว่า $\dfrac{y}{y-x}=\dfrac{20}{5}$ ดังนั้น $y=4(y-x)$ หรือ $3y=4x$ จะเห็นว่า

$3\dfrac{dy}{dt}=4\dfrac{dx}{dt}$ นั่นคือ $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{4}{3}\dfrac{dx}{dt}$

เนื่องจากเด็กเดินเข้าหาเสาไฟ ทำให้ระยะทางระหว่างเด็กและเสาไฟลดลง จึงทำให้ได้ว่า $\dfrac{dx}{dt}$ ต้องมีค่าน้อยกว่า 0 ดังนั้น $\dfrac{dx}{dt}=-6$ ซึ่งทำให้ $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{4}{3}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{4}{3}(-6)=-8$

นั่นคือ ปลายเงาศีรษะของเด็กคนนี้เคลื่อนที่เข้าหาเสาไฟด้วยอัตรา 8 ฟุตต่อวินาที

2. ต่อไปให้ l แทนความยาวของเงาของเด็กคนนี้ (หน่วยเป็นฟุต)

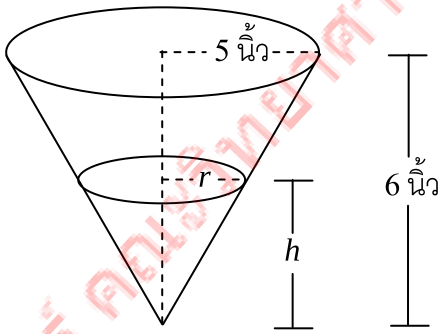
จะเห็นว่า $l = y - x$ ดังนั้น $\dfrac{dl}{dt} = \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dx}{dt}$

จาก $\dfrac{dy}{dt} = -8$ และ $\dfrac{dx}{dt} = -6$ ทำให้เราได้ว่า $\dfrac{dl}{dt} = \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{dx}{dt} = -8-(-6) = -2$

นั่นคือความยาวของเงาของเด็กคนนี้ลดลงด้วยอัตรา 2 ฟุตต่อวินาที ❍

ตัวอย่าง 3.8.3 ถ้วยกระดาษรูปกรวยกลมตรง ปากกรวยมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 นิ้ว และมีความสูง 6 นิ้ว มีน้ำอยู่เต็ม ปลายกรวยมีรูรั่ว ทำให้น้ำไหลออกด้วยอัตราเร็ว 3 ลูกบาศก์นิ้วต่อนาที จงหาว่าระดับน้ำเปลี่ยนไปด้วยอัตราเร็วเท่าใด ขณะเมื่อความสูงของน้ำเป็น 2 นิ้ว

วิธีทำ เราอาจกำหนดตัวแปรต่าง ๆ และเขียนรูปประกอบได้ดังนี้



รูป 3.8.2

ให้ t แทน เวลา (หน่วยเป็นนาที) ที่ผ่านไปจากเวลาที่น้ำเริ่มรั่ว

h แทน ความสูงของระดับน้ำ (หน่วยเป็นนิ้ว) หลังจาก t นาที

r แทน รัศมีของพื้นผิวน้ำในกรวย (หน่วยเป็นนิ้ว) เมื่อความลึกของน้ำเป็น h

และ V แทน ปริมาตรของน้ำ (หน่วยเป็นลูกบาศก์นิ้ว) หลังจาก t นาที

ดังนั้น

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (3.8.1)$$

โจทย์ต้องการหา $\frac{dh}{dt}$ เมื่อ $h=2$ และจะได้ว่า $\frac{dV}{dt}=-3$ ลูกบาศก์นิ้วต่อนาที (เครื่องหมายเป็นลบเพราะว่าปริมาตรลดลงเมื่อเวลามากขึ้น) จากสามเหลี่ยมคล้ายในรูป 3.8.2 เราได้ว่า $\frac{r}{h}=\frac{5}{6}$ หรือ $r=\frac{5h}{6}$

แทนค่า $r=\frac{5h}{6}$ ลงไปใน (3.8.1) เราได้ว่า $V=\frac{25}{108}\pi h^3$ และ $\frac{dV}{dt}=\frac{25}{36}\pi h^2\frac{dh}{dt}$

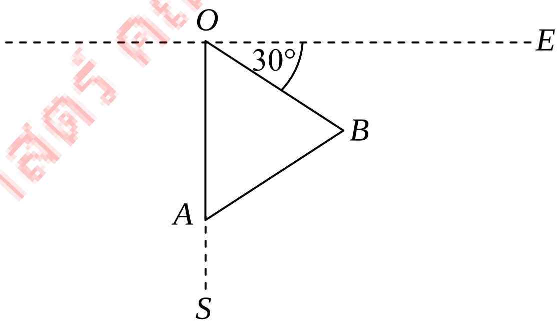
จากโจทย์เราทราบว่า $\frac{dV}{dt}=-3$ ลูกบาศก์นิ้วต่อนาที ดังนั้น เมื่อ $h=2$ เราได้ว่า

$$\frac{dh}{dt}=\frac{-27}{\pi(25)}\approx -0.344 \quad \text{นิ้วต่อนาที}$$

นั่นคือระดับน้ำในกรวยลดลงด้วยอัตราประมาณ 0.344 นิ้วต่อนาที เมื่อความสูงของน้ำในกรวยเท่ากับ 2 นิ้ว

❍

ตัวอย่าง 3.8.4 เมื่อเวลา 12.00 น. เรือ A ออกจากท่าเรือ O ลงไปทางทิศใต้ด้วยความเร็ว 10 ไมล์ต่อชั่วโมง และเมื่อเวลา 14.00 น. เรือ B ออกจากท่าเรือ O ไปทางทิศตะวันออกเฉียงลงทางทิศใต้ และทำมุมกับทิศตะวันออก 30° (ดูรูป 3.8.3) ด้วยความเร็ว 20 ไมล์ต่อชั่วโมง อยากทราบว่าเรือทั้งสองลำแยกออกจากกันด้วยอัตราเท่าใด ณ เวลา 17.00 น.



รูป 3.8.3

วิธีทำ ให้ t แทน เวลา (หน่วยเป็นชั่วโมง) ที่เรือออกจากท่า

x แทน ระยะทาง (หน่วยเป็นไมล์) ที่เรือ A แล่นไป หลังออกจากท่า O

y แทน ระยะทาง (หน่วยเป็นไมล์) ที่เรือ B แล่นไป หลังออกจากท่า O

และ z แทน ระยะทาง (หน่วยเป็นไมล์) ระหว่างเรือ A และเรือ B

จากรูป 3.8.3 จะเห็นว่า $x=|OA|$, $y=|OB|$, $z=|AB|$ และ $A\hat{O}B=60^\circ$ จากกฎของโคไซน์ เราได้ว่า

$z^2=x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ$ เพราะว่า $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ ดังนั้น

$$z^2=x^2+y^2-xy \qquad (3.8.2)$$

และ

$$2z\frac{dz}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}-x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}$$

เมื่อเวลา 17.00 น. เราได้ว่า $x=50$ และ $y=60$ แทนค่า x และ y ลงไปใน (3.8.2) จะได้ $z=10\sqrt{31}$

ดังนั้น $2(10\sqrt{31})\frac{dz}{dt}=2(50)(10)+2(60)(20)-50(20)-60(10)$ เพราะฉะนั้น $\frac{dz}{dt}=\frac{90}{\sqrt{31}}$ ไมล์ต่อชั่วโมง นั่นคือเรือทั้งสองลำแยกออกจากกันด้วยอัตรา $\frac{90}{\sqrt{31}}$ ไมล์ต่อชั่วโมง เมื่อเวลา 17.00 น. ❍

ตัวอย่าง 3.8.5 สระว่ายน้ำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแห่งหนึ่งที่มีหน้าตัดขวางเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ยาว 10 เมตร กว้าง 5 เมตร โดยที่ปลายด้านหนึ่งของสระลึก 3 เมตรและอีกด้านหนึ่งลึก 1 เมตร ถ้าเราสูบน้ำลงสระด้วยอัตรา 300 ลิตรต่อนาที อยากทราบว่าระดับน้ำในสระสูงขึ้นด้วยอัตราเท่าใด เมื่อความสูงของระดับน้ำทางด้านลึกของสระเท่ากับ 1.5 เมตร (น้ำ 1 ลิตร = 10^{-3} ลูกบาศก์เมตร)

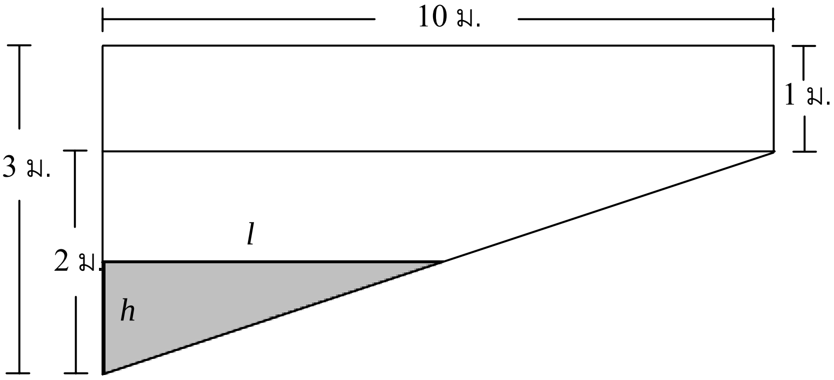
วิธีทำ ให้ t แทน เวลา (หน่วยเป็นนาที) ที่ผ่านไปจากเวลาที่เริ่มสูบน้ำลงสระ

h แทน ระดับความสูงของน้ำ (หน่วยเป็นเมตร) ที่วัดทางด้านลึกของสระ

l แทน ระยะทาง (หน่วยเป็นเมตร) บนผิวน้ำที่วัดจากทางด้านลึกของสระไปยังด้านตื้นของสระ

V แทน ปริมาตร (หน่วยเป็นลูกบาศก์) ของน้ำในสระ

รูปหน้าตัดของสระตามความยาวของสระอาจเขียนได้ดังในรูป 3.8.4



รูป 3.8.4

เราจะเห็นว่า V = พื้นที่หน้าตัดรูปสามเหลี่ยม × ความกว้างของสระ = $\left(\frac{1}{2}hl\right)(5)$ โดยคุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายในรูป 3.8.4 เราได้ว่า $h=\frac{2}{10}l$ หรือ $l=5h$ (โดยที่ $h \le 2$) ดังนั้น $V=\frac{25}{2}h^2$ ลูกบาศก์เมตร และเราได้ $\frac{dV}{dt}=25h\frac{dh}{dt}$ ดังนั้น $\frac{dh}{dt}=\frac{1}{25h}\frac{dV}{dt}$ จากโจทย์ เราทราบว่า $\frac{dV}{dt}=300$ ลิตรต่อนาที $=300(10^{-3})$ ลูกบาศก์เมตรต่อนาที และเมื่อ $h=1.5$ จะได้ $\frac{dh}{dt}=\frac{1}{25(1.5)}300(10^{-3})=0.008$ เมตรต่อนาที นั่นคือระดับน้ำในสระสูงขึ้นด้วยอัตรา 0.008 เมตรต่อนาที เมื่อความสูงของระดับน้ำทางด้านลึกของสระเท่ากับ 1.5 เมตร ❍

แบบฝึกหัด 3.8

1. ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เราจะให้ x และ y เป็นฟังก์ชันของ t ที่หาอนุพันธ์ได้ จงหา $\dfrac{dx}{dt}$ เมื่อกำหนดให้ $x=3$, $y=4$ และ $\dfrac{dy}{dt}=2$

   1.1 $x^2+y^2=25$

   1.2 $x^2-y^2=-7$

   1.3 $x^3y^2=432$

   1.4 $x^2y^3=576$

2. ถ้าด้านแต่ละด้านของลูกบาศก์ลูกหนึ่งเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 3 เซนติเมตร/วินาที อยากทราบว่าปริมาตรของลูกบาศก์ลูกนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด เมื่อความยาวของด้านของลูกบาศก์เท่ากับ 10 เซนติเมตร

3. ให้ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีค่าคงที่เท่ากับ 45 เซนติเมตร และความยาวของด้านประกอบมุมฉากเป็น x และ y ถ้าเรายืดด้านประกอบมุมฉากที่ยาว x ออกไปด้วยอัตรา 2 เซนติเมตรต่อนาที อยากทราบว่าความยาวของด้านประกอบที่เหลือจะเปลี่ยนแปลงไปด้วยอัตราเท่าใด เมื่อ x ยาว 4 เซนติเมตร

4. ลูกโป่งรูปทรงกลมใบหนึ่งที่อัดด้วยแก๊สรั่วออกด้วยอัตรา 1.5 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที อยากทราบว่าพื้นที่ผิวของลูกโป่งลูกนี้จะหดตัวลงด้วยอัตราเท่าใด เมื่อรัศมีของลูกโป่งเท่ากับ 4 เมตร

5. สระว่ายน้ำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าแห่งหนึ่งที่มีหน้าตัดขวางเป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ยาว 30 เมตร กว้าง 15 เมตร ลึก 3 เมตร ทางด้านสระผู้ใหญ่และลึก 1 เมตร ทางด้านสระเด็ก ถ้าสูบน้ำใส่ลงไปในสระด้วยอัตรา 15 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที อยากทราบว่าระดับน้ำจะสูงขึ้นด้วยอัตราเท่าใด เมื่อวัดความลึกของระดับน้ำทางด้านสระผู้ใหญ่ได้เท่ากับ 2 เมตร

6. บันไดยาว 8 เมตร พิงไว้กับกำแพงแห่งหนึ่ง ถ้าชายคนหนึ่งดึงฐานของบันไดออกจากกำแพงด้วยอัตรา 0.5 เมตรต่อวินาที อยากทราบว่าปลายบันไดอันนี้จะเคลื่อนตัวลงด้วยอัตราเท่าใด เมื่อฐานของบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 3 เมตร และ 6 เมตร ตามลำดับ

7. วัตถุหนัก K ปอนด์ เมื่อชั่งบนพื้นผิวโลก จะหนัก

$$W(R)=K\left(\frac{4000}{4000+R}\right)^2$$

ปอนด์ เมื่อชั่งเหนือพื้นผิวโลก R ไมล์ อยากทราบว่าน้ำหนักของวัตถุ 1,000 ปอนด์ จะเปลี่ยนไปด้วยอัตราเท่าใดเมื่อชั่งวัตถุนี้เหนือพื้นผิวโลก 50 ไมล์ และวัตถุนี้ถูกยกขึ้นไปเหนือพื้นผิวโลกด้วยอัตรา 10 ไมล์ต่อวินาที

8. ถ้ารัศมีของวัตถุรูปทรงกลมใบหนึ่งเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 นิ้วต่อวินาที อยากทราบว่าปริมาตรของวัตถุใบนี้เปลี่ยนแปลงไปด้วยอัตราเท่าใด เมื่อรัศมีของทรงกลมเท่ากับ 8 นิ้ว
9. เสาไฟต้นหนึ่งสูง 16 ฟุต เด็กชายคนหนึ่งสูง 5 ฟุต เดินห่างออกจากเสาไฟด้วยอัตรา 4 ฟุตต่อวินาที อยากทราบว่าปลายเงาของเด็กคนนี้จะเคลื่อนที่ด้วยอัตราเท่าใด เมื่อเขาอยู่ห่างจากเสาไฟ 18 ฟุต และความยาวของเงาของเขาจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด
10. เด็กหญิงคนหนึ่งสูง 5 ฟุต เงาของเด็กคนนี้ทอดยาว 6 ฟุต เมื่อเธอยืนห่างจากเสาไฟ 12 ฟุต จากนั้นเด็กหญิงคนนี้เดินห่างออกจากเสาไฟด้วยอัตรา 3 ฟุตต่อวินาที อยากทราบว่าความยาวของเงาของเด็กคนนี้เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด เมื่อเธออยู่ห่างจากเสาไฟ 24 ฟุต
11. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งถูกเขียนให้แนบในวงกลม ถ้ารัศมีของวงกลมวงนี้เพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 3 เซนติเมตรต่อนาที อยากทราบว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด เมื่อรัศมีของวงกลมเท่ากับ 10 เซนติเมตร
12. เมื่อพื้นที่ของสามเหลี่ยมด้านเท่าลดลงด้วยอัตรา 4 ตารางเซนติเมตรต่อนาที อยากทราบว่าความยาวของด้านของสามเหลี่ยมเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด เมื่อพื้นที่ของสามเหลี่ยมเท่ากับ $400\sqrt{3}$ ตารางเซนติเมตร