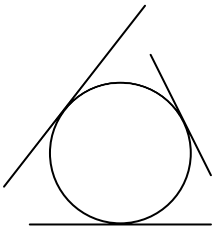
บทที่ 2
อนุพันธ์
Derivatives

ในอดีตเมื่อประมาณ 7000 ปีมาแล้ว บรรดานักคณิตศาสตร์ชาวกรีกได้พยายามแก้ปัญหาการหาเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดใด ๆ จนกระทั่งถึงกลางศตวรรษที่ 17 สามารถแก้ปัญหาได้สำหรับบางกรณี ระหว่างปี ค.ศ. 1665-1666 เซอร์ไอแซก นิวตัน ได้ริเริ่มแนวคิดของอนุพันธ์ ซึ่งเป็นวิธีที่สามารถหาเส้นสัมผัสของเส้นโค้งต่าง ๆ ได้ การศึกษาเรื่องอนุพันธ์เป็นการเริ่มศึกษาวิชาแคลคูลัสอย่างแท้จริง เมื่อได้ศึกษาจนคุ้นเคยและมีความรู้ในวิชาแคลคูลัสมากขึ้นจะพบว่าการประยุกต์เนื้อหาของวิชานี้มีประโยชน์และสำคัญมากสำหรับการศึกษาทางวิทยาศาสตร์ในหลาย ๆ สาขาวิชา เราสามารถนำอนุพันธ์ไปประยุกต์ใช้กับการศึกษาอัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่าง ๆ เช่น นักเคมีใช้อนุพันธ์ในการทำนายผลต่าง ๆ ของปฏิกิริยาทางเคมี นักชีววิทยาใช้อนุพันธ์ในการหาอัตราการเจริญเติบโตของแบคทีเรีย วิศวกรไฟฟ้าใช้อนุพันธ์ในการอภิปรายการเปลี่ยนแปลงของกระแสในวงจรไฟฟ้า นักเศรษฐศาสตร์ใช้อนุพันธ์ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับกำไรและขาดทุน เป็นต้น

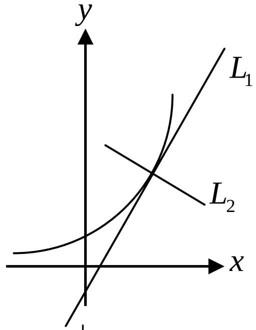
จุดมุ่งหมายของการศึกษาเนื้อหาในบทนี้เพื่อทำความเข้าใจความหมายของ "อนุพันธ์ของฟังก์ชัน" และศึกษาเทคนิคของการหาอนุพันธ์โดยใช้กฎเกณฑ์และสมบัติต่าง ๆ เพื่อนำไปสู่การศึกษาการประยุกต์ของอนุพันธ์ในบทต่อไป

2.1 ปัญหาทางเรขาคณิต

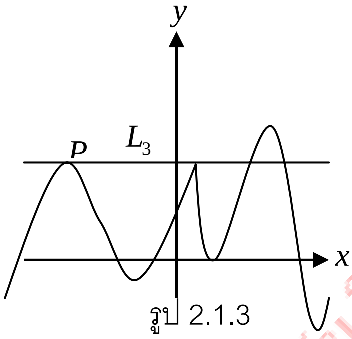
ปัญหาใหญ่ข้อหนึ่งในวิชาแคลคูลัส คือการให้นิยามเส้นสัมผัสเส้นโค้ง (tangent line) ที่จุดใดจุดหนึ่งบนเส้นโค้ง ซึ่งในทางเรขาคณิตจะคิดว่าเส้นสัมผัสเส้นโค้งคือเส้นตรงที่สัมผัสวงกลมหรือวงรีที่จุดใดจุดหนึ่งเพียงจุดเดียว ดังรูป 2.1.1 แต่ความคิดนี้ไม่อาจนำมาใช้ประโยชน์กับเส้นโค้งประเภทอื่นได้ ดังตัวอย่างในรูป 2.1.2 และรูป 2.1.3



รูป 2.1.1



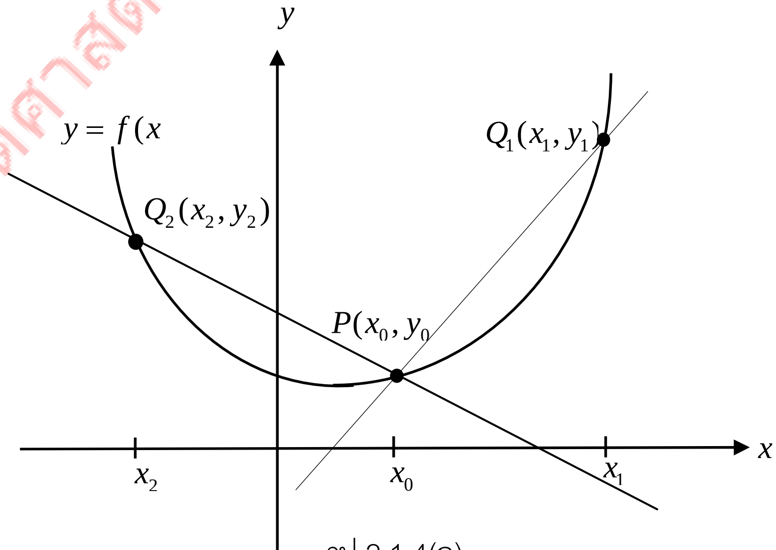
รูป 2.1.2



รูป 2.1.3

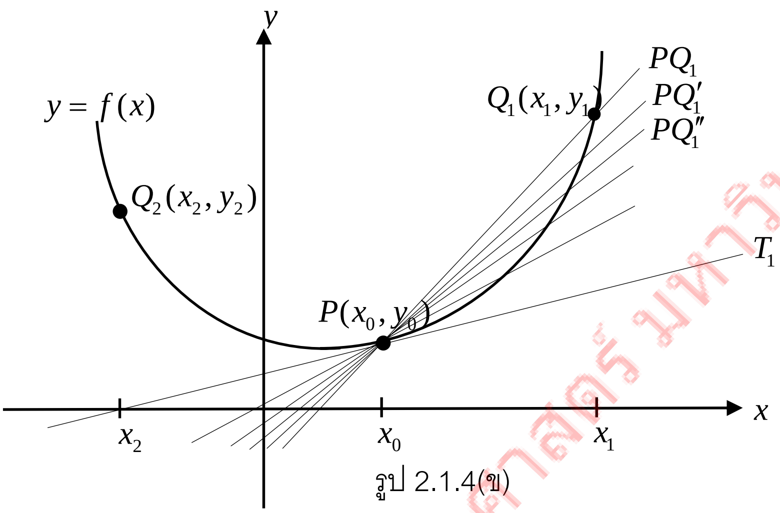
ในรูป 2.1.2 เส้นตรง L_1 และ L_2 ตัดกับเส้นโค้งที่จุดเพียงจุดเดียวบนเส้นโค้ง และเมื่อพิจารณาจากรูปจะเห็นว่า L_1 เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้น แต่ L_2 ไม่เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ในรูป 2.1.3 เส้นตรง L_3 เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P แม้ว่า เส้นตรง L_3 จะตัดผ่านเส้นโค้งมากกว่าหนึ่งจุด ที่กล่าวถึงตัวอย่างเหล่านี้ก็เพื่อเน้นว่า เส้นสัมผัสเส้นโค้งไม่ได้หมายถึงเส้นตรงที่ตัดผ่านเส้นโค้งเพียงจุดเดียว และเพื่อให้ได้ความหมายที่แท้จริง จะนิยามเส้นสัมผัสเส้นโค้งในเชิงลิมิต ซึ่งจะกล่าวโดยพิจารณาจากรูป 2.1.4(ก) 2.1.4(ข) และ 2.1.4(ค)

ให้ $P(x_0, y_0)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง $Q_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดบนเส้นโค้งที่อยู่ทางขวาของจุด P และ $Q_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดบนเส้นโค้งที่อยู่ทางซ้ายของจุด P ดังรูป 2.1.4(ก) โดยสูตรการหาความชันของเส้นตรง จะได้ความชันของส่วนของเส้นตรง $\overline{PQ_1}$ และ $\overline{PQ_2}$ คือ $m_{PQ_1} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ และ $m_{PQ_2} = \dfrac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}$ ตามลำดับ



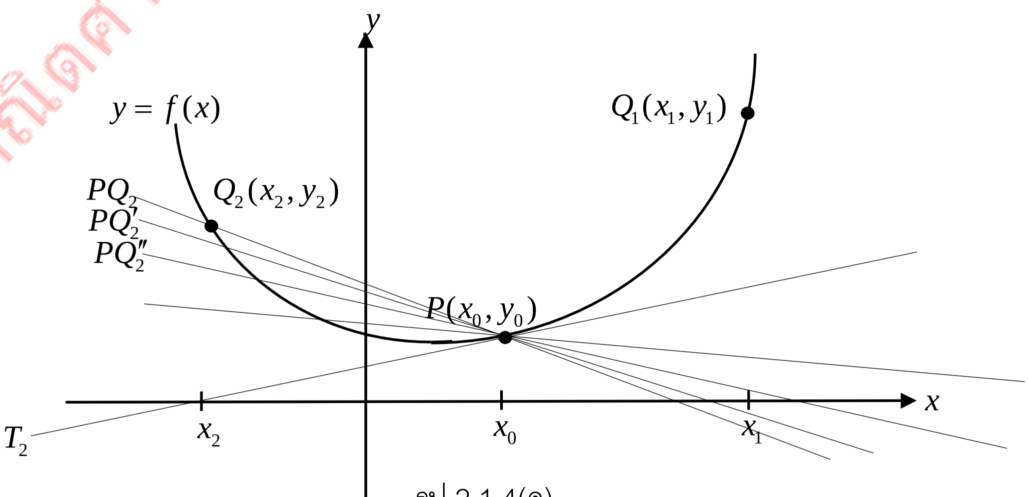
รูป 2.1.4(ก)

เมื่อจุด Q_1 เคลื่อนเข้าหาจุด P ทางด้านขวาตามกราฟของฟังก์ชัน เพื่อให้ $x_1 \to x_0^+$ (หรือ $h \to 0^+$ เมื่อ $h = x_1 - x_0$) ตามรูป 2.1.4(ข) จะได้ส่วนของเส้นตรง PQ_1, PQ_1', PQ_1'',... ซึ่งส่วนของเส้นตรงทั้งหลายนี้จะมีแนวโน้มเข้าหาเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ผ่านจุด P ให้ชื่อว่าเส้นตรง T_1 จะได้ความชันของ T_1 เท่ากับ $\lim\limits_{x_1 \to x_0^+} \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$



รูป 2.1.4(ข)

ในทำนองเดียวกันเมื่อจุด Q_2 เคลื่อนเข้าหาจุด P ทางด้านซ้ายตามกราฟของฟังก์ชัน เพื่อให้ $x_2 \to x_0^-$ (หรือ $h \to 0^-$ เมื่อ $h = x_2 - x_0$) ตามรูป 2.1.4(ค) จะได้ส่วนของเส้นตรง PQ_2, PQ_2', PQ_2'', ...ซึ่งส่วนของเส้นตรงทั้งหลายนี้จะมีแนวโน้มเข้าหาเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ผ่านจุด P ให้ชื่อว่าเส้นตรง T_2 จะได้ความชันของ T_2 เท่ากับ $\lim\limits_{x_2 \to x_0^-} \dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

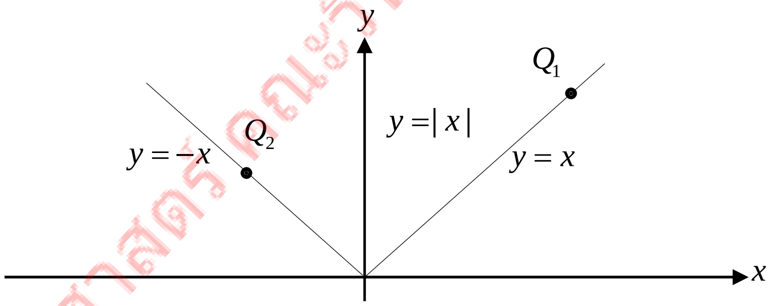


รูป 2.1.4(ค)

ถ้า T_1 และ T_2 เป็นเส้นตรงเดียวกัน จะเรียกเส้นตรงนี้ว่า **เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด** P (tangent line at the point P) ซึ่งมีความชันเท่ากับ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ข้อสังเกต $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ เมื่อ $h=x-x_0$

จะเห็นว่าการหาเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดหนึ่ง ๆ มีลักษณะเช่นเดียวกับการหาลิมิตจากทางซ้ายและทางขวาที่จุดใดจุดหนึ่ง ด้วยเหตุผลนี้ทำให้เส้นโค้งบางเส้นอาจไม่มีเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดบางจุดบนเส้นโค้งก็ได้ ตัวอย่างเช่นกราฟของฟังก์ชัน $y=|x|$ ไม่มีเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(0,0)$ โดยพิจารณาจากรูป 2.1.5 จะเห็นว่า เมื่อจุด Q_1 บนเส้นโค้งที่อยู่ทางขวาของจุด P เคลื่อนเข้าหา P ทางขวาตามกราฟของฟังก์ชัน จะได้ส่วนของเส้นตรงซึ่งมีแนวโน้มเข้าหาเส้นตรง $y=x$ ในขณะที่ จุด Q_2 บนเส้นโค้งที่อยู่ทางซ้ายของจุด P เคลื่อนเข้าหา P ทางซ้ายตามกราฟของฟังก์ชัน จะได้ส่วนของเส้นตรงซึ่งมีแนวโน้มเข้าหาเส้นตรง $y=-x$ ซึ่งไม่ได้เป็นเส้นตรงเดียวกัน



รูป 2.1.5

บทนิยาม 2.1.1 ความชัน (slope) ของเส้นโค้งที่จุด P คือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P

ตัวอย่าง 2.1.2 จงหาความชันของเส้นโค้ง $y = x^2$ ที่จุด $(1,1)$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+2h+h^2)-1^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$$

จะได้ว่าเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2$ ที่จุด $(1,1)$ มีความชันเท่ากับ 2

ดังนั้นความชันของเส้นโค้ง $y = x^2$ ที่จุด $(1,1)$ เท่ากับ 2 ❍

ตัวอย่าง 2.1.3 จงหาความชันของเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ ที่จุด $(2,5)$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left((2+h)^2+1\right)-\left((2)^2+1\right)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4$$

ดังนั้นความชันของเส้นโค้ง $y = x^2 + 1$ ที่จุด $(2,5)$ เท่ากับ 4 ❍

2.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ต่อไปเราจะศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งเป็นการกล่าวถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะใดขณะหนึ่งของปริมาณ ๆ หนึ่ง แนวคิดนี้มีบทบาทสำคัญมากในการศึกษาแคลคูลัส เราจะได้เห็นว่าความชันของเส้นโค้ง ณ จุดต่าง ๆ บนเส้นโค้งที่เราได้ศึกษาในหัวข้อ 2.1 ที่ผ่านมานั้น คืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน ณ จุดนั้น ๆ

ในการศึกษาต่อไป จะเขียนแทนโดเมนของฟังก์ชัน f ด้วย D_f และถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันค่าจริง สำหรับ $x \in D_f \cap D_g$ จะให้ $(fg)(x) = f(x)g(x)$ และ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$ และสำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ให้ $f^n(x) = \left(f(x)\right)^n$

บทนิยาม 2.2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงเปิดรอบ a ถ้า

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (2.2.1)$$

หาได้ จะเรียกลิมิตนี้ว่า**อนุพันธ์ของ f ที่ a** (derivative of f at a) และกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่**หาอนุพันธ์ได้** (differentiable) ที่ a หรือ f มีอนุพันธ์ที่ a และเขียนแทนอนุพันธ์ของ f ที่ a ด้วยสัญลักษณ์ $f'(a)$ หรือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(a,f(a))}$ หรือ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ หรือ $\left.\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\right|_{x=a}$

ขอให้สังเกตว่าลิมิต (2.2.1) ก่อให้เกิดฟังก์ชัน f' ที่นิยามโดย

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

สำหรับทุก ๆ $x\in D_f$ ซึ่งลิมิตหาได้ และจะเรียกฟังก์ชัน f' ดังกล่าวว่า**อนุพันธ์ของ f** และถ้า f มีอนุพันธ์ที่ทุกสมาชิกในเซต $A\subseteq D_f$ จะกล่าวว่า **f หาอนุพันธ์ได้บน A**

นิยมเขียนแทน $f'(x)$ ด้วยสัญลักษณ์ $\frac{d}{dx}f(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ หรือ $D_x[f(x)]$ หรือ $D_x y$ โดยที่ตัวแปร x ในดรรชนีล่างของ D เป็นตัวชี้ว่า x เป็นตัวแปรอิสระ ในกรณีที่ t เป็นตัวแปรอิสระแล้ว จะเขียน $f'(t)=D_t[f(t)]$ สัญลักษณ์ D_x หรือ D_t มักถูกเรียกว่า **ตัวดำเนินการอนุพันธ์** (differential operator)

ข้อสังเกต จากหัวข้อ 2.1 จะเห็นว่าความหมายของ $f'(a)$ ในทางเรขาคณิตคือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่จุด $(a, f(a))$

ตัวอย่าง 2.2.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=2x^2+2x+3$ จงหา $f'(1)$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(2(1+h)^2+2(1+h)+3\right)-\left(2(1)^2+2(1)+3\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6h+2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{6h}{h}+\frac{2h^2}{h}\right)=6$$

ดังนั้น $f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=6$ ❍

ตัวอย่าง 2.2.3 จงหาความชันที่จุดใด ๆ บนเส้นตรง $y = f(x) = 2x+3$ พร้อมทั้งหาสมการเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $(6,15)$

วิธีทำ ให้ $(x_0, f(x_0))$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง $y = 2x+3$ จะได้ว่า

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\big(2(x_0+h)+3\big)-(2x_0+3)}{h}=\lim_{h\to 0}2=2$$

ดังนั้น $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=2$

แสดงว่าความชันของเส้นตรงที่จุด $(x_0, f(x_0))$ เท่ากับ 2

ต่อไปจะหาสมการเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $(6,15)$

ให้ (x, y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นสัมผัสดังกล่าว จากความรู้ที่ว่า ถ้า (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) เป็นจุดบนเส้นตรง L แล้วความชันของเส้นตรง L เท่ากับ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ และจุด (x, y) และ จุด $(6,15)$ อยู่บนเส้นสัมผัสเส้นตรงซึ่งมีความชันเท่ากับ 2 จะได้ว่า $2=\dfrac{y-15}{x-6}$

ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสกราฟที่จุด $(6,15)$ คือ $2(x-6)=y-15$ หรืออาจเขียนได้ว่า $y=2x+3$ ❍

ข้อสังเกต ความชัน ณ จุดใด ๆ บนเส้นตรงเท่ากันเสมอ จึงทำให้ได้ว่า เส้นสัมผัสกราฟของเส้นตรงคือเส้นตรงนั้นนั่นเอง

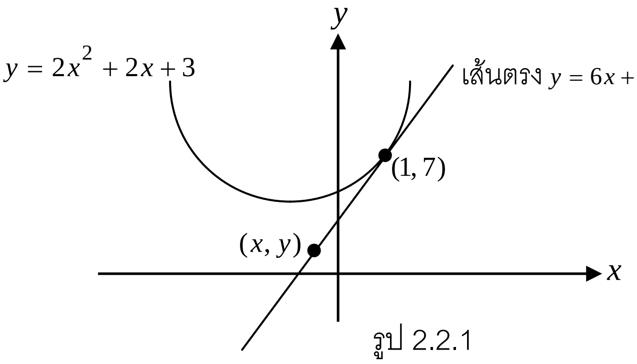
ตัวอย่าง 2.2.4 จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=2x^2+2x+3$ ที่จุด $(1,7)$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 2.2.2 ได้ว่า $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}=6$

แสดงว่าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1,7)$ เท่ากับ 6 ต่อไปจะหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1,7)$ โดยให้ (x, y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ดังรูป 2.1.6

เนื่องจากจุด (x, y) และ จุด $(1,7)$ อยู่บนเส้นสัมผัสเส้นโค้ง และเส้นสัมผัสเส้นโค้งเป็นเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 6 ทำให้ได้ว่า $6=\dfrac{y-7}{x-1}$

ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1,7)$ คือ $6(x-1)=y-7$ หรืออาจเขียนได้ว่า $y=6x+1$ ดังจะเห็นได้จากรูป 2.2.1



รูป 2.2.1

ตัวอย่าง 2.2.5 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = |x-1|$ จงหา $f'(1)$

วิธีทำ $f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & ,x-1 \ge 0 \\ -(x-1) & ,x-1<0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & ,x \ge 1 \\ 1-x & ,x<1 \end{cases}$

นั่นคือ $f(x) = x-1$ เมื่อ $x \ge 1$ และ $f(x) = 1-x$ เมื่อ $x<1$

ถ้า $h \to 0^-$ แล้ว $h<0$ ทำให้ $1+h<1$ ดังนั้น $f(1+h) = 1-(1+h) = -h$

แต่ถ้า $h \to 0^+$ แล้ว $h>0$ ทำให้ $1+h>1$ ดังนั้น $f(1+h) = (1+h)-1 = h$

เนื่องจาก $$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-h-0}{h} = \lim_{h\to 0^-}(-1) = -1$$

แต่ $$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0^+}1 = 1$$

แสดงว่า $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ หาไม่ได้เพราะ $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} \ne \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

ดังนั้น f ไม่มีอนุพันธ์ที่ 1

ตัวอย่าง 2.2.6 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = \begin{cases} x^2, & x<2 \\ 4x-4, & x \ge 2 \end{cases}$ จงหา $f'(2)$

วิธีทำ ถ้า $h \to 0^-$ แล้ว $h<0$ ทำให้ $2+h<2$ ดังนั้น $f(2+h) = (2+h)^2 = 4+4h+h^2$

แต่ถ้า $h \to 0^+$ แล้ว $h>0$ ทำให้ $2+h>2$ ดังนั้น $f(2+h) = 4(2+h)-4 = 4+4h$

เนื่องจาก $f(2) = 4(2)-4 = 4$ ดังนั้น

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\left(4+4h+h^2\right)-4}{h} = \lim_{h\to 0^-}\left(4+h\right) = 4$$

และ

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(4+4h)-4}{h}=\lim_{h\to 0^+}4=4$$

จะได้ว่า $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=4$ ดังนั้น $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=4$ ❍

ตัวอย่าง 2.2.7 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=x^3$

จงหา 1. $f'(x)$ สำหรับทุก ๆ x ในโดเมนของ f

2. $f'(1)$ และ $f'(2)$

วิธีทำ 1. ให้ $x\in D_f$ จะได้ว่า $f(x)=x^3$ ดังนั้น

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right)=3x^2$$

แสดงว่า $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2$ ดังนั้น $f'(x)=3x^2$ สำหรับทุก ๆ $x\in D_f$

2. จากข้อ 1 จะได้ว่า $f'(1)=3(1)^2=3$ และ $f'(2)=3(2)^2=12$ ❍

ตัวอย่าง 2.2.8 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<2\\ 5x-5, & x\geq 2\end{cases}$

จงหา 1. $f'(x)$ สำหรับทุก ๆ x ในโดเมนของ f

2. $f'(1)$ และ $f'(4)$

วิธีทำ 1. ให้ $x\in D_f$ จะได้ว่า $x<2$ หรือ $x=2$ หรือ $x>2$ เราจะแสดงการหา $f'(x)$ โดยแบ่งเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณี $x<2$ จะได้ว่า $f(x)=x^2+1$ และ $0<2-x$

ถ้า $h\to 0^+$ ซึ่ง $0<h<2-x$ แล้ว $x+h<x+(2-x)=2$ และถ้า $h\to 0^-$ แล้ว $h<0$ ทำให้ $x+h<2$ แสดงว่า ถ้า $h\to 0$ แล้ว $x+h<2$ และจะได้ $f(x+h)=(x+h)^2+1$ ดังนั้น

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left((x+h)^2+1\right)-\left(x^2+1\right)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

แสดงว่า $f'(x)=2x$ เมื่อ $x<2$

กรณี $x>2$ จะได้ว่า $f(x)=5x-5$ และ $0>2-x$

ถ้า $h\to 0^-$ ซึ่ง $0>h>2-x$ แล้ว $x+h>x+(2-x)=2$ และถ้า $h\to 0^+$ แล้ว $h>0$ ทำให้ $x+h>2$ แสดงว่า ถ้า $h\to 0$ แล้ว $x+h>2$ และจะได้ $f(x+h)=5(x+h)-5$ ดังนั้น

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(5(x+h)-5\right)-(5x-5)}{h}=5$$

แสดงว่า $f'(x)=5$ เมื่อ $x>2$

กรณี $x=2$ จะได้ว่า $f(2)=5(2)-5=5$

ถ้า $h\to 0^-$ แล้ว $h<0$ ทำให้ $2+h<2$ ดังนั้น $f(2+h)=(2+h)^2+1$

แต่ถ้า $h\to 0^+$ แล้ว $h>0$ ทำให้ $2+h>2$ ดังนั้น $f(2+h)=5(2+h)-5$ ดังนั้น

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\left((2+h)^2+1\right)-5}{h}=\lim_{h\to 0^-}(4+h)=4 \quad \text{และ}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\left(5(2+h)-5\right)-5}{h}=\lim_{h\to 0^+}5=5$$

แสดงว่า $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ หาค่าไม่ได้ ทำให้ได้ว่า f ไม่มีอนุพันธ์ที่ 2

ดังนั้น $f'(x)=\begin{cases}2x & ,x<2\\ 5 & ,x>2\end{cases}$

2. จากข้อ 1 จะได้ $f'(1)=2(1)=2$ และ $f'(4)=5$

ตัวอย่าง 2.2.9 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=\begin{cases}x^2 & ,x<-3\\ 2x+15 & ,x\ge -3\end{cases}$

จงหา 1. $f'(x)$ เมื่อ $x<-3$

2. $f'(-5)$

3. $f'(-3)$

4. $f'(-2.5)$

วิธีทำ 1. ให้ $x<-3$ จะได้ว่า $f(x)=x^2$ และ $0<-3-x$ ถ้า $h\to 0^+$ ซึ่ง $0<h<-3-x$ แล้ว $x+h<x+(-3-x)=-3$ และถ้า $h\to 0^-$ แล้ว $h<0$ ทำให้ $x+h<-3$ แสดงว่า ถ้า $h\to 0$ แล้ว $x+h<-3$ และจะได้ $f(x+h)=(x+h)^2$ เนื่องจาก

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0^-}(2x+h)=2x$$

ดังนั้น $f'(x)=2x$ เมื่อ $x<-3$

2. จาก $-5<-3$ และข้อ 1 ได้ว่า $f'(-5)=2(-5)=-10$

3. ถ้า $h\to 0^-$ แล้ว $h<0$ ทำให้ $-3+h<-3$ ดังนั้น $f(-3+h)=(-3+h)^2$
แต่ถ้า $h\to 0^+$ แล้ว $h>0$ ทำให้ $-3+h>-3$ ดังนั้น $f(-3+h)=2(-3+h)+15$
เนื่องจาก $f(-3)=2(-3)+15=9$ จะได้ว่า

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(-3+h)^2-9}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-6+h)=-6$$

แต่
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(2(-3+h)+15)-9}{h}=\lim_{h\to 0^+}2=2$$

แสดงว่า $\lim_{h\to 0}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}$ หาค่าไม่ได้ และดังนั้น f ไม่มีอนุพันธ์ที่ -3

4. ถ้า $h\to 0^-$ ซึ่ง $0>h>-0.5$ ทำให้ $-2.5+h>-2.5-0.5=-3$
และถ้า $h\to 0^+$ แล้ว $h>0$ ทำให้ $-2.5+h>-2.5+0>-3$
แสดงว่า ถ้า $h\to 0$ แล้ว $-2.5+h>-3$ และจะได้ $f(x+h)=2(-2.5+h)+15$
เนื่องจาก $f(-2.5)=2(-2.5)+15=10$ จะได้ว่า

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-2.5+h)-f(-2.5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(-2.5+h)+15-10}{h}=\lim_{h\to 0}2=2$$

ดังนั้น $f'(-2.5)=2$

ตัวอย่าง 2.2.10 กำหนดให้ $y = f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 1 \\ 2x+1, & x > 1 \end{cases}$ จงหา $f'(1)$

วิธีทำ ถ้า $h \to 0^+$ แล้ว $h > 0$ ทำให้ $1+h > 1$ ดังนั้น $f(1+h) = 2(1+h)+1$

เนื่องจาก $f(1) = 1^3 = 1$ จะได้ว่า

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\left(2\left(1+h\right)+1\right)-1}{h} = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{2}{h}+2\right) = \infty$$

แสดงว่า $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น f ไม่มีอนุพันธ์ที่ 1 ❍

ตัวอย่าง 2.2.11 ให้ $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ จงหา $f'(x)$ สำหรับ $x \ne 0$

วิธีทำ สำหรับแต่ละ $x \ne 0$ จะได้

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h} \cdot \frac{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\left(x+h\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3}{h\left((x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}$$

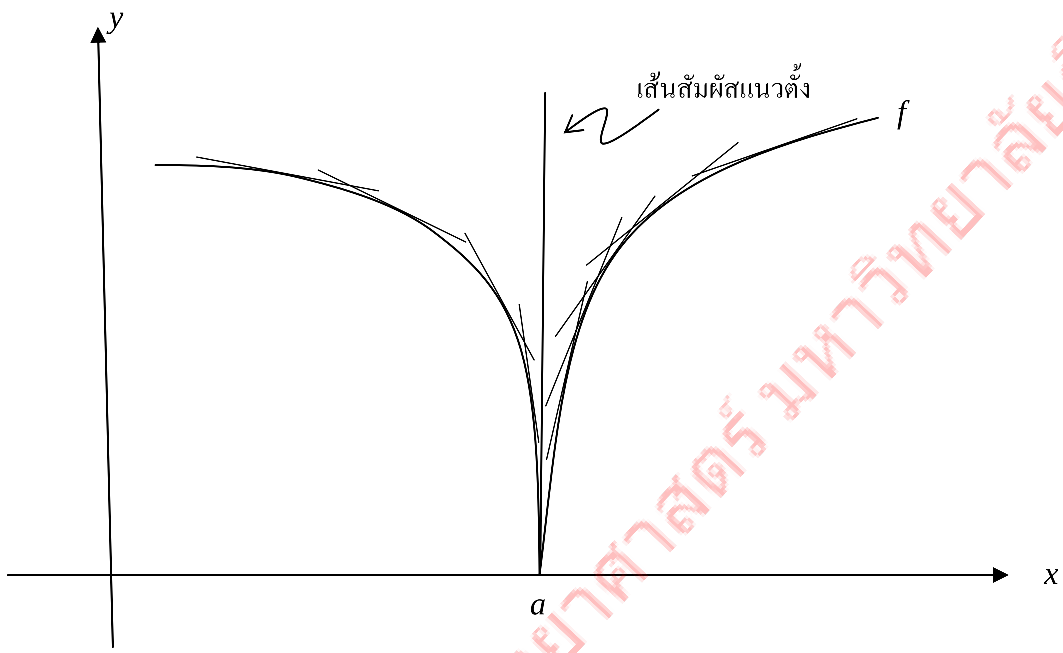
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x+h\right)-x}{h\left((x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^{\frac{2}{3}} + (x+h)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

ดังนั้น $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ ❍

ข้อสังเกต จะเห็นว่า $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ นิยามสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x แต่ $f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ นิยามเมื่อ $x \ne 0$ เท่านั้น และจาก $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(0+h)^{\frac{1}{3}} - 0^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$ เห็นได้ชัดว่าเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ $x = 0$ คือแกน y ซึ่งเป็นเส้นตรงในแนวตั้งที่หาความชันไม่ได้

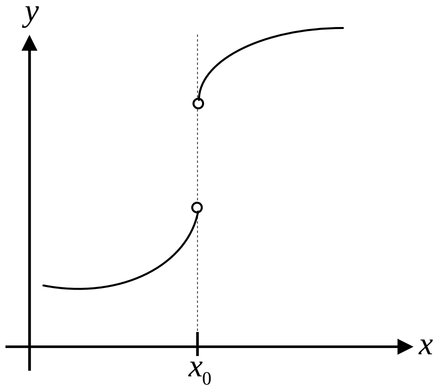
เราจะเรียกเส้นสัมผัสเส้นโค้ง f ที่ $x=a$ ซึ่งขนานกับแกน y ว่า **เส้นสัมผัสแนวตั้ง** (vertical tangent line) ที่ $x=a$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a และ $\lim_{x\to a}|f'(x)|=\infty$ รูป 2.2.2 แสดงให้เห็นตัวอย่างของเส้นโค้งที่มีเส้นสัมผัสแนวตั้ง



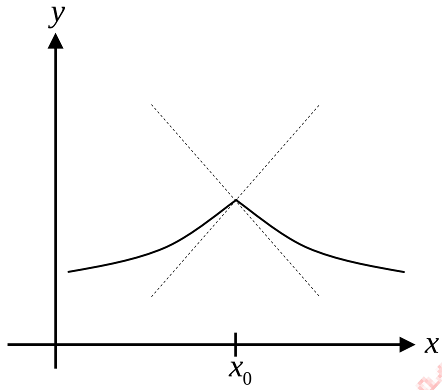
รูป 2.2.2

จากตัวอย่างที่ผ่านมาอาจสรุปลักษณะกราฟของฟังก์ชันที่หาค่าอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุดที่กำหนดให้ดังนี้

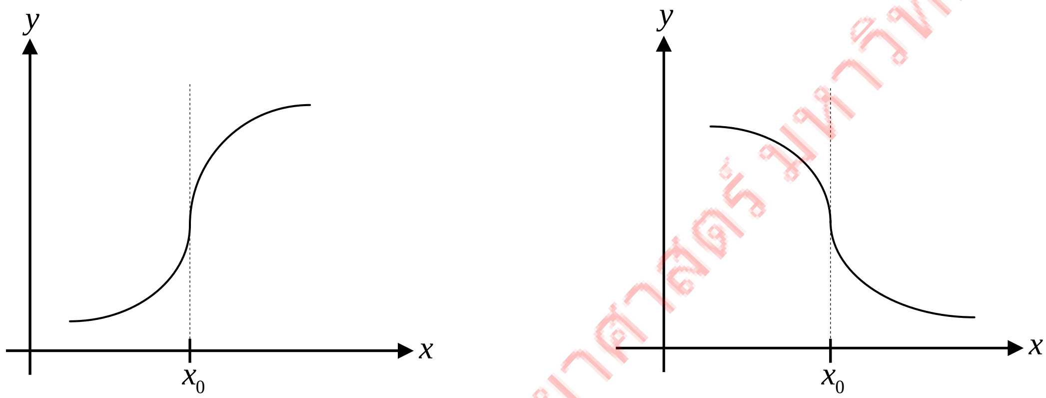
1. กราฟของฟังก์ชันขาดตอนที่จุดนั้น ดังรูป 2.2.3
2. กราฟของฟังก์ชันเป็นมุมที่จุดนั้น ดังรูป 2.2.4
3. กราฟของฟังก์ชันมีเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่เป็นเส้นสัมผัสแนวตั้งดังรูป 2.2.5



รูป 2.2.3



รูป 2.2.4



(ก) (ข)

รูป 2.2.5

จากรูป 2.2.3 จะเห็นว่ากราฟของฟังก์ชันนี้ไม่ต่อเนื่อง และหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ x_0 แต่รูป 2.2.4 และรูป 2.2.5 กราฟของฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x_0 แต่ก็ยังหาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ x_0

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะบอกเงื่อนไขจำเป็นของฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ ในแง่ของความต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 2.2.12 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x_0 แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x_0

บทพิสูจน์ จะต้องแสดงว่า $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ หาได้และมีค่าเท่ากับ $f(x_0)$

นั่นคือ จะแสดงว่า $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ เพราะว่า ถ้า $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ แล้วจะได้

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)+f(x_0)\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)+\lim_{x\to x_0} f(x_0)\\ &= 0+f(x_0)=f(x_0)\end{aligned}$$

และในการแสดงว่า $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$ เราพิจารณา $x\neq x_0$ แล้วจะได้

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)(0)=0\end{aligned}$$ $\square$

หมายเหตุ 1. บทกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่จริง ตัวอย่างเช่น $y=x^{\frac{1}{3}}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 0 แต่ไม่มีอนุพันธ์ที่ 0

2. จากทฤษฎีบท 2.2.12 เราได้ว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง I แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I ด้วย แต่อย่างไรก็ตาม f' อาจจะไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ซึ่งนิยาม โดย

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

เราจะเห็นว่า $f'(x)=x^2\sin\frac{1}{x}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ สำหรับทุก ๆ $x\in\mathbb{R}$ ซึ่ง $x\neq 0$ (โดยทฤษฎีบท 2.3.4 ทฤษฎีบท 2.4.1 และทฤษฎีบท 2.9.1 ซึ่งจะกล่าวถึงในภายหลัง) และจาก

$$\begin{aligned}0\le\left|\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right|&=\left|\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}\right|\\&=\left|\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}\right|\le\lim_{h\to 0}|h|=0\end{aligned}$$

เราจึงได้ว่า $f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=0$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $\mathbb{R}$ และเนื่องจาก $\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$ หาไม่ได้ เราจึงได้ว่า f' ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$

ก่อนจบหัวข้อนี้เราจะชี้ให้เห็นว่า หากฟังก์ชัน f ที่เรากล่าวถึงเป็นฟังก์ชันตำแหน่ง (position function) นั่นคือ $f(t)$ เป็นตำแหน่งของวัตถุ P ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อ P เคลื่อนที่ไปเป็นแนวเส้นตรง แล้ว $\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ จะเป็นความเร็วเฉลี่ยบนช่วงเวลา $[t_0,t_0+h]$ ดังนั้น $f'(t_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ จะเป็นความเร็วชั่วขณะของวัตถุ P ณ เวลา t_0 ใด ๆ ในทำนองเดียวกัน $f'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ จะเป็นฟังก์ชันที่แทนความเร็ว (ชั่วขณะ) ของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงตรวจสอบว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ x_0 ในแต่ละข้อต่อไปนี้หาค่าได้หรือไม่ ถ้าหาค่าได้แล้ว $f'(x_0)$ มีค่าเท่าใด

   1.1 $f(x) = 2x+3, \quad x_0 = 2$

   1.2 $f(x) = \frac{x+1}{2}, \quad x_0 = 5$

   1.3 $f(x) = 2x^2 - 3, \quad x_0 = 2$

   1.4 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad x_0 = 2$

   1.5 $f(x) = \frac{x+4}{x}, \quad x_0 = 3$

   1.6 $f(x) = |x+3|, \quad x_0 = 3$

   1.7 $f(x) = \begin{cases} x^2 & ,x < 2 \\ 4x-4 & ,x \geq 2 \end{cases}, x_0 = 2$

   1.8 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & ,x < 0 \\ x^2 & ,x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0$

   1.9 $f(x) = |x| - x, \quad x_0 = 0$

2. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(x_0, f(x_0))$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

   2.1 $f(x) = 2 - 3x^2, \quad x_0 = 1$

   2.2 $f(x) = \frac{x^2}{2}, \quad x_0 = 2$

   2.3 $f(x) = \frac{4}{2}, \quad x_0 = 2$

   2.4 $f(x) = 3 - \frac{x}{3}, \quad x_0 = -3$

   2.5 $f(x) = (x-2)^2, \quad x_0 = 3$

   2.6 $f(x) = \frac{1}{2}x(x-2), \quad x_0 = -1$

   2.7 $f(x) = 2x^2 + x, \quad x_0 = 1$

   2.8 $f(x) = -\frac{5}{3x}, \quad x_0 = -1$

   2.9 $f(x) = \frac{2}{x-1}, \quad x_0 = -1$

   2.10 $f(x) = \frac{5}{1-3x}, \quad x_0 = 2$

3. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & ,x < 2 \\ ax+b & ,x \geq 2 \end{cases}$ จงหาค่า a และ b ที่ทำให้ f มีอนุพันธ์ที่ 2

4. ถ้า $f(3) = -1$ และ $f'(3) = 5$ จงหาสมการเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x = 3$

5. ถ้า $f(-2) = 3$ และ $f'(-2) = -4$ จงหาสมการเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่ $x = -2$

6. เส้นโค้ง $y = x^2$ ตัดกับเส้นโค้ง $y = \frac{1}{x}$ จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งทั้งสองที่จุดตัด พร้อมทั้งตรวจสอบว่าเส้นสัมผัสเส้นโค้งทั้งสองนี้ตั้งฉากกันหรือไม่

7. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ a และ สอดคล้อง $f(x+y) = f(x) + f(y) + 5xy$ สำหรับทุก ๆ x และ y ถ้า $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 3$ แล้ว $f'(a)$ มีค่าเท่าใด

8. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ 0 ซึ่ง $f'(0) = f(0) = 1$ และ สอดคล้อง $f(x+y) = f(x)f(y)$ สำหรับทุก ๆ x และ y จงแสดงว่า $f'(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ x

2.3 สมบัติของอนุพันธ์

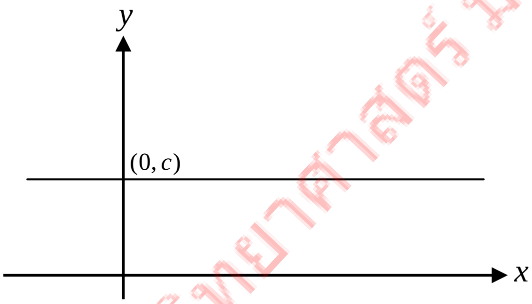
ในการหาอนุพันธ์นอกจากจะหาโดยใช้บทนิยามตามที่ได้กล่าวมาแล้ว ในหัวข้อนี้จะได้ศึกษาสูตรการหาอนุพันธ์เพื่อจะทำให้การหาอนุพันธ์ทำได้ง่ายและสะดวก

ทฤษฎีบท 2.3.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันคงตัว (constant function) เป็นศูนย์ นั่นคือ ถ้า c เป็นค่าคงตัว และ $f(x)=c$ สำหรับทุก ๆ $x\in D_f$ แล้ว $f'(x)=0$ สำหรับทุก ๆ $x\in D_f$

บทพิสูจน์ ให้ $x\in D_f$ จะได้

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0 \qquad \square$$

กราฟของฟังก์ชัน $y=c$ คือเส้นตรงในแนวนอนที่ขนานกับแกน x ดังรูป 2.3.1



รูป 2.3.1

ทฤษฎีบท 2.3.2 ถ้า c เป็นค่าคงตัว และ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว cf เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(cf)'(x)=c\,f'(x)$

บทพิสูจน์ ให้ c เป็นค่าคงตัว และ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(cf)'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{(cf)(x+h)-(cf)(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{c\,f(x+h)-c\,f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{c\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h}\\&=c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=cf'(x) \qquad \square\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2.3.3 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว $f+g$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

บทพิสูจน์ ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(f+g)'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\&=f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

□

ข้อสังเกต ผลของทฤษฎีบท 2.3.2 ทฤษฎีบท 2.3.3 และโดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ทำให้ได้ว่า สำหรับค่าคงตัว $c_1,c_2,\ldots,c_n$ และฟังก์ชัน $f_1,f_2,\ldots,f_n$ ที่มีอนุพันธ์ที่ x โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

$$\frac{d}{dx}(c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\ldots+c_nf_n(x))=c_1\frac{d}{dx}(f_1(x))+c_2\frac{d}{dx}(f_2(x))+\ldots+c_n\frac{d}{dx}(f_n(x))$$

ทฤษฎีบท 2.3.4 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว fg เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $(fg)'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$

บทพิสูจน์ ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x จะได้

$$\begin{aligned}(fg)'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)(g(x+h)-g(x))+(f(x+h)-f(x))g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\frac{(g(x+h)-g(x))}{h}+g(x)\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}\right)\end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} f(x+h)\right) g'(x) + g(x) f'(x)$$

$$= \left(\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}h + f(x)\right)\right) g'(x) + g(x) f'(x)$$

$$= \left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0} h + \lim_{h\to 0} f(x)\right) g'(x) + g(x) f'(x)$$

$$= \left(f'(x)\cdot 0 + f(x)\right) g'(x) + g(x) f'(x) = f(x)g'(x) + g(x) f'(x)$$ □

ทฤษฎีบท 2.3.5 ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x โดยที่ $g(x)\neq 0$ แล้ว $\frac{1}{g}$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$

บทพิสูจน์ ให้ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x โดยที่ $g(x)\neq 0$ จะได้

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{1}{g}\right)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+h)}$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+h)}$$

$$= -g'(x)\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+h)} = -\frac{g'(x)}{g(x)}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)}$$

$$= -\frac{g'(x)}{g(x)}\frac{1}{\lim_{h\to 0} g(x+h)} = -\frac{g'(x)}{g(x)}\frac{1}{\lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}h + g(x)\right)}$$

$$= -\frac{g'(x)}{g(x)}\frac{1}{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\lim_{h\to 0} h + \lim_{h\to 0} g(x)}$$

$$= -\frac{g'(x)}{g(x)}\frac{1}{g'(x)\cdot 0 + g(x)} = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$ □

ทฤษฎีบท 2.3.6 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x โดยที่ $g(x) \neq 0$ แล้ว $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

บทพิสูจน์ ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x โดยที่ $g(x) \neq 0$ จะได้

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(x) = f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) + \left(\frac{1}{g}\right)(x)f'(x) \qquad \text{โดยทฤษฎีบท 2.3.4}$$

$$= f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) + \frac{1}{g(x)}f'(x) \qquad \text{โดยทฤษฎีบท 2.3.5}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} \qquad \square$$

ทฤษฎีบท 2.3.7 ถ้า n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ และ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = x^n$ แล้ว $f'(x) = nx^{n-1}$

บทพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์

กรณี n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + h^n\right) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + h^{n-1}\right) = \binom{n}{1}x^{n-1} = nx^{n-1}$$

กรณี n เป็นจำนวนเต็มลบ เราให้ $m = -n$ จะได้ว่าสำหรับแต่ละจำนวนจริง $x \neq 0$ จะได้

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-m}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{x^m\frac{d}{dx}(1) - \frac{d}{dx}\left(x^m\right)}{\left(x^m\right)^2}$$

$$= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1} \qquad \square$$

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะสรุปสูตรการหาอนุพันธ์ได้ดังนี้

1. $\frac{d}{dx}(c)=0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์

3. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้ว

   3.1 $\frac{d}{dx}(cf(x))=c\frac{d}{dx}f(x)$

   3.2 $\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$

   3.3 $\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$

   3.4 $\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$

   3.5 $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$ เมื่อ $g(x)\neq 0$

ตัวอย่าง 2.3.8 ให้ $y=3x^2-4x+\frac{5}{x^3}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(3x^2-4x+5x^{-3}\right)=3\frac{d}{dx}\left(x^2\right)-4\frac{d}{dx}(x)+5\frac{d}{dx}\left(x^{-3}\right)$

$=3(2x)-4(1)+5\left(-3x^{-4}\right)=6x-4-\frac{15}{x^4}$ ❍

ตัวอย่าง 2.3.9 ให้ $y=\frac{2}{3x+4}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{2}{3x+4}=\frac{(3x+4)\frac{d}{dx}(2)-2\frac{d}{dx}(3x+4)}{(3x+4)^2}$

$=\frac{(3x+4)(0)-2(3)}{(3x+4)^2}=\frac{-6}{(3x+4)^2}$ ❍

ตัวอย่าง 2.3.10 ให้ $y=\left(x^3-2x+1\right)\left(x^4+2x+2\right)\left(x^5-3x^2-x+1\right)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\Big(\left(x^3-2x+1\right)\ \Big(\left(x^4+2x+2\right)\left(x^5-3x^2-x+1\right)\Big)\ \Big)$

$$=\left(x^3-2x+1\right)\frac{d}{dx}\Big(\left(x^4+2x+2\right)\left(x^5-3x^2-x+1\right)\Big)+$$

$$\left(x^4+2x+2\right)\left(x^5-3x^2-x+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^3-2x+1\right)$$

$$=\left(x^3-2x+1\right)\Big(\left(x^4+2x+2\right)\frac{d}{dx}\left(x^5-3x^2-x+1\right)+\left(x^5-3x^2-x+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^4+2x+2\right)\Big)+$$

$$\left(x^4+2x+2\right)\left(x^5-3x^2-x+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^3-2x+1\right)$$

$$=\left(x^3-2x+1\right)\Big(\left(x^4+2x+2\right)\left(5x^4-6x-1\right)+\left(x^5-3x^2-x+1\right)\left(4x^3+2\right)\Big)+$$

$$\left(x^4+2x+2\right)\left(x^5-3x^2-x+1\right)\left(3x^2-2\right)$$ ❍

ตัวอย่าง 2.3.11 ให้ $y=\dfrac{\left(x^3-2x+1\right)\left(x^4+2x+2\right)}{3x+4}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\dfrac{\left(x^3-2x+1\right)\left(x^4+2x+2\right)}{3x+4}=\dfrac{d}{dx}\left(\left(x^3-2x+1\right)\left(\dfrac{x^4+2x+2}{3x+4}\right)\right)$

$$=\left(x^3-2x+1\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4+2x+2}{3x+4}\right)+\left(\frac{x^4+2x+2}{3x+4}\right)\frac{d}{dx}\left(x^3-2x+1\right)$$

$$=\left(x^3-2x+1\right)\frac{(3x+4)\frac{d}{dx}\left(x^4+2x+2\right)-\left(x^4+2x+2\right)\frac{d}{dx}(3x+4)}{(3x+4)^2}$$

$$+\left(\frac{x^4+2x+2}{3x+4}\right)\frac{d}{dx}\left(x^3-2x+1\right)$$

$$=\left(x^3-2x+1\right)\frac{(3x+4)\left(4x^3+2\right)-3\left(x^4+2x+2\right)}{(3x+4)^2}+\left(\frac{x^4+2x+2}{3x+4}\right)\left(3x^2-2\right)$$ ❍

ให้ $A\subset D_f$ โดยที่ฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่ทุก ๆ จุด $x\in A$ ซึ่งก่อให้เกิดฟังก์ชัน f' ที่เรียกว่าอนุพันธ์ของ f ในทำนองเดียวกันเมื่อ f' เป็นฟังก์ชัน เราจึงสามารถตรวจสอบได้ว่า f' มีอนุพันธ์ที่แต่ละ $a\in A'\subset D_{f'}$ หรือไม่ และถ้า f' มีอนุพันธ์ที่ a จะเรียกอนุพันธ์ของ f' ที่ a ว่าอนุพันธ์อันดับ 2 ของ f ที่ a และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f''(a)$ ดังนั้นเราจะนิยามอนุพันธ์อันดับ 2 ของ f ที่ a ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.3.12 กำหนดให้ฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด I และ $a \in I$ ถ้า

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h} \qquad (2.3.1)$$

หาได้ จะเรียกลิมิตนี้ว่า**อนุพันธ์อันดับ 2 ของ f ที่ a** (second derivative of f at a) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $f''(a)$ หรือ $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=a}$ หรือ $\left.\left(\dfrac{d^2}{dx^2}(f(x))\right)\right|_{x=a}$

ค่าลิมิต (2.3.1) ก่อให้เกิดฟังก์ชัน f'' ที่นิยามโดย $f''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ สำหรับทุก ๆ $x \in D_{f'}$ ซึ่งลิมิตหาได้ เรียกฟังก์ชัน f'' ดังกล่าวว่า**อนุพันธ์อันดับ 2** ของ f และอาจเขียนแทน f'' ด้วยสัญลักษณ์ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ หรือ $D_x^2 y$ หรือ $D_x^2[f(x)]$

ในทำนองเดียวกันนี้สามารถนิยาม**อนุพันธ์อันดับ 3** (third derivative) **และอนุพันธ์อันดับ n** (**n^{th}** derivative) ของ f โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $n>3$ ด้วยวิธีอุปนัยและเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ f''' หรือ $D_x^3[f(x)]$ และ $f^{(n)}$ หรือ $D_x^n[f(x)]$ ตามลำดับ

เนื่องจากอนุพันธ์อันดับ n ของ f คืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f^{(n-1)}$ ดังนั้นสูตรต่าง ๆ ของการหาอนุพันธ์ที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้นจึงถูกนำมาใช้กับอนุพันธ์อันดับ n ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.3.13 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ จงหา $f'(2)$ และ $f''(2)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^2}{x^2+1}=\dfrac{(x^2+1)\frac{d}{dx}\left(x^2\right)-x^2\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)}{(x^2+1)^2}$

$$=\frac{(x^2+1)2x-x^2 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1-x^2)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

ดังนั้น $f'(2)=\dfrac{2\cdot 2}{(2^2+1)^2}=\dfrac{4}{25}$ และเนื่องจาก

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\big(f'(x)\big)=\frac{d}{dx}\frac{2x}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)^2\frac{d}{dx}(2x)-2x\frac{d}{dx}\big((x^2+1)^2\big)}{((x^2+1)^2)^2}$$

$$=\frac{(x^2+1)^2\frac{d}{dx}(2x)-2x\frac{d}{dx}\big(x^4+2x^2+1\big)}{((x^2+1)^2)^2}=\frac{(x^2+1)^2 2-2x\big(4x^3+4x\big)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2(x^2+1)\big(x^2+1-4x^2\big)}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)\big(1-3x^2\big)}{(x^2+1)^4}$$

ดังนั้น $f''(2)=\dfrac{2(2^2+1)\big(1-3\cdot 2^2\big)}{(2^2+1)^4}=-\dfrac{22}{125}$ ❍

ข้อสังเกต $f''(2)=\left(\dfrac{d}{dx}\big(f'(x)\big)\right)\Big|_{x=2}$ แต่ $\dfrac{d}{dx}\big(f'(2)\big)=0$

ตัวอย่าง 2.3.14 ให้ $y=3x^2-4x+\dfrac{5}{x^3}$ จงหา $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ และ $\dfrac{d^4y}{dx^4}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\dfrac{dy}{dx}=6x-4-\dfrac{15}{x^4}$ ดังนั้นอนุพันธ์อันดับสองของ y คือ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(6x-4-\frac{15}{x^4}\right)=6+\frac{60}{x^5}$$

และจะได้ว่าอนุพันธ์อันดับสามและอนุพันธ์อันดับสี่ของ y คือ

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(6+\frac{60}{x^5}\right)=-\frac{300}{x^6}$$

และ $$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{300}{x^6}\right)=\frac{1800}{x^7}$$ ❍

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาอนุพันธ์อันดับ 2 และ 3 ของฟังก์ชัน f ที่ a ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $f(x)=2x^2-3, \quad a=2$

1.2 $f(x)=2x^5-3x^2, \quad a=1$

1.3 $f(x)=\frac{x+1}{2}, \quad a=5$

1.4 $f(x)=\frac{x+4}{x}, \quad a=3$

1.5 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2}, \quad a=1$

1.6 $f(x)=1-\frac{1}{x}, \quad a=2$

2. กำหนดให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ a ซึ่งมีค่าดังตารางต่อไปนี้

$f(a)$	$f'(a)$	$f''(a)$	$g(a)$	$g'(a)$	$g''(a)$	$h(a)$	$h'(a)$	$h''(a)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9

จงหาค่าของ

2.1 $(f+2g+3h)'(a)$

2.2 $(3f-2g+h)'(a)$

2.3 $(fgh)'(a)$

2.4 $\left(\frac{fg}{h}\right)'(a)$

2.5 $(f^2)'(a)$ เมื่อ $f^2(x)=f(x)f(x)$

2.6 $(3f-2g^2+h^3)'(a)$

2.7 $(2f'+3g')'(a)$

2.8 $(f'g+g'h)'(a)$

3. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(2)=3$ และ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=7$ และกำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่งนิยามโดย $g(x)=(x^2-7)f(x)$ จงหาสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=g(x)$ ที่จุด $(2,-9)$

4. จงหาพหุนาม P ซึ่งมีดีกรี 2 และสอดคล้อง $P(2)=1$, $P'(0)=-3$, $P''(4)=6$

5. จงแสดงว่าถ้า f, g และ h เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x แล้ว

$$(fgh)'(x)=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

2.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันผลประกอบ

วิธีหนึ่งที่จะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y=(x^2+x+1)^{2551}$ นั้นอาจทำได้โดยกระจาย $(x^2+x+1)^{2551}$ ให้อยู่ในรูปพหุนามเสียก่อน แล้วจึงค่อยหาอนุพันธ์ของแต่ละพจน์ที่ได้โดยใช้ทฤษฎีบท 2.3.7 ซึ่งจะเห็นว่าการกระจาย $(x^2+x+1)^{2551}$ ยุ่งยากและซับซ้อน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y=(x^2+x+1)^{2551}$ สามารถทำได้โดยง่ายเมื่อใช้ทฤษฎีบท 2.4.1 ที่จะกล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4.1 กฎลูกโซ่ (Chain Rule) ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ถ้า g มีอนุพันธ์ที่ x และ f มีอนุพันธ์ที่ $g(x)$ แล้วฟังก์ชันผลประกอบ $f\circ g$ มีอนุพันธ์ที่ x และ

$$\left(f\circ g\right)'(x)=f'\left(g(x)\right)\,g'(x) \qquad (2.4.1)$$

บทพิสูจน์ ให้ $\Delta u=g(x+h)-g(x)$ จะเห็นว่า

$$\lim_{h\to 0}\Delta u=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}h=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}\lim_{h\to 0}h=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\lim_{h\to 0}h=g'(x)\cdot 0=0$$

และ

$$\begin{aligned}\left(f\circ g\right)'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\left(f\circ g\right)(x+h)-\left(f\circ g\right)(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(g(x+h)\right)-f\left(g(x)\right)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(g(x+h)\right)-f\left(g(x)\right)}{\Delta u}\frac{\Delta u}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(g(x+h)\right)-f\left(g(x)\right)}{\Delta u}\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(g(x)+\Delta u\right)-f\left(g(x)\right)}{\Delta u}\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\Delta u=g(x+h)-g(x)$ และ $\lim\limits_{h\to 0}\Delta u=0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left(f\circ g\right)'(x)&=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f\left(g(x)+\Delta u\right)-f\left(g(x)\right)}{\Delta u}\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}\\&=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f\left(g(x)+\Delta u\right)-f\left(g(x)\right)}{\Delta u}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\&=f'\left(g(x)\right)\,g'(x)\end{aligned}$$

□

ข้อสังเกต ถ้า $y=f(u)$ และ $u=g(x)$ จะสามารถเขียน (2.4.1) ได้ใหม่เป็น

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad (2.4.2)$$

บทแทรก 2.4.2 กำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ จะได้ว่า $y=(g(x))^n$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ x และ

$$\frac{d}{dx}\left((g(x))^n\right)=n(g(x))^{n-1}\frac{d}{dx}(g(x))$$

บทพิสูจน์ ให้ $f(x)=x^n$ จะได้ว่า $f'(x)=nx^{n-1}$ และ $y=(g(x))^n = f(g(x))=(f\circ g)(x)$ โดยใช้กฎลูกโซ่ จะได้

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n=\frac{d}{dx}((f\circ g)(x))=(f\circ g)'(x)$$
$$= f'(g(x))\,g'(x)=n(g(x))^{n-1}\,g'(x)$$

□

ตัวอย่าง 2.4.3 ให้ $y=(x^2+x+1)^{2551}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2+x+1)^{2551}=2551(x^2+x+1)^{2550}\frac{d}{dx}(x^2+x+1)$$
$$=2551(x^2+x+1)^{2550}(2x+1)$$

❍

ตัวอย่าง 2.4.4 ให้ $y=\left(\frac{2}{3x+4}\right)^5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3x+4}\right)^5=\frac{d}{dx}\left(2^5(3x+4)^{-5}\right)=2^5\frac{d}{dx}(3x+4)^{-5}$$
$$=2^5\left(-5(3x+4)^{-6}\right)\frac{d}{dx}(3x+4)=2^5\left(-5(3x+4)^{-6}\right)3=-\frac{15\cdot 2^5}{(3x+4)^6}$$

หรือ $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3x+4}\right)^5=5\left(\frac{2}{3x+4}\right)^4\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3x+4}\right)$$
$$=5\left(\frac{2}{3x+4}\right)^4\frac{(3x+4)\frac{d}{dx}(2)-2\frac{d}{dx}(3x+4)}{(3x+4)^2}=\frac{-15\cdot 2^5}{(3x+4)^6}$$

❍

ตัวอย่าง 2.4.5 ให้ $y=\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^5$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^5=5\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^4\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)$$
$$=5\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^4\frac{(3x+4)\frac{d}{dx}(2x+1)-(2x+1)\frac{d}{dx}(3x+4)}{(3x+4)^2}=\frac{25(2x+1)^4}{(3x+4)^6}$$

หรือ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x+1}{3x+4}\right)^5=\dfrac{d}{dx}\left((2x+1)^5(3x+4)^{-5}\right)$

$$=(2x+1)^5\frac{d}{dx}(3x+4)^{-5}+(3x+4)^{-5}\frac{d}{dx}\left((2x+1)^5\right)$$

$$=(2x+1)^5(-5)(3x+4)^{-6}\frac{d}{dx}(3x+4)+(3x+4)^{-5}5(2x+1)^4\frac{d}{dx}(2x+1)$$

$$=(2x+1)^5(-15)(3x+4)^{-6}+(3x+4)^{-5}10(2x+1)^4$$

$$=\frac{-15(2x+1)^5}{(3x+4)^6}+\frac{10(2x+1)^4}{(3x+4)^5}=\frac{-15(2x+1)^5+10(3x+4)(2x+1)^4}{(3x+4)^6}$$

$$=\frac{\left(-15(2x+1)+10(3x+4)\right)(2x+1)^4}{(3x+4)^6}=\frac{25(2x+1)^4}{(3x+4)^6}$$

ตัวอย่าง 2.4.6 ให้ $y=u^2-2u$ และ $u=x^2-x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{d}{du}\left(u^2-2u\right)\dfrac{du}{dx}=(2u-2)\dfrac{du}{dx}=\left(2\left(x^2-x\right)-2\right)\dfrac{d}{dx}\left(x^2-x\right)$

$$=\left(2x^2-2x-2\right)(2x-1)=4x^3-6x^2-2x+2$$

ตัวอย่าง 2.4.7 ให้ $y=u^2-u+9$ และ $u=2x^2-1$ จงหา $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{d}{du}\left(u^2-u+9\right)\dfrac{du}{dx}=(2u-1)\dfrac{du}{dx}$

$$=\left(2\left(2x^2-1\right)-1\right)\frac{d}{dx}\left(2x^2-1\right)=\left(4x^2-3\right)4x=16x^3-12x$$

ดังนั้น $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}=16(-1)^3-12(-1)=-4$

ตัวอย่าง 2.4.8 ให้ $y=u-\dfrac{1}{u}$ และ $u=\dfrac{2x}{x+1}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{d}{du}\left(u-\dfrac{1}{u}\right)\dfrac{du}{dx}=\left(1+\dfrac{1}{u^2}\right)\dfrac{du}{dx}$

$$=\left(1+\frac{1}{\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2}\right)\frac{d}{dx}\frac{2x}{x+1}=\left(1+\frac{1}{\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2}\right)\frac{(x+1)2-2x}{(x+1)^2}$$

$$=\left(1+\left(\frac{x+1}{2x}\right)^2\right)\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x^2}$$

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงใช้กฎลูกโซ่หา $\dfrac{dy}{dx}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

   1.1 $y = u^3 + 2u + 3$ และ $u = 5x^4$

   1.2 $y = u^2 + 2u - 5$ และ $u = \dfrac{x}{x+1}$

   1.3 $y = (u+2)(1-2u)$ และ $u = \dfrac{x}{2}$

   1.4 $y = \dfrac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$ และ $u = 3x - 2$

2. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

   2.1 $y = \left(x^2 - 16\right)^2 + 8x^3 - 1$

   2.2 $y = 2\left(\dfrac{x^3 - 2x + 4}{5x^2 + 1}\right)^5$

   2.3 $y = \left(8x^3 - 1\right)^3\left(2x^2 + 1\right)^2$

   2.4 $y = \dfrac{(8x-1)^5}{(3x-1)^3 + 1}$

   2.5 $y = 8x + \dfrac{x-1}{x+1} - \left(\dfrac{8x-7}{4}\right)^2$

   2.6 $y = \left(x + x^2\right)^{2^3}$

3. จงใช้กฎลูกโซ่หา $(f \circ g)'(x)$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

   3.1 $f(x) = x^2 + 2x - 5$ และ $g(x) = x^2 - 7$

   3.2 $f(m) = \dfrac{m^2 - 1}{m^2 + 1}$ และ $g(x) = 3x - 2$

   3.3 $f(z) = z^2 - 3z + 4$ และ $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$

   3.4 $f(y) = y^5 + 1$ และ $g(x) = x^2$

   3.5 $f(u) = u^2 - 16$ และ $g(x) = x^2 + 2x + 2$

4. กำหนดให้ $f(0) = 1,\ f'(0) = 2,\ g(0) = 0$ และ $g'(0) = 3$ จงหา $(f \circ g)'(0)$

5. กำหนดให้ $f(2) = 1,\ f(8) = 5,\ f'(2) = 7$ และ $f'(8) = -3$ จงหา $g'(2)$ และ $h'(2)$ เมื่อ $g(x) = f^3(x)$ และ $h(x) = f(x^3)$

6. กำหนดให้ $\dfrac{d}{dx}\left(f(x^2)\right) = x^2$ จงหา $f'(x^2)$

2.5 อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย

ในการศึกษาที่ผ่านมาฟังก์ชันที่พบส่วนมากจะอยู่ในรูป $y = f(x)$ ซึ่งบอกให้ทราบว่าแต่ละค่าของ x ในโดเมนของ f จะให้ค่า y ที่สมนัยกันได้ค่าหนึ่งเสมอ และจากสมการข้างต้นบอกได้ทันทีว่า x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรตาม ซึ่งจะเรียกฟังก์ชันชนิดนี้ว่า**ฟังก์ชันชัดแจ้ง** (explicit function) อย่างไรก็ดียังมีบางสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปร 2 ตัวแปร แต่ไม่ได้กำหนดให้ตัวแปรตัวใดเป็นตัวแปรอิสระ และตัวแปรใดเป็นตัวแปรตาม สมการเช่นนี้อาจกำหนดฟังก์ชันชัดแจ้งได้มากกว่าหนึ่งฟังก์ชัน เช่น $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ซึ่งเป็นสมการที่สามารถกำหนดฟังก์ชันชัดแจ้งได้สองรูปแบบ คือ

$$y = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{และ} \quad y = -\sqrt{4 - x^2}$$

หรืออาจจะถือว่า y เป็นตัวแปรอิสระ และ x เป็นตัวแปรตามก็จะได้

$$x = \sqrt{4 - y^2} \quad \text{และ} \quad x = -\sqrt{4 - y^2}$$

นอกจากนี้ยังมีบางสมการที่อาจจะไม่สามารถกำหนดรูปแบบฟังก์ชันชัดแจ้งได้ หรืออาจจะกำหนดรูปแบบของฟังก์ชันชัดแจ้งได้แต่เป็นรูปแบบที่ยุ่งยาก เช่น

$$x\sqrt{y} + 2x^3y^3 + 5y^2 = 0 \quad \text{และ} \quad 7y^4 + x^3y + x = 4$$

เป็นต้น เราเรียกสมการที่ไม่ใช่ฟังก์ชันชัดแจ้งเหล่านี้ว่า**ฟังก์ชันโดยปริยาย** (implicit function)

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายสามารถทำได้โดยให้ถือว่าตัวแปรทุกตัวเป็นฟังก์ชันของตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งตามที่ต้องการหา เช่นจะหา $\dfrac{dy}{dx}$ ก็จะถือว่าตัวแปรทุกตัวเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x แล้วหาอนุพันธ์ของทุกพจน์ในสมการเทียบกับ x โดยใช้กฎลูกโซ่ และกฎอื่น ๆ ตามความจำเป็นแล้วจึงจัดพจน์เพื่อหาอนุพันธ์ตามที่โจทย์ต้องการ

ตัวอย่าง 2.5.1 ให้ $y^3-2y^2+5y=x^2+3x-7$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก $y^3-2y^2+5y=x^2+3x-7$ โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x จะได้

$$\frac{d}{dx}\left(y^3-2y^2+5y\right)=\frac{d}{dx}\left(x^2+3x-7\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(y^3\right)-\frac{d}{dx}\left(2y^2\right)+\frac{d}{dx}(5y)=\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}(3x)-\frac{d}{dx}(7)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}-4y\frac{dy}{dx}+5\frac{dy}{dx}=2x+3-0$$

$$\left(3y^2-4y+5\right)\frac{dy}{dx}=2x+3$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+3}{3y^2-4y+5}$ ❍

ตัวอย่าง 2.5.2 ให้ $3x^2-2y^3=9y-2x^2y$ จงหา $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(3,3)}$

วิธีทำ จาก $3x^2-2y^3=9y-2x^2y$ โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x จะได้

$$\frac{d}{dx}\left(3x^2-2y^3\right)=\frac{d}{dx}\left(9y-2x^2y\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(3x^2\right)-\frac{d}{dx}\left(2y^3\right)=\frac{d}{dx}(9y)-\frac{d}{dx}\left(2x^2y\right)$$

$$6x-6y^2\frac{dy}{dx}=9\frac{dy}{dx}-2\frac{d}{dx}\left(x^2y\right)$$

$$6x-6y^2\frac{dy}{dx}=9\frac{dy}{dx}-2\left(x^2\frac{dy}{dx}+y\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right)$$

$$6x-6y^2\frac{dy}{dx}=9\frac{dy}{dx}-2x^2\frac{dy}{dx}-4xy$$

$$\left(6y^2+9-2x^2\right)\frac{dy}{dx}=6x+4xy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x+4xy}{6y^2+9-2x^2}$$

ดังนั้น $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(3,3)}=\dfrac{6(3)+4(3)(3)}{6(3)^2+9-2(3)^2}=\dfrac{6}{5}$ ❍

ตัวอย่าง 2.5.3 ให้ $3xy-2y=4-2x^2$ จงหา $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(1,2)}$

วิธีทำ จาก $3xy-2y=4-2x^2$ โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x เราจะได้

$$\frac{d}{dx}(3xy-2y)=\frac{d}{dx}\left(4-2x^2\right)$$

$$\frac{d}{dx}(3xy)-\frac{d}{dx}(2y)=\frac{d}{dx}(4)-\frac{d}{dx}\left(2x^2\right)$$

$$3\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)-2\frac{dy}{dx}=0-4x$$

$$(2-3x)\frac{dy}{dx}=3y+4x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y+4x}{2-3x}$$

ดังนั้น $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)}=\frac{3(2)+4(1)}{2-3(1)}=-10$$

หรือ เราจัดรูปของสมการใหม่ จะได้ $y=\dfrac{4-2x^2}{3x-2}$ จากนั้นจึงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{4-2x^2}{3x-2}\right)=\frac{(3x-2)\frac{d}{dx}\left(4-2x^2\right)-\left(4-2x^2\right)\frac{d}{dx}(3x-2)}{(3x-2)^2}$$

$$=\frac{-4x(3x-2)-3\left(4-2x^2\right)}{(3x-2)^2}=\frac{-6x^2+8x-12}{(3x-2)^2}$$

จะได้ $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)}=\frac{-6(1)^2+8(1)-12}{(3(1)-2)^2}=-10$$ ❍

โดยใช้ความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายจะทำให้เราสามารถขยายกฎการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงกำลัง $y=x^n$ โดยที่ n เป็นจำนวนตรรกยะใด ๆ ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.5.4 ถ้า n เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่ศูนย์ แล้ว $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$

บทพิสูจน์ ให้ n เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่ศูนย์

จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม r และ s ซึ่ง $r,s\neq 0$ และ $n=\frac{r}{s}$

ให้ $y=x^n=x^{\frac{r}{s}}$ จะได้ว่า $y^s=x^r$ เป็นสมการของฟังก์ชันโดยปริยาย

ซึ่งทำให้ได้ว่า $\frac{d}{dx}\left(y^s\right)=\frac{d}{dx}\left(x^r\right)$ นั่นคือ $sy^{s-1}\frac{dy}{dx}=rx^{r-1}$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx}=\frac{rx^{r-1}}{sy^{s-1}}=\frac{r}{s}x^{r-1}y^{1-s}=\frac{r}{s}x^{r-1}\left(x^{\frac{r}{s}}\right)^{1-s}=\frac{r}{s}x^{r-1}x^{\frac{r}{s}(1-s)}=\frac{r}{s}x^{\frac{r}{s}-1}=nx^{n-1}$$ $\square$

ตัวอย่าง 2.5.5 ให้ $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x^2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ $$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+\sqrt{4-x^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)+\frac{d}{dx}\left(\sqrt{4-x^2}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{d}{dx}\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad =\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+\frac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\left(4-x^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) \quad =\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$ ❍

ตัวอย่าง 2.5.6 ให้ $y=\left(\sqrt{2-x}\right)^2$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ เนื่องจาก $y=\left(\sqrt{2-x}\right)^2=2-x$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=-1$ สำหรับทุก ๆ $x\leq 2$ ❍

ตัวอย่าง 2.5.7 ให้ $y=\sqrt{(2-x)^2}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ เนื่องจาก $y=\sqrt{(2-x)^2}=|2-x|=\begin{cases}2-x & ,2-x\geq 0\\ -(2-x) & ,2-x<0\end{cases}=\begin{cases}2-x & ,x\leq 2\\ x-2 & ,x>2\end{cases}$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=\begin{cases}-1 & ,x<2\\ 1 & ,x>2\end{cases}$ ❍

ตัวอย่าง 2.5.8 ให้ $y^4-2\sqrt{y}+7y=5x^2+4x\sqrt{y}-3$ จงหา $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}$

วิธีทำ จาก $y^4-2\sqrt{y}+7y=5x^2+4x\sqrt{y}-3$ โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x เราจะได้

$$\frac{d}{dx}\left(y^4-2\sqrt{y}+7y\right)=\frac{d}{dx}\left(5x^2+4x\sqrt{y}-3\right)$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}\left(y^4\right)-\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{y}\right)+\frac{d}{dx}(7y)=\frac{d}{dx}\left(5x^2\right)+\frac{d}{dx}\left(4x\sqrt{y}\right)-\frac{d}{dx}(3)$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$4y^3\frac{dy}{dx}-\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}+7\frac{dy}{dx}=10x+\frac{2x}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}+4\sqrt{y}-0$$

จากนั้นจัดรูปใหม่โดยรวมเอาพจน์ที่มี $\frac{dy}{dx}$ ไว้ด้านซ้ายของสมการ จะได้

$$\left(4y^3-\frac{1}{\sqrt{y}}+7-\frac{2x}{\sqrt{y}}\right)\frac{dy}{dx}=10x+4\sqrt{y}$$

จะได้ $\frac{dy}{dx}=\frac{10x+4\sqrt{y}}{4y^3-\frac{1}{\sqrt{y}}+7-\frac{2x}{\sqrt{y}}}$ ดังนั้น $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=\frac{10+4}{4-1+7-2}=\frac{7}{4}$ ❍

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $y = x^{-\frac{2}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$

1.2 $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+3^2}}$

1.3 $y = \sqrt{\frac{4x^3+1}{2-3x}}$

1.4 $y = \sqrt[3]{2-x}$

1.5 $y = \sqrt[3]{(2-x)^5}$

1.6 $y = \left(\sqrt{2-x^2}\right)^7$

2. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

2.1 $x^3 + 2x - y = 3y^2$

2.2 $4x^3 + 2x^3y^3 - xy = 3y^2 + 2x^2y^3 - 8$

2.3 $x^3 + 2\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3y^2$

2.4 $x^3 - 2\sqrt{xy} = \sqrt[3]{y}$

2.5 $x^3 = 3\left(y - x^2\right)^2$

2.6 $x^3 + \sqrt{2x^2 + y^2} = 3y^2$

3. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ที่จุดที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้

3.1 $x^2 - xy + y^2 = 1$ ที่จุด $(-1,-1)$

3.2 $y^3 + y - x = 1$ ที่จุด $(1,1)$

4. จงหาความชันของเส้นโค้ง $4x^2 + 9y^2 = 1$ ที่จุด $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

5. จงหาความชันของเส้นโค้ง $y^2 + xy - x^2 = 5$ ที่จุด $(4,3)$

6. จงหาความชันของเส้นโค้ง $7y^4 + x^3y + x = 4$ ที่จุด $(4,0)$

7. จงหาความชันของเส้นโค้ง $(x+y)^3 - 5x + y = 1$ ที่จุดซึ่งเส้นโค้งตัดกับเส้นตรง $x + y = 1$

8. จงหาจุดทั้งหมดบนเส้นโค้ง $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ ซึ่งมีเส้นสัมผัสกราฟขนานกับแกน x

9. จงหาจุดทั้งหมดในจตุภาคที่ 1 ที่อยู่บนเส้นโค้ง $x^3 - xy + y^3 = 0$ และเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้นขนานกับแกน x

10. จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y^2 = 2x^3$ ทั้งหมดซึ่งเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้นตั้งฉากกับเส้นตรง $4x - 3y + 1 = 0$

11. จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสกราฟของ $3x^2 - 4xy + 2y^2 = 9$ ที่จุด $(1,-1)$

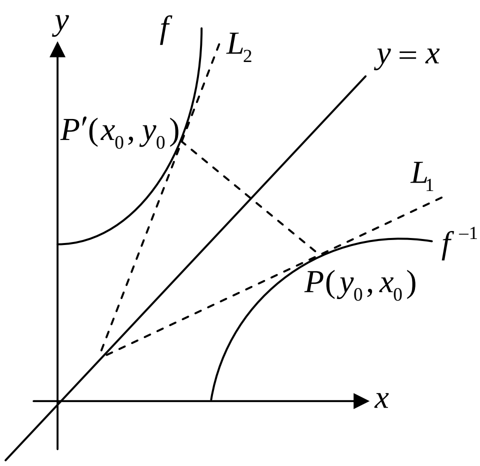
12. จงหาจุดตัดของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $2xy + y = x + 5$ ที่จุด $(1,2)$ กับเส้นตรง $y = 2x + 1$

13. จงหาสมการเส้นตรง L_1 และ L_2 ซึ่งผ่านจุดกำเนิด และ สัมผัสเส้นโค้ง $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

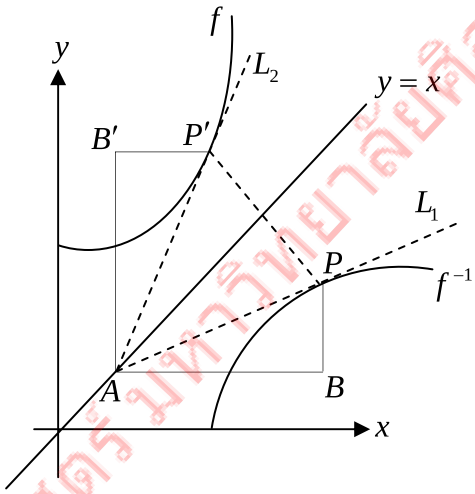
2.6 อนุพันธ์ของฟังก์ชันผกผัน

ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากเซต A ไปทั่วถึงเซต B แล้ว ฟังก์ชันผกผันของ f เขียนแทนด้วย f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไปทั่วถึง A ที่นิยามโดย

$$f^{-1}(y)=x \text{ ก็ต่อเมื่อ } y=f(x) \text{ สำหรับทุก ๆ } x\in A \text{ และ } y\in B$$



รูป 2.6.1(ก)



รูป 2.6.1 (ข)

พิจารณากราฟ $y=f^{-1}(x)$ และ $y=f(x)$ ในรูป 2.6.1(ก) และรูป 2.6.1(ข) ซึ่งมี L_1 และ L_2 เป็นเส้นสัมผัสกราฟทั้งสองที่จุด (y_0,x_0) และ (x_0,y_0) ตามลำดับ โดยมี m_1 และ m_2 เป็นความชันของ L_1 และ L_2 ตามลำดับ และจากรูป 2.6.1(ข) จะได้ว่า

$$m_1=\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \text{ และ } m_2=\frac{\overline{AB'}}{\overline{B'P'}} \tag{2.6.1}$$

เนื่องจาก ΔABP และ $\Delta AB'P'$ เป็นสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการจึงได้

$$\overline{BP}=\overline{B'P'} \text{ และ } \overline{AB}=\overline{AB'} \tag{2.6.2}$$

จาก (2.6.1) และ (2.6.2) จะได้ว่า $m_1=\dfrac{1}{m_2}$ จากบทนิยามของอนุพันธ์จะได้ $m_1=\left(f^{-1}\right)'(y_0)$ และ $m_2=f'(x_0)$ ดังนั้น

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)} \tag{2.6.3}$$

แต่จุด (y_0,x_0) อยู่บนกราฟของ $y=f^{-1}(x)$ ซึ่งทำให้ได้ $x_0=f^{-1}(y_0)$ เมื่อนำไปแทนค่าใน (2.6.3) จะได้

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} \tag{2.6.4}$$

ซึ่ง (2.6.4) จะมีความหมายเมื่อ $f'(x_0)=f'\left(f^{-1}(y_0)\right)\neq 0$

ทฤษฎีบท 2.6.1 ให้ $y=f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีฟังก์ชันผกผันคือ $x=f^{-1}(y)$ และมีอนุพันธ์บนช่วงเปิด I ถ้า $a=f^{-1}(b)\in I$ ซึ่ง $f'(a)\neq 0$ แล้ว f^{-1} มีอนุพันธ์ที่ b และ

$$\left(f^{-1}\right)'(b)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$ สำหรับทุก ๆ x จะได้ว่า

$$\left(f^{-1}\circ f\right)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(f^{-1}\circ f\right)(a+h)-\left(f^{-1}\circ f\right)(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)-a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า $\left(f^{-1}\circ f\right)'(a)=\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right)\ f'(a)$ ดังนั้น

$$\left(f^{-1}\right)'(b)=\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right)=\frac{\left(f^{-1}\circ f\right)'(a)}{f'(a)}=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$ □

ตัวอย่าง 2.6.2 จงหา $\left(f^{-1}\right)'(2)$ เมื่อ $f(x)=8x^3+1$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 2.6.1 ได้ว่า $\left(f^{-1}\right)'(2)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}$

ให้ $f^{-1}(2)=x_0$ จะได้ $2=f(x_0)=8x_0^{\,3}+1$ แสดงว่า $x_0=\frac{1}{2}$ ดังนั้น

$$\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}=\frac{1}{f'\left(x_0\right)}=\frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}$$

เนื่องจาก $f'(x)=24x^2$ จะได้ $f'\left(\frac{1}{2}\right)=24\left(\frac{1}{2}\right)^2=6$ ดังนั้น $\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{6}$ ❍

หมายเหตุ ผลของทฤษฎีบท 2.6.1 ทำให้เราสามารถหา $\left(f^{-1}\right)'(b)$ ได้จากอนุพันธ์ของ f ดังที่เห็นจากตัวอย่าง 2.6.2 ในการหา $\left(f^{-1}\right)'(2)$ แต่ในขณะเดียวกันเราอาจหา $\left(f^{-1}\right)'(2)$ ได้อีกวิธีหนึ่งโดยเริ่มต้นจากการหา f^{-1} ก่อน จากนั้นค่อยดำเนินการในการหาอนุพันธ์ของ f^{-1} ดังนี้

จาก $f(x)=8x^3+1$ จะได้ว่า $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x-1)^{1/3}$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{6(x-1)^{2/3}}$ และ $(f^{-1})'(2)=\dfrac{1}{6(2-1)^{2/3}}=\dfrac{1}{6}$ เช่นกัน อย่างไรก็ตามการหา f^{-1} สำหรับบางฟังก์ชัน f อาจยุ่งยากและซับซ้อน ดังเช่นฟังก์ชันที่นิยามในตัวอย่าง 2.6.3 เราจึงนิยมใช้ผลของทฤษฎีบท 2.6.1 ในการหา $\left(f^{-1}\right)'(b)$ มากกว่า

ตัวอย่าง 2.6.3 จงหา $\left(f^{-1}\right)'(1)$ เมื่อ $f(x)=x^5+7x^3+4x+1$

วิธีทำ ให้ $f^{-1}(1)=x_0$ จะได้ $1=f(x_0)=x_0^{\ 5}+7x_0^{\ 3}+4x_0+1$ แสดงว่า $x_0=0$ ดังนั้น

$$\left(f^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)}=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(0)}$$

เนื่องจาก $f'(x)=5x^4+21x^2+4$ จะได้ $f'(0)=4$ ดังนั้น $\left(f^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{4}$ ❍

ตัวอย่าง 2.6.4 ให้ $f(x)=x^3-\dfrac{2}{x}$ จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f^{-1}(x)$ ที่จุด $(-1,1)$

วิธีทำ ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f^{-1}(x)$ ที่จุด $(-1,1)$ เท่ากับ

$$\left(f^{-1}\right)'(-1)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(-1)\right)}=\frac{1}{f'(1)}$$

เนื่องจาก $f'(x)=3x^2+\dfrac{2}{x^2}$ จะได้ $f'(1)=5$ ดังนั้น $\left(f^{-1}\right)'(-1)=\frac{1}{5}$

ให้ (x,y) เป็นจุดใด ๆ บนเส้นสัมผัส จะได้ว่า $\dfrac{1}{5}=\dfrac{y-1}{x+1}$ ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f^{-1}(x)$ ที่จุด $(-1,1)$ คือ $x+1=5y-5$ หรืออาจเขียนได้ว่า $y=\frac{1}{5}x+\frac{6}{5}$ ❍

แบบฝึกหัด 2.6

1. จงหา $\left(f^{-1}\right)'(a)$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

   1.1 $f(x)=x-3$, $a=2$ 1.2 $f(x)=x^3+2$, $a=3$

   1.3 $f(x)=x^3+x$, $a=10$ 1.4 $f(x)=x^5+2x^3+x+4$, $a=0$

   1.5 $f(x)=x^2-\dfrac{2}{x}$, $a=-1$ 1.6 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$, $a=\dfrac{1}{2}$

2. ให้ $f(x)=x^3+x$ จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f^{-1}(x)$ ที่จุด $(10,2)$

3. ให้ $f(x)=x^5+2x^3+x+4$ จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f^{-1}(x)$ ที่จุด $(0,-1)$

2.7 อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมจะเริ่มโดยการพิจารณาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมธรรมชาติ $y=\ln x$ โดยใช้ความรู้ที่ว่า $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ จากนั้นจะนำผลที่ได้ไปใช้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม $y=\log_a x$ โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับการเปลี่ยนฐานที่ว่า $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$

จากบทนิยาม 2.2.1 จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} \quad \text{เมื่อ } t=\frac{h}{x}$$

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}$$

ในกรณีที่ $y=\log_a x$ จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)=\frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}$$

ถ้า $u=g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln u)&=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\\ \frac{d}{dx}(\log_a u)&=\frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}\end{aligned}}$$

ตัวอย่าง 2.7.1 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\ln\left(2x^3+1\right)$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\ln\left(2x^3+1\right)\right)=\frac{1}{2x^3+1}\frac{d}{dx}\left(2x^3+1\right)=\frac{6x^2}{2x^3+1}$ ❍

ตัวอย่าง 2.7.2 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\ln\left(2x^3+1\right)^3$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\ln\left(2x^3+1\right)^3\right)=\frac{d}{dx}\left(3\ln\left(2x^3+1\right)\right)=3\frac{d}{dx}\left(\ln\left(2x^3+1\right)\right)$

$$=3\frac{1}{2x^3+1}\frac{d}{dx}\left(2x^3+1\right)=\frac{18x^2}{2x^3+1}$$ ❍

ตัวอย่าง 2.7.3 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\ln^3\left(2x^3+1\right)$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\ln^3\left(2x^3+1\right)\right)=3\ln^2\left(2x^3+1\right)\frac{d}{dx}\left(\ln\left(2x^3+1\right)\right)$

$$=3\ln^2\left(2x^3+1\right)\ \frac{6x^2}{2x^3+1}=\frac{18x^2\ln^2\left(2x^3+1\right)}{2x^3+1}$$

ตัวอย่าง 2.7.4 จงหาอนุพันธ์ของ $y=x\ln\left(2x^3+1\right)$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x\ln\left(2x^3+1\right)\right)=x\frac{d}{dx}\left(\ln\left(2x^3+1\right)\right)+\ln\left(2x^3+1\right)\frac{d}{dx}(x)$

$$=\frac{6x^3}{2x^3+1}+\ln\left(2x^3+1\right)$$

ตัวอย่าง 2.7.5 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\ln\left(2x^3+1\right)^x$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\ln\left(2x^3+1\right)^x\right)=\frac{d}{dx}\left(x\ln\left(2x^3+1\right)\right)=\frac{6x^3}{2x^3+1}+\ln\left(2x^3+1\right)$

ตัวอย่าง 2.7.6 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\log_7\left(2x^3+1\right)$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\log_7\left(2x^3+1\right)\right)=\frac{1}{\left(2x^3+1\right)\ln 7}\frac{d}{dx}\left(2x^3+1\right)=\frac{6x^2}{\left(2x^3+1\right)\ln 7}$

ตัวอย่าง 2.7.7 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\log_7\left(x(2x^3+1)\right)$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\log_7\left(x(2x^3+1)\right)\right)=\frac{1}{x(2x^3+1)\ln 7}\frac{d}{dx}\left(x(2x^3+1)\right)$

$$=\frac{1}{x(2x^3+1)\ln 7}\left(x\frac{d}{dx}(2x^3+1)+(2x^3+1)\frac{d}{dx}(x)\right)$$

$$=\frac{1}{x(2x^3+1)\ln 7}\left(x(6x^2)+(2x^3+1)\right)=\frac{8x^3+1}{x(2x^3+1)\ln 7}$$

หรือ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\log_7\left(x(2x^3+1)\right)=\frac{d}{dx}\left(\log_7 x\ +\ \log_7(2x^3+1)\right)$

$$=\frac{d}{dx}\log_7 x+\frac{d}{dx}\log_7(2x^3+1)=\frac{1}{x\ln 7}+\frac{6x^2}{(2x^3+1)\ln 7}$$

$$=\frac{(2x^3+1)+x(6x^2)}{x(2x^3+1)\ln 7}=\frac{8x^3+1}{x(2x^3+1)\ln 7}$$

ตัวอย่าง 2.7.8 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\ln\frac{2x^3+1}{x+3}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\ln\frac{2x^3+1}{x+3}=\frac{1}{\frac{2x^3+1}{x+3}}\frac{d}{dx}\frac{2x^3+1}{x+3}$

$$=\frac{x+3}{2x^3+1}\frac{(x+3)\frac{d}{dx}(2x^3+1)-(2x^3+1)\frac{d}{dx}(x+3)}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{x+3}{2x^3+1}\frac{(x+3)(6x^2)-(2x^3+1)}{(x+3)^2}$$

$$=\frac{x+3}{2x^3+1}\frac{4x^3+18x^2-1}{(x+3)^2}=\frac{4x^3+18x^2-1}{(2x^3+1)(x+3)}$$

หรือ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\ln\frac{2x^3+1}{x+3}=\frac{d}{dx}\left(\ln(2x^3+1)-\ln(x+3)\right)$

$$=\frac{d}{dx}\ln(2x^3+1)-\frac{d}{dx}\ln(x+3)=\frac{1}{2x^3+1}\frac{d}{dx}(2x^3+1)-\frac{1}{x+3}\frac{d}{dx}(x+3)$$

$$=\frac{6x^2}{2x^3+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{4x^3+18x^2-1}{(2x^3+1)(x+3)}$$ ❍

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันบางฟังก์ชันที่อยู่ในรูปผลคูณ ผลหาร หรือ รูปยกกำลัง โดยวิธีปกตินั้นอาจยุ่งยากมากหรืออาจทำไม่ได้ การใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันลอการิทึมและอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมอาจช่วยให้การหาอนุพันธ์ทำได้ง่ายขึ้นดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.7.9 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\frac{3(2x^3+1)\sqrt{4-3x}}{(x+3)^3}$

วิธีทำ จาก $y=\frac{3(2x^3+1)\sqrt{4-3x}}{(x+3)^3}$ จะได้

$$\ln y = \ln \frac{3(2x^3+1)\sqrt{4-3x}}{(x+3)^3}$$

$$= \ln\left(3(2x^3+1)\sqrt{4-3x}\right) - \ln(x+3)^3$$

$$= \ln 3 + \ln(2x^3+1) + \ln\sqrt{4-3x} - \ln(x+3)^3$$

$$= \ln 3 + \ln(2x^3+1) + \tfrac{1}{2}\ln(4-3x) - 3\ln(x+3)$$

โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x เราจะได้

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\ln 3 + \ln(2x^3+1) + \tfrac{1}{2}\ln(4-3x) - 3\ln(x+3)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(\ln 3) + \frac{d}{dx}\ln(2x^3+1) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(4-3x) - 3\frac{d}{dx}(\ln(x+3))$$

$$= \frac{6x^2}{2x^3+1} - \frac{3}{2(4-3x)} - \frac{3}{x+3}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{6x^2}{2x^3+1} - \frac{3}{2(4-3x)} - \frac{3}{x+3}\right)$$

$$= \frac{3(2x^3+1)\sqrt{4-3x}}{(x+3)^3}\left(\frac{6x^2}{2x^3+1} - \frac{3}{2(4-3x)} - \frac{3}{x+3}\right)$$

❍

ตัวอย่าง 2.7.10 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \dfrac{(4x^2+1)\sqrt{5-2x}}{(3x^2-4)\sqrt{2-3x}}$

วิธีทำ จาก $y = \dfrac{(4x^2+1)\sqrt{5-2x}}{(3x^2-4)\sqrt{2-3x}}$ จะได้

$$\ln y = \ln \frac{(4x^2+1)\sqrt{5-2x}}{(3x^2-4)\sqrt{2-3x}}$$

$$= \ln\left((4x^2+1)\sqrt{5-2x}\right) - \ln\left((3x^2-4)\sqrt{2-3x}\right)$$

$$=\left(\ln\left(4x^2+1\right)+\ln\sqrt{5-2x}\right)-\left(\ln\left(3x^2-4\right)+\ln\sqrt{2-3x}\right)$$

$$=\ln\left(4x^2+1\right)+\ln\sqrt{5-2x}-\ln\left(3x^2-4\right)-\ln\sqrt{2-3x}$$

$$=\ln\left(4x^2+1\right)+\tfrac{1}{2}\ln(5-2x)-\ln\left(3x^2-4\right)-\tfrac{1}{2}\ln(2-3x)$$

โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x เราจะได้

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\ln\left(4x^2+1\right)+\tfrac{1}{2}\ln(5-2x)-\ln\left(3x^2-4\right)-\tfrac{1}{2}\ln(2-3x)\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\ln\left(4x^2+1\right)\right)+\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\ln(5-2x)\right)-\frac{d}{dx}\left(\ln\left(3x^2-4\right)\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\ln(2-3x)\right)$$

$$=\frac{8x}{4x^2+1}-\frac{1}{5-2x}-\frac{6x}{3x^2-4}+\frac{3}{2(2-3x)}$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{8x}{4x^2+1}-\frac{1}{5-2x}-\frac{6x}{3x^2-4}+\frac{3}{2(2-3x)}\right)$$

$$=\frac{\left(4x^2+1\right)\sqrt{5-2x}}{\left(3x^2-4\right)\sqrt{2-3x}}\left(\frac{8x}{4x^2+1}-\frac{1}{5-2x}-\frac{6x}{3x^2-4}+\frac{3}{2(2-3x)}\right)$$ ❍

ตัวอย่าง 2.7.11 จงหาอนุพันธ์ของ $y=(2x+1)^x$

วิธีทำ จาก $y=(2x+1)^x$ จะได้ $\ln y=\ln(2x+1)^x=x\ln(2x+1)$ โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x เราจะได้

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=x\frac{d}{dx}\left(\ln(2x+1)\right)+\ln(2x+1)\frac{d}{dx}(x)=\frac{2x}{2x+1}+\ln(2x+1)$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{2x}{2x+1}+\ln(2x+1)\right)=(2x+1)^x\left(\frac{2x}{2x+1}+\ln(2x+1)\right)$$ ❍

แบบฝึกหัด 2.7

1. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $y=\ln\left(x^6+3x^2+1\right)$

1.2 $y=\ln\left(3x^2+4\right)^3$

1.3 $y=\ln^3\left(\frac{x^2-1}{2x+1}\right)$

1.4 $y=\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x+3}}$

1.5 $y=x^2\ln x^3$

1.6 $y=x^2\log_2 x$

1.7 $y=x\log\left(16-x^2\right)$

1.8 $y=(\ln x)(\ln(1-x))$

2. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งในข้อต่อไปนี้ ที่จุดที่กำหนดให้

2.1 $y=\ln x$ ที่จุด $(1,0)$

2.2 $y=\ln x$ ที่จุด $(e,1)$

2.3 $y=x\ln x$ ที่จุด $(1,0)$

2.4 $y=x+\ln x$ ที่จุด $(1,1)$

3. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้โดยเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของลอการิทึมก่อน

3.1 $y=\left(x^2+1\right)^x$

3.2 $y=(x+1)^{2x-3}$

3.3 $y=\left(x^x\right)^2$

3.4 $y=x^{x^2}$

3.5 $y=\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)}$

3.6 $y=\left(x^2+3x\right)\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2-1}$

3.7 $y=\left(x^3+5x\right)x^{\sqrt{x}}$

3.8 $y=2^x\cdot 5^{x^2}\cdot 7^{x^3}$

3.9 $y=\frac{\left(x^3-1\right)^3\left(x^{10}+1\right)^4}{(2x+1)^5}$

3.10 $y=\frac{\sqrt{x^2+3}\,\left(x^2+1\right)^3}{\left(x^2-1\right)^4}$

3.11 $y=\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}\,\left(x^2+x\right)}{\sqrt{x^2-1}\,\left(x^2-x+1\right)^2}$

3.12 $y=\frac{3\left(x^2+x+1\right)^3\left(x^2+x\right)^2}{2\left(x^2-x+1\right)^3\left(x^2-x\right)^2}$

2.8 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential function) $y = e^x$ หรือ $y = a^x$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัวโดยที่ $a > 0$ สามารถทำได้ในทำนองเดียวกับตัวอย่าง 2.7.11 โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันลอการิทึมและการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมดังนี้

จาก $y = a^x$ เมื่อ $a > 0$ จะได้ $\ln y = \ln a^x = x \ln a$ โดยความรู้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x เราจะได้ $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a$ ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = y \ln a = a^x \ln a$ นั่นคือ $\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \ln a$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัวโดยที่ $a > 0$

และในกรณีที่ $a = e$ จะได้ $\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x \ln e = e^x$

ถ้า $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยกฎลูกโซ่ จะได้

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(a^u\right) = a^u \ln a \frac{du}{dx} \quad \text{เมื่อ } a > 0 \\ &\frac{d}{dx}\left(e^u\right) = e^u \frac{du}{dx} \end{aligned}}$$

ตัวอย่าง 2.8.1 จงหาอนุพันธ์ของ $y = 10^x$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(10^x\right) = 10^x \ln 10$ ❍

ตัวอย่าง 2.8.2 จงหาอนุพันธ์ของ $y = e^{3x}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{3x}\right) = e^{3x}\frac{d}{dx}(3x) = 3e^{3x}$ ❍

ตัวอย่าง 2.8.3 จงหาอนุพันธ์ของ $y = 2^{x^2+1}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(2^{x^2+1}\right) = 2^{x^2+1}\ln 2 \frac{d}{dx}\left(x^2+1\right) = 2^{x^2+1}2x\ln 2 = 2^{x^2+2}x\ln 2$ ❍

ทฤษฎีบท 2.8.4 ถ้า n เป็นจำนวนจริง แล้ว $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$ เมื่อ $x>0$

บทพิสูจน์ ให้ $y=x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง และ $x>0$ จะได้ $\ln y=\ln x^n=n\ln x$

โดยความรู้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x เราจะได้ $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x}$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x}y=\frac{n}{x}x^n=nx^{n-1}$$ □

ถ้า $u=g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยกฎลูกโซ่และทฤษฎีบท 2.8.4 จะได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(u^n\right)=nu^{n-1}\frac{du}{dx} \quad \text{เมื่อ } u>0}$$

ตัวอย่าง 2.8.5 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\left(2x^2+1\right)^{\sqrt{3}}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(2x^2+1\right)^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\left(2x^2+1\right)^{\sqrt{3}-1}\frac{d}{dx}\left(2x^2+1\right)=\sqrt{3}\,4x\left(2x^2+1\right)^{\sqrt{3}-1}$ ❍

ตัวอย่าง 2.8.6 จงหาอนุพันธ์ของ $y=x^x$ เมื่อ $x>0$

วิธีทำ จาก $y=x^x$ จะได้ $\ln y=\ln x^x=x\ln x$ โดยความรู้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x เราจะได้

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=x\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}(x)=1+\ln x$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=y(1+\ln x)=x^x(1+\ln x)$ ❍

ตัวอย่าง 2.8.7 จงหาอนุพันธ์ของ $y=x^{x^x}$ เมื่อ $x>0$

วิธีทำ จาก $y=x^{x^x}$ จะได้ $\ln y=\ln x^{x^x}=x^x\ln x$ โดยความรู้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x และจากตัวอย่าง 2.8.6 เราจะได้

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=x^x\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}\left(x^x\right)=\frac{x^x}{x}+\ln x\left(x^x(1+\ln x)\right)$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx}=y\left(x^{x-1}+\ln x\left(x^x(1+\ln x)\right)\right)=x^{x^x}\left(x^{x-1}+\ln x\left(x^x(1+\ln x)\right)\right)$ ❍

ตัวอย่าง 2.8.8 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\left(x^x\right)^x$ เมื่อ $x>0$

วิธีทำ จาก $y=\left(x^x\right)^x$ จะได้ $\ln y=\ln\left(x^x\right)^x=x\ln x^x=x^2\ln x$ โดยความรู้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x เราจะได้

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=x^2\frac{d}{dx}(\ln x)+\ln x\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=x+2x\ln x$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx}=y(x+2x\ln x)=\left(x^x\right)^x(x+2x\ln x)$

แบบฝึกหัด 2.8

1. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $y=e$

1.2 $y=e^{\ln\sqrt{e^2+1}}$

1.3 $y=e^{\ln\sqrt{x^2+1}}$

1.4 $y=2^{\log_2\sqrt{x^2+1}}$

1.5 $y=2^{\log_x 2}$

1.6 $y=e^{x^2+x}$

1.7 $y=2^{x^2+x}$

1.8 $y=2xe^{x^2+x}$

1.9 $y=x2^{2x}$

1.10 $y=\left(x^2-1\right)e^{-3x}$

1.11 $y=2^{\ln(2x)}$

1.12 $y=\left(x^3+3x\right)^{x^2+2}$

1.13 $y=\dfrac{2^{x^2+x}-3^{x^2+x}}{2^{x^2+x}\cdot 3^{x^2+x}}$

1.14 $y=\dfrac{2^{x^2}-3^{x^2}}{5^x}$

2. จงหา $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ในข้อ 1.1-1.8

3. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งในข้อต่อไปนี้ ณ จุดที่กำหนดให้

3.1 $y=x+e^x$ ที่จุด $(0,1)$

3.2 $y=xe^x$ ที่จุด $(1,e)$

3.3 $y=e^x+e^{-x}$ ที่จุด $(1,e+\frac{1}{e})$

3.4 $y=xe^x-e^x$ ที่จุด $(1,0)$

3. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดและสัมผัสเส้นโค้ง $y=e^x$

2.9 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเริ่มจากการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ จากนั้นใช้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและกฎการหาอนุพันธ์ของผลหารในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เหลือ

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ เราจำเป็นต้องใช้ความรู้ในเรื่องของลิมิตต่อไปนี้

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

ทฤษฎีบท 2.9.1

1. $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
2. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
3. $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \ \tan x$
4. $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \ \cot x$
5. $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
6. $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

บทพิสูจน์

1. $$\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x\cos h - \sin x}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right)$$

$$= (\sin x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}\right) + (\cos x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right)$$

$$= (\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x$$

2. $$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos x\cos h - \cos x}{h} - \frac{\sin x \sin h}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\left(\frac{\cos\ h-1}{h}\right) - \sin x\left(\frac{\sin\ h}{h}\right)\right)$$

$$= (\cos x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\cos\ h-1}{h}\right) - (\sin x)\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin\ h}{h}\right)$$

$$= (\cos x)(0)-(\sin x)(1) = -\sin x$$

3. $$\frac{d}{dx}(\sec x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{\cos x\frac{d}{dx}(1)-\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x\ \tan x$$

4. $$\frac{d}{dx}(\csc x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{\sin x\frac{d}{dx}(1)-\frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\ \cot x$$

5. $$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

6. $$\frac{d}{dx}(\cot x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\frac{\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)-\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$$ □

ถ้า $u=g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยกฎลูกโซ่และทฤษฎีบท 2.9.1 จะได้

$\frac{d}{dx}(\sin u)=\cos u\ \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\cos u)=-\sin u\ \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\sec u)=\sec u\ \tan u\ \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\csc u)=-\csc u\ \cot u\ \frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(\tan u)=\sec^2 u\ \frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(\cot u)=-\csc^2 u\ \frac{du}{dx}$

ตัวอย่าง 2.9.2 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\sin\left(4x^5\right)$

วิธีทำ $$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(4x^5\right)\right)=\cos\left(4x^5\right)\ \frac{d}{dx}\left(4x^5\right)=20x^4\cos\left(4x^5\right)$$ ❍

ตัวอย่าง 2.9.3 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\sin(4x)^5$

วิธีทำ $\dfrac{d}{dx}\left(\sin(4x)^5\right)=\cos(4x)^5\ \dfrac{d}{dx}\left((4x)^5\right)\ =\cos(4x)^5\ \ 5(4x)^4\dfrac{d}{dx}(4x)$

$$=20(4x)^4\cos(4x)^5$$

ตัวอย่าง 2.9.4 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\sin^5(4x)$

วิธีทำ $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^5(4x)\right)=5\sin^4(4x)\ \dfrac{d}{dx}\left(\sin(4x)\right)\ =5\sin^4(4x)\ \cos(4x)\ \dfrac{d}{dx}(4x)$

$$=20\sin^4(4x)\ \cos(4x)$$

ตัวอย่าง 2.9.5 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\left(\sin(2x)+\cos(3x)\right)^2$

วิธีทำ $\dfrac{d}{dx}\left(\sin(2x)+\cos(3x)\right)^2=2\left(\sin(2x)+\cos(3x)\right)\dfrac{d}{dx}\left(\sin(2x)+\cos(3x)\right)$

$$=2\left(\sin(2x)+\cos(3x)\right)\left(\cos(2x)\ \frac{d}{dx}(2x)-\sin(3x)\ \frac{d}{dx}(3x)\right)$$

$$=2\left(\sin(2x)+\cos(3x)\right)\left(2\cos(2x)-3\sin(3x)\right)$$

ตัวอย่าง 2.9.6 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\csc(2x)+2\sec(3x)$

วิธีทำ $\dfrac{d}{dx}\left(\csc(2x)+2\sec(3x)\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\csc(2x)\right)+2\dfrac{d}{dx}\left(\sec(3x)\right)$

$$=-\csc(2x)\cot(2x)\frac{d}{dx}(2x)+2\sec(3x)\tan(3x)\frac{d}{dx}(3x)$$

$$=-2\csc(2x)\cot(2x)+6\sec(3x)\tan(3x)$$

ตัวอย่าง 2.9.7 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\left(\cot^3 x+1\right)^2$

วิธีทำ $\dfrac{d}{dx}\left(\cot^3 x+1\right)^2=2\left(\cot^3 x+1\right)\dfrac{d}{dx}\left(\cot^3 x+1\right)$

$$=2\left(\cot^3 x+1\right)\left(3\cot^2 x\ \frac{d}{dx}(\cot x)+0\right)$$

$$=2\left(\cot^3 x+1\right)\left(3\cot^2 x\left(-\csc^2 x\right)\right)=-6\csc^2 x\ \cot^2 x\left(\cot^3 x+1\right)$$

แบบฝึกหัด 2.9

1. จงหาอนุพันธ์ของ $y = f(x)$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $f(x) = \sin(8x+3)$

1.2 $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

1.3 $f(x) = \sec\sqrt{x-1}$

1.4 $f(x) = \csc(x^2+4)$

1.5 $f(x) = \cot(x^3-2x)$

1.6 $f(x) = \tan\sqrt[3]{5-6x}$

1.7 $f(x) = \cos\left(3x^2\right) + \tan^3(6x)$

1.8 $f(x) = \cos^2(3x) + \sin\left(e^{-2x}\right)$

1.9 $f(x) = x^2\csc(5x)$

1.10 $f(x) = x\cot\left(\frac{1}{x}\right)$

1.11 $f(x) = \tan^2 x\sec^3 x$

1.12 $f(x) = x^3\sec^2(4x)$

1.13 $f(x) = (\sin(5x)-\cos(5x))^5$

1.14 $f(x) = \sin\sqrt{x} + \sqrt{\sin x}$

1.15 $f(x) = \cot^3(3x+1)$

1.16 $f(x) = e^{\cos(2x)}$

1.17 $f(x) = \dfrac{\cos(4x)}{1-\sin(4x)}$

1.18 $f(x) = \dfrac{\sec(2x)}{\tan(2x+1)}$

1.19 $f(x) = e^{-3x}\tan\sqrt{x}$

1.20 $f(x) = \csc(\cot(4x))$

1.21 $f(x) = \ln(\ln(\sec(2x)))$

1.22 $f(x) = (\tan(2x)-\sec(2x))^3$

2. จงหาอนุพันธ์อันดับสองของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

2.1 $f(x) = \sec^2(3x)$

2.2 $f(x) = \cot^3(5x)$

2.3 $f(x) = \sin x - x\cos x$

2.4 $f(x) = \ln(\tan x)$

2.5 $f(x) = \sqrt{\tan x}$

2.6 $f(x) = e^{\sin x}$

2.7 $f(x) = \ln(\cos^2(3x))$

2.8 $f(x) = \sin(2x+3)^4$

3. จงใช้การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายในการหา $\frac{dy}{dx}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

3.1 $y = x\sin y$

3.2 $xy = \tan(xy)$

3.3 $e^x\cos y = x e^y$

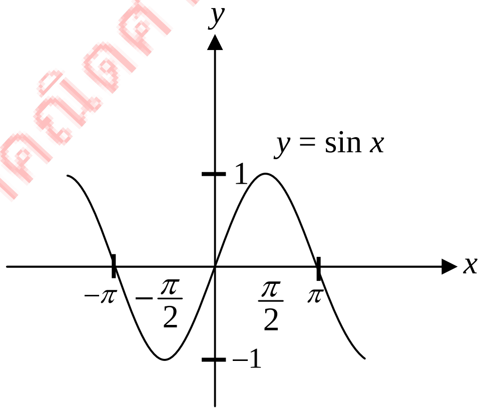
3.4 $\cos(x-y) = y\cos x$

2.10 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

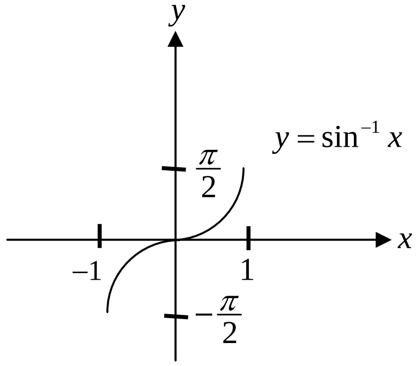
เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นฟังก์ชันตรีโกณมิติจะไม่มีฟังก์ชันผกผัน แต่ถ้าเราจำกัดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติลงบนช่วงบางช่วงเพื่อให้ได้ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เราสามารถกล่าวถึงฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเหล่านี้ได้ และเรียกฟังก์ชันเหล่านี้ว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ในเอกสารฉบับนี้เราจะเลือกโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (ซึ่งเป็นเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน) ดังตารางต่อไปนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y=\sin^{-1}x$	$[-1,\ 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$
$y=\cos^{-1}x$	$[-1,\ 1]$	$[0,\ \pi]$
$y=\tan^{-1}x$	$(-\infty,\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$
$y=\csc^{-1}x$	$(-\infty,\ -1]\cup[1,\ \infty)$	$\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left(0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$
$y=\sec^{-1}x$	$(-\infty,\ -1]\cup[1,\ \infty)$	$\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi\ ,\ \frac{3\pi}{2}\right)$
$y=\cot^{-1}x$	$(-\infty,\infty)$	$(0,\ \pi)$

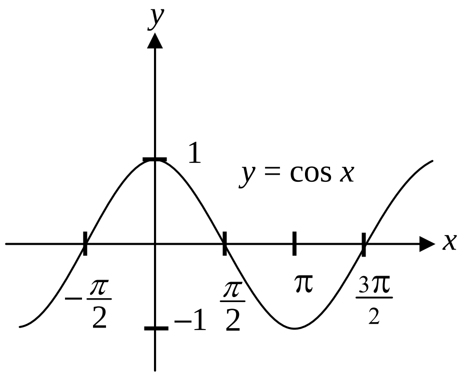
กราฟต่อไปนี้แสดงกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน



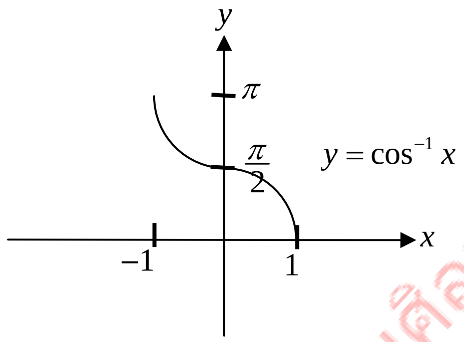
รูป 2.10.1



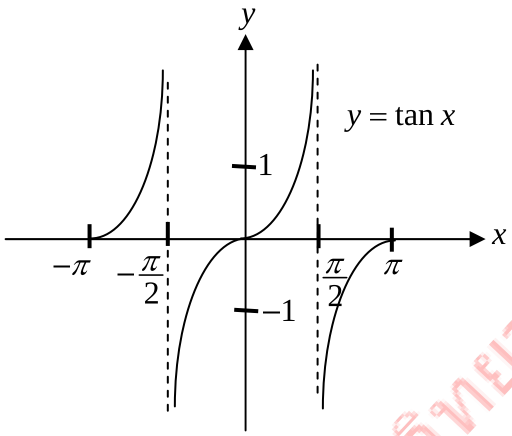
รูป 2.10.2



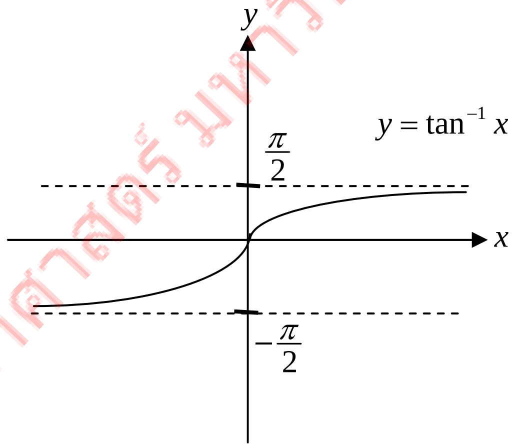
รูป 2.10.3



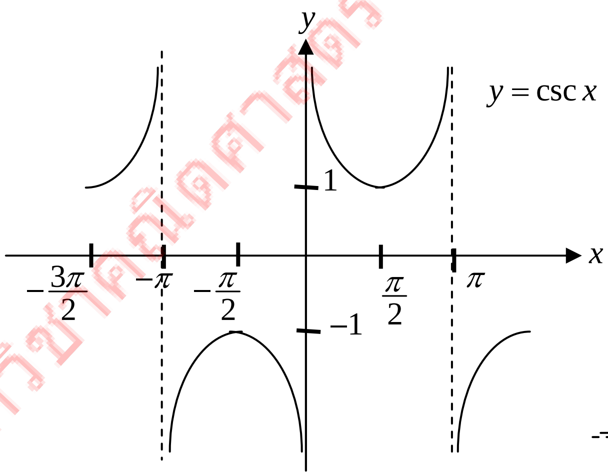
รูป 2.10.4



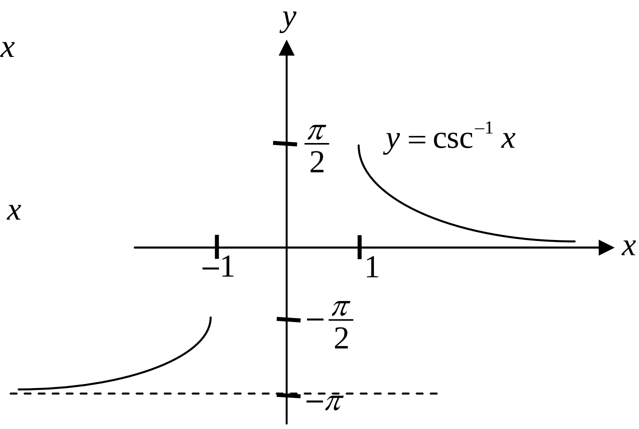
รูป 2.10.5



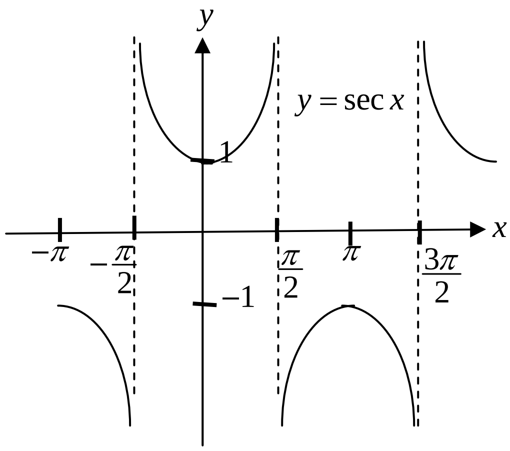
รูป 2.10.6



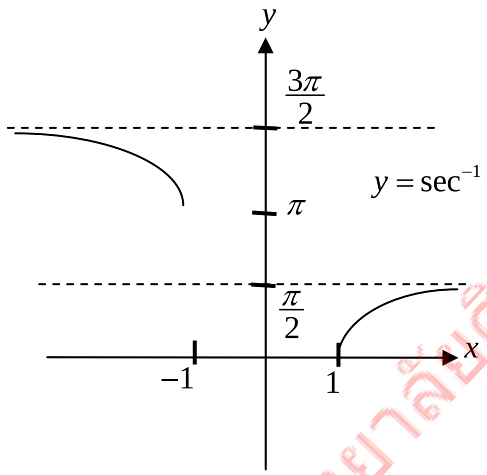
รูป 2.10.7



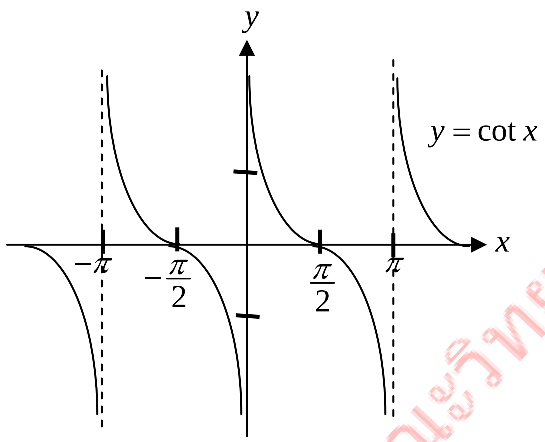
รูป 2.10.8



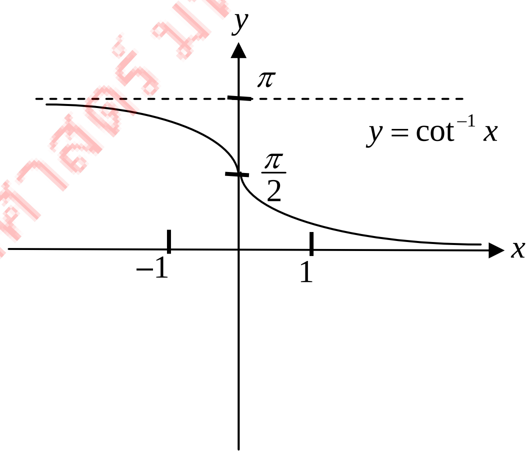
รูป 2.10.9



รูป 2.10.10



รูป 2.10.11



รูป 2.10.12

ตัวอย่าง 2.10.1 จงหาค่าของ $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ และ $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ $y=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ จะได้ว่า $\sin y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$ เนื่องจาก $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ดังนั้น $y=\frac{\pi}{3}$

ต่อไปให้ $y=\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ จะได้ว่า $\cos y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ โดยที่ $0\le y\le\pi$ เนื่องจาก $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ดังนั้น $y=\frac{3\pi}{4}$ ❍

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันโดยใช้ความรู้ในเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายในหัวข้อ 2.5 และ อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในหัวข้อ 2.9 เข้าช่วย

ทฤษฎีบท 2.10.2

1. $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$
2. $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$
3. $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>1$
4. $\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1}x\right)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>1$
5. $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{1}{1+x^2}$
6. $\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right)=-\frac{1}{1+x^2}$

บทพิสูจน์

1. ให้ $y=\sin^{-1}x$ จะได้ว่า $\sin y=x$ โดยที่ $|x|\le 1$ และ $|y|\le\frac{\pi}{2}$ โดยใช้การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x จะได้ว่า $\cos y\frac{dy}{dx}=1$ นั่นคือ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}$ เมื่อ $\cos y\neq 0$

เนื่องจาก $\sin^2 y+\cos^2 y=1$ จะได้ว่า $\cos y=\pm\sqrt{1-\sin^2 y}=\pm\sqrt{1-x^2}$ เนื่องจาก $|y|\le\frac{\pi}{2}$ และ $\cos y\neq 0$ จะได้ว่า $|y|<\frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $\cos y>0$ เพราะฉะนั้น $\cos y=\sqrt{1-x^2}$ แสดงว่า

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. ให้ $y=\cos^{-1}x$ จะได้ว่า $\cos y=x$ จาก $x=\cos y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$ จะได้ $y=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$ นั่นคือ $\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$ ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x\right)=-\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ |x|<1$$

3. ให้ $y=\sec^{-1}x$ จะได้ว่า $\sec y = x$ โดยที่ $|x|\geq 1$ และ $y\in\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi\,,\frac{3\pi}{2}\right)$ โดยใช้การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x จะได้ว่า $\sec y\tan y\,\frac{dy}{dx}=1$ นั่นคือ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec y\tan y}$ เมื่อ $\sec y\tan y\neq 0$ เนื่องจาก $\sec^2 y-\tan^2 y=1$ จะได้ว่า $\tan y=\pm\sqrt{\sec^2 y-1}=\pm\sqrt{x^2-1}$ เนื่องจาก $y\in\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi\,,\frac{3\pi}{2}\right)$ และ $(\sec y)(\tan y)\neq 0$

จะได้ว่า $y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ ดังนั้น $\tan y>0$ เพราะฉะนั้น $\tan y=\sqrt{x^2-1}$ แสดงว่า

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec y\tan y}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

4. ให้ $y=\csc^{-1}x$ จะได้ว่า $\csc y=x$ จาก $x=\csc y=\frac{1}{\sin y}=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=\sec\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$

จะได้ $y=\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}x$ นั่นคือ $\csc^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}x$ ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1}x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-\sec^{-1}x\right)=-\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ |x|<1$$

5. ให้ $y=\tan^{-1}x$ จะได้ว่า $\tan y=x$ โดยใช้การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยายเทียบกับ x จะได้ว่า $\sec^2 y\,\frac{dy}{dx}=1$ หรือ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec^2 y}$ เมื่อ $\sec^2 y\neq 0$ ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

6. ให้ $y=\cot^{-1}x$ จะได้ว่า $\cot y=x$ จาก $x=\cot y=\frac{\cos y}{\sin y}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)$

จะได้ $y=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$ นั่นคือ $\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x$ ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}x\right)=-\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=-\frac{1}{1+x^2}\qquad\square$$

ถ้า $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยกฎลูกโซ่และทฤษฎีบท 2.9.1 จะได้

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}u\right) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \quad , -1<u<1 \qquad \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}u\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \quad , -1<u<1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}u\right) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \quad , |u|>1 \qquad \frac{d}{dx}\left(\csc^{-1}u\right) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \quad , |u|>1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}u\right) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}u\right) = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

ข้อสังเกต

1. $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}u\right) = -\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}u\right)$

2. $\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1}u\right) = -\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}u\right)$

3. $\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}u\right) = -\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}u\right)$

ตัวอย่าง 2.10.3 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \sin^{-1}\left(3x^4\right)$

วิธีทำ $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\left(3x^4\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(3x^4\right)^2}}\frac{d}{dx}\left(3x^4\right) = \frac{12x^3}{\sqrt{1-9x^8}}$$ ❍

ตัวอย่าง 2.10.4 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \tan^{-1}\left(e^{2x}\right)$

วิธีทำ $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\left(e^{2x}\right)\right) = \frac{1}{1+\left(e^{2x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right) = \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$$ ❍

ตัวอย่าง 2.10.5 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\left(\sin^{-1}(4x-5)\right)^{\frac{3}{4}}$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(4x-5)\right)^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}\left(\sin^{-1}(4x-5)\right)^{-\frac{1}{4}}\ \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}(4x-5)\right)$

$$=\frac{3}{4}\left(\sin^{-1}(4x-5)\right)^{-\frac{1}{4}}\ \frac{1}{\sqrt{1-(4x-5)^2}}\ \frac{d}{dx}(4x-5)$$

$$=\frac{3}{\left(\sin^{-1}(4x-5)\right)^{\frac{1}{4}}\ \sqrt{-16x^2+40x-24}}$$

ตัวอย่าง 2.10.6 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\sec^{-1}\left(x^2\right)$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}\left(x^2\right)\right)=\frac{1}{x^2\sqrt{\left(x^2\right)^2-1}}\ \frac{d}{dx}\left(x^2\right)=\frac{2x}{x^2\sqrt{x^4-1}}=\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

ตัวอย่าง 2.10.7 จงหาอนุพันธ์ของ $y=\cos^{-1}\left(\cot^{-1}\left(3x^2+1\right)\right)$

วิธีทำ $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}\left(\cot^{-1}\left(3x^2+1\right)\right)\right)$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\cot^{-1}\left(3x^2+1\right)\right)^2}}\ \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}\left(3x^2+1\right)\right)$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\cot^{-1}\left(3x^2+1\right)\right)^2}}\ \frac{-1}{1+\left(3x^2+1\right)^2}\ \frac{d}{dx}\left(3x^2+1\right)$$

$$=\frac{6x}{\left(9x^4+6x^2+2\right)\sqrt{1-\left(\cot^{-1}\left(3x^2+1\right)\right)^2}}$$

แบบฝึกหัด 2.10

1. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

1.2 $\sin^{-1}(-1)$

1.3. $\tan^{-1}(0)$

1.4. $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

1.5. $\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

1.6. $\tan^{-1}(\sin 0)$

1.7 $\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

1.8 $\tan\left(\sec^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)\right)$

2. จงหาอนุพันธ์ของ $y = f(x)$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

2.1 $f(x) = \tan^{-1}(3x-5)$

2.2 $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

2.3 $f(x) = \sec\sqrt{x}$

2.4 $f(x) = \csc^{-1}(x^2)$

2.5 $f(x) = e^{-x}\cot^{-1}(2x)$

2.6 $f(x) = \sqrt{\sec^{-1}(3x)}$

2.7 $f(x) = x^3\tan^{-1}(x^2)$

2.8 $f(x) = \tan^{-1}(\sin(2x))$

2.9 $f(x) = \left(1+\cos^{-1}(3x)\right)^3$

2.10 $f(x) = x^2\sec^{-1}(5x)$

2.11 $f(x) = \ln\left(\sin^{-1}(x^2)\right)$

2.12 $f(x) = \sin^{-1}(\ln x)$

2.13 $f(x) = \cot^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

2.14 $f(x) = \sec^{-1}\sqrt{x^2-1}$

2.15 $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \cos^{-1}\frac{1}{x}\right)^4$

2.16 $f(x) = \frac{\tan^{-1}x}{x^2+1}$

2.17 $f(x) = \cos^{-1}\left(\sin(e^x)\right)$

2.18 $f(x) = e^{2x}\csc^{-1}(3x)$

2.19 $f(x) = e^x\cot^{-1}(3x^2)$

2.20 $f(x) = \ln\left(\tan^{-1}(2x)\right)$

3. จงหา $\frac{dy}{dx}$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้

3.1 $x^2 + x\sin^{-1}y = ye^x$

3.2 $\ln(x+y) = \tan^{-1}(xy)$

2.11 ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

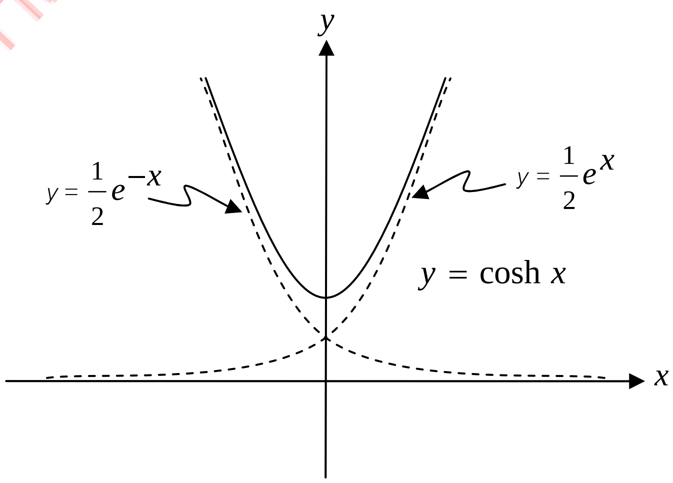
ในการศึกษาคณิตศาสตร์ประยุกต์และวิศวกรรมศาสตร์เรามักพบพจน์ $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ และ $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ เสมอ ๆ เป็นที่น่าสนใจว่าสมบัติบางประการของพจน์เหล่านี้คล้ายกับสมบัติของ $\sin x$ และ $\cos x$ ยิ่งไปกว่านั้นความสัมพันธ์ของพจน์เหล่านี้กับไฮเพอร์โบลาก็เป็นไปในทำนองเดียวกันกับความสัมพันธ์ของ $\sin x$ และ $\cos x$ กับวงกลมหนึ่งหน่วย (ซึ่งเราจะได้เห็นต่อไป) ด้วยเหตุผลดังกล่าวเราจึงเรียกพจน์เหล่านี้ว่า ไฮเพอร์โบลิกไซน์และไฮเพอร์โบลิกโคไซน์ และใช้ในการนิยามฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกต่อไปนี้

บทนิยาม 2.11.1 ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์ (hyperbolic sine) เขียนแทนด้วย sinh และ**ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์** (hyperbolic cosine) เขียนแทนด้วย cosh นิยามดังนี้

สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{และ} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

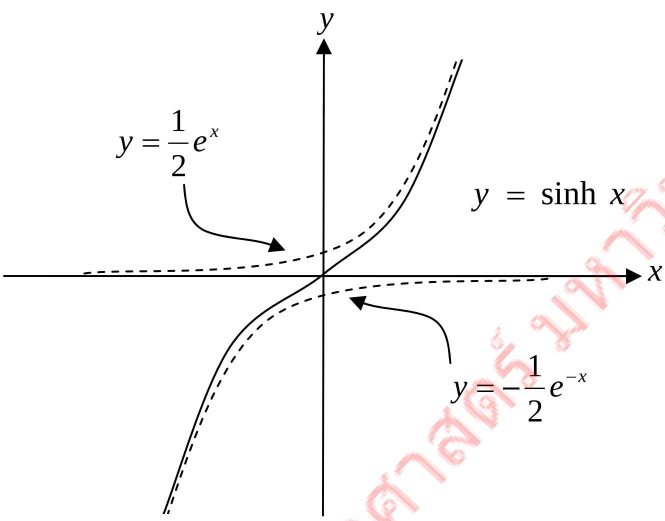
กราฟของ $y = \cosh x$ อาจหาได้จากวิธีการที่เราเรียกกันว่าการบวกพิกัดที่สอง (addition of ordinates) โดยเริ่มจากการเขียนกราฟของ $y = \frac{1}{2}e^x$ และ $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ บนแกนพิกัดคู่เดียวกัน (ดูรูป 2.11.1 กราฟของ $y = \frac{1}{2}e^x$ และ $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ เขียนด้วยเส้นประ) พิกัดที่สองของจุดบน $y = \cosh x$ หาได้จากการบวกพิกัดที่สองของจุดบนกราฟ $y = \frac{1}{2}e^x$ และ $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ ซึ่งกราฟของ $y = \cosh x$ แทนด้วยเส้นทึบในรูป 2.11.1



รูป 2.11.1

ขอให้สังเกตว่าเรนจ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์ คือ [1, ∞)

ในทำนองเดียวกัน กราฟของ $y=\sinh x$ ได้มาจากการบวกพิกัดที่สองของกราฟ $y=\frac{1}{2}e^{x}$ และ $y=-\frac{1}{2}e^{-x}$ ดังแสดงในรูป 2.11.2



รูป 2.11.2

ถ้าให้ $\cosh^2 x$ แทน $(\cosh x)^2$ และ $\sinh^2 x$ แทน $(\sinh x)^2$ แล้ว เราได้ว่า

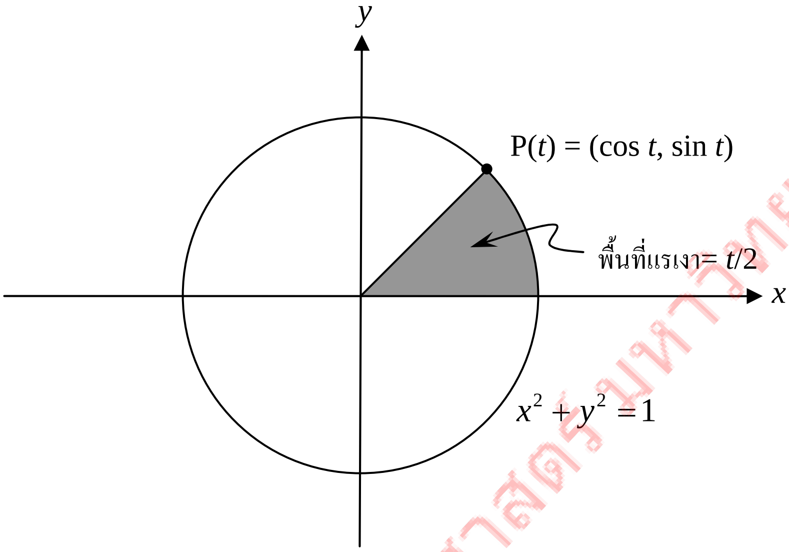
$$\begin{aligned}\cosh^2 x-\sinh^2 x &= \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)^2\\ &=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\\ &=1\end{aligned}$$

นั่นคือ $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$

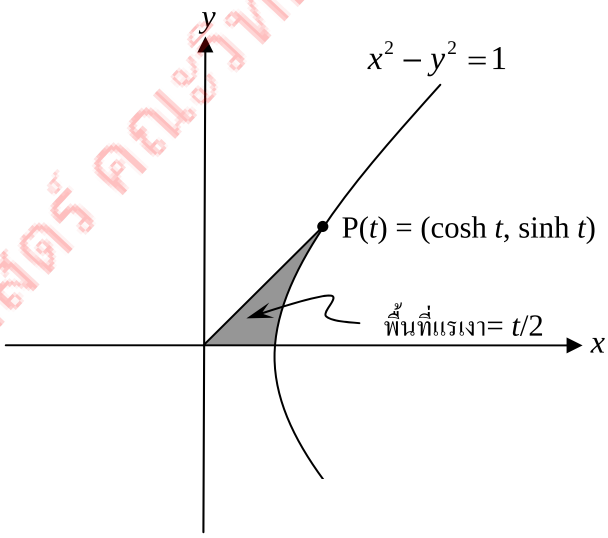
ดังที่ได้กล่าวมาในตอนต้นแล้วว่าสมบัติบางประการของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกคล้ายกับสมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เราจะกล่าวถึงสมบัติเหล่านั้นต่อไปนี้

1. เอกลักษณ์ $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ คล้ายกับเอกลักษณ์ $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ ต่างกันเพียงแต่เครื่องหมายเท่านั้น

2. ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์อาจได้มาจากการส่งจุด (mapping) ทั้งหมดบนเส้นจำนวนไปบนวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2+y^2=1$ (ดูรูป 2.11.3) ในขณะที่ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์ และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์อาจได้มาจากการส่งจุดทั้งหมดบนเส้นจำนวนไปบนส่วนของไฮเพอร์โบลา $x^2-y^2=1$ โดยที่ $x\geq 1$ (ดูรูป 2.11.4)



รูป 2.11.3



รูป 2.11.4

3. พื้นที่ของอาณาบริเวณในวงกลมหนึ่งหน่วยที่ถูกล้อมรอบด้วยส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดตัดวงกลมที่ $P(0)$ และ $P(t)$ (ส่วนแรเงาในรูป 2.11.3) เท่ากับ $A=\pi\left(\frac{t}{2\pi}\right)=\frac{t}{2}$ ในขณะเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่าพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยไฮเพอร์โบลา $x^2-y^2=1$ โดยที่ $x\geq 1$ ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดตัดไฮเพอร์โบลาที่ $P(0)$ และ $P(t)$ (ส่วนแรเงาในรูป 2.11.4) มีขนาดเท่ากับ $\frac{t}{2}$ ด้วย

โดยเลียนแบบการนิยามฟังก์ชันแทนเจนต์ ฟังก์ชันโคเซแคนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคแทนเจนต์ เราอาจนิยาม**ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์** (hyperbolic tangent) **ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคเซแคนต์** (hyperbolic cosecant) **ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกเซแคนต์** (hyperbolic secant) และ **ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคแทนเจนต์** (hyperbolic cotangent) ได้ดังนี้

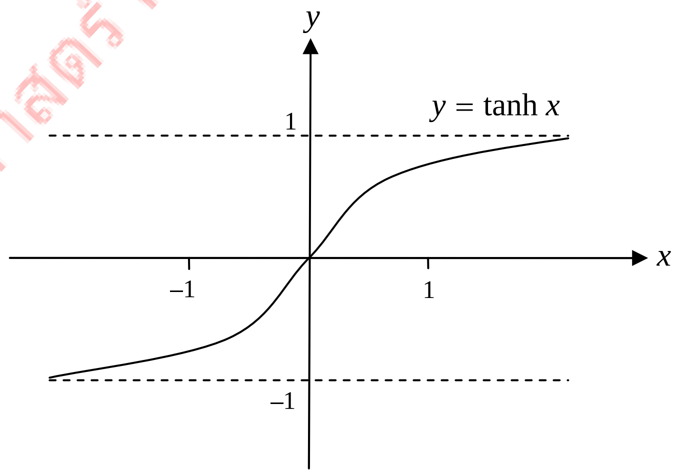
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, x \neq 0$$

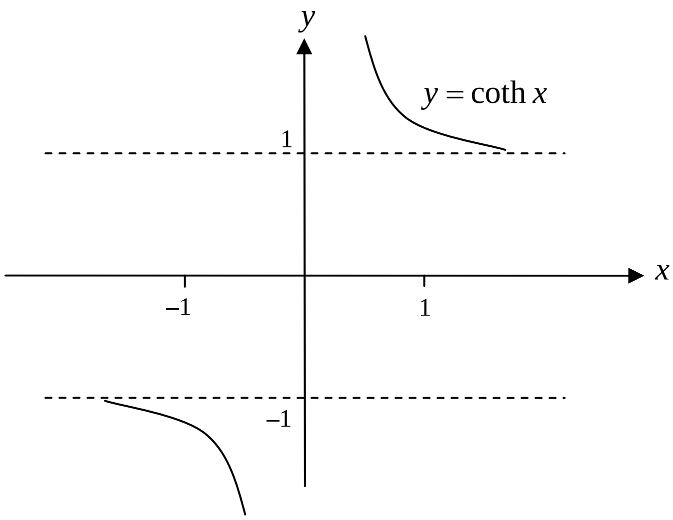
$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, x \neq 0$$

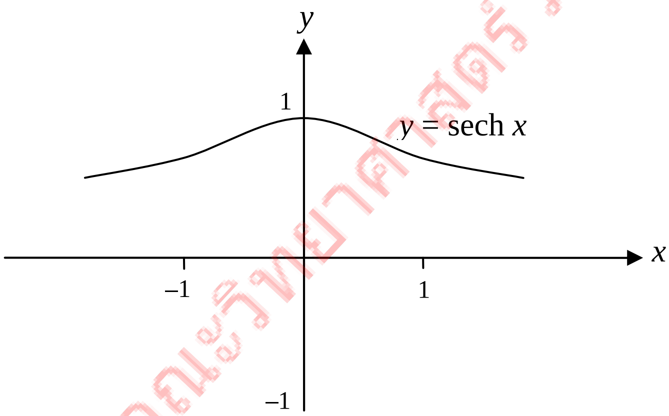
รูป 2.11.5 - รูป 2.11.8 แสดงให้เห็นกราฟของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกทั้ง 4 ข้างต้น



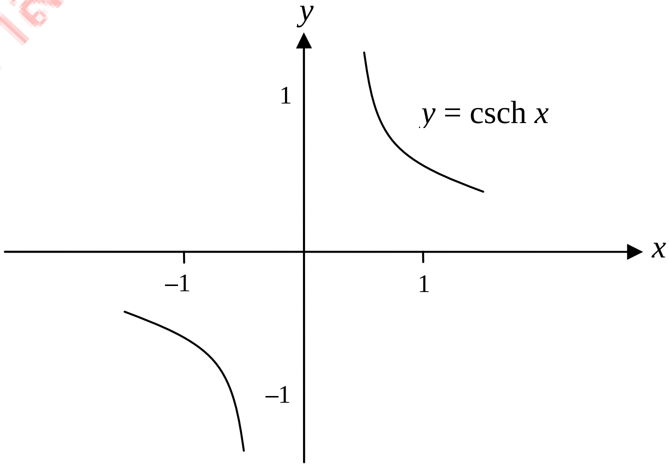
รูป 2.11.5



รูป 2.11.6



รูป 2.11.7



รูป 2.11.8

นอกจากเอกลักษณ์ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ แล้ว เรายังมีเอกลักษณ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกที่น่าสนใจดังต่อไปนี้

$$\tanh^2 x + \text{sech}^2 x = 1 \qquad (2.11.1)$$

$$\coth^2 x - \text{cosech}^2 x = 1 \qquad (2.11.2)$$

$$\sinh(A + B) = \sinh A \cosh B + \cosh A \sinh B \qquad (2.11.3)$$

$$\cosh(A + B) = \cosh A \cosh B + \sinh A \sinh B \qquad (2.11.4)$$

$$\sinh(-A) = -\sinh A \qquad (2.11.5)$$

$$\cosh(-A) = \cosh A \qquad (2.11.6)$$

สำหรับการพิสูจน์เอกลักษณ์เหล่านี้ให้เป็นแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 2.11

จงพิสูจน์เอกลักษณ์ 2.11.1, 2.11.2, 2.11.3, 2.11.4, 2.11.5 และ 2.11.6

2.12 อนุพันธ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

จากการนิยามฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกและความรู้ในเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง เราจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.12.1 1. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

2. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

สำหรับการพิสูจน์ให้เป็นแบบฝึกหัด □

จากทฤษฎีบท 2.12.1 และความรู้เรื่องกฎลูกโซ่ ถ้าให้ $u = g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว เราได้ว่า

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sinh u) &= \cosh u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}(\cosh u) &= \sinh u \frac{du}{dx} \end{aligned}}$$

(2.12.1)

(2.12.2)

จากการนิยามฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก ความรู้เรื่องอนุพันธ์ของผลหาร กฎลูกโซ่และข้อความใน (2.12.1) และ (2.12.2) เราได้ว่า

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tanh u) &= \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{cosech} u) &= -\operatorname{cosech} u \coth u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) &= -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx}(\coth u) &= -\operatorname{cosech}^2 u \frac{du}{dx} \end{aligned}}$$

(2.12.3)

(2.12.4)

(2.12.5)

(2.12.6)

ตัวอย่าง 2.12.2 จงหา $f'(x)$ เมื่อให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $f(x) = \cosh(x^2 + 1)$

2. $f(x) = \coth^3(4x^2)$

วิธีทำ 1. ให้ $f(x) = \cosh(x^2 + 1)$

เราได้ว่า $$f'(x) = \sinh(x^2 + 1)\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x\sinh(x^2 + 1)$$

2. ให้ $f(x) = \coth^3(4x^2)$

เราได้ว่า
$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3\coth^2(4x^2)\frac{d}{dx}(\coth(4x^2)) \\
&= 3\coth^2(4x^2)\,[-\operatorname{cosech}^2(4x^2)\frac{d}{dx}(4x^2)] \\
&= 3\coth^2(4x^2)\,[-\operatorname{cosech}^2(4x^2)(4(2x))] \\
&= -24x(\coth^2(4x^2))(\operatorname{cosech}^2(4x^2)) \\
&= \frac{-24x\cosh^2(4x^2)}{\sinh^4(4x^2)}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.12.3 จงหาอนุพันธ์ของ $(\tanh(x^3))(\operatorname{sech}(x^3))$

วิธีทำ : ให้ $f(x) = (\tanh(x^3))(\operatorname{sech}(x^3))$

เราได้ว่า
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(\tanh(x^3)\operatorname{sech}(x^3)) + \tanh(x^3)\frac{d}{dx}\operatorname{sech}(x^3) \\
&= (\operatorname{sech}^2(x^3)\frac{d}{dx}x^3)\operatorname{sech}(x^3) + \tanh(x^3)(-\operatorname{sech}(x^3)\tanh(x^3)\frac{d}{dx}x^3) \\
&= 3x^2\operatorname{sech}^3(x^3) - 3x^2\operatorname{sech}(x^3)\tanh^2(x^3)
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 2.12

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $\sinh(5x)$

1.2 $\cosh\sqrt{4x^2+3}$

1.3 $\sqrt{x}\tanh\sqrt{x}$

1.4 $x\,\text{cosech}(e^{4x})$

1.5 $\dfrac{\text{sech}\,(x^2)}{x^2+1}$

1.6 $\dfrac{\coth x}{\cot x}$

1.7 $\text{cosech}(x^3)$

1.8 $\sinh\,(x^2+1)$

1.9 $\text{cosech}^3\,x$

1.10 $\text{sech}^2\,(3x)$

1.11 $\ln\,(\cosh\,(2x))$

1.12 $\tan^{-1}(\tanh x)$

1.13 $x^2\coth\,(2x)$

1.14 $e^{3x}\coth x$

1.15 $\sqrt{\text{sech}\,(5x)}$

1.16 $\dfrac{1}{\sinh x+1}$

1.17 $\dfrac{1}{\sinh(x+1)}$

1.18 $\dfrac{1+\cosh x}{1-\cosh x}$

1.19 $\ln\,(\text{cosech}(x^2))$

1.20 $\sinh\,(\cot x)$

2. จงหา y' ในแต่ละข้อต่อไปนี้

2.1 $\sinh(xy) = ye^x$

2.2 $x^2\tanh y = \ln y$