โครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

การวิเคราะห์เชิงจริง

Real Analysis

สมเจตน์ ชัยยะ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

การวิเคราะห์เชิงจริง

Real Analysis

เมษายน 2564

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สมเจตน์ ชัยยะ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยศิลปากร

คำนำ

การวิเคราะห์เชิงจริง (Real Analysis) เป็นสาขาวิชาหนึ่งทางคณิตศาสตร์ที่มีสำคัญมาก ซึ่งในอดีตนั้น ผู้ที่ได้ชื่อว่าเป็นนักคณิตศาสตร์หรือผู้สำเร็จการศึกษาจากหลักสูตรระดับบัณฑิตศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ ทุกคนจะต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการวิเคราะห์เชิงจริงไม่มากก็น้อย วิชาการวิเคราะห์เชิงจริงจึงเป็นวิชาบังคับในหลักสูตรระดับบัณฑิตศึกษา สาขาวิชาคณิตศาสตร์เกือบทุกหลักสูตร แม้ในปัจจุบันหลักสูตรในสาขาวิชาคณิตศาสตร์จะมีการเปลี่ยนแปลงและความแตกต่างหลากหลายมากขึ้นตามยุคสมัยที่เปลี่ยนไป ทำให้หลายหลักสูตรมิได้บรรจุรายวิชาการวิเคราะห์เชิงจริงให้เป็นรายวิชาบังคับ แต่ความสำคัญของวิชาการวิเคราะห์เชิงจริงก็ไม่ได้ลดน้อยลงไป เพราะวิชาการวิเคราะห์เชิงจริงนั้นเป็นพื้นฐานที่จำเป็นต่อการศึกษาและการวิจัยในด้านอื่น ๆ อีกมากมาย เช่น ทฤษฎีความน่าจะเป็น (Propability Theory) ทฤษฎีเมเชอร์ (Measure Theory) และการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน (Functional Analysis) เป็นต้น

นอกจากนี้วิชาการวิเคราะห์เชิงจริงยังเป็นวิชาที่เหมาะสำหรับการฝึกทักษะและแนวคิดที่จำเป็นทางคณิตศาสตร์ให้กับผู้เรียนเป็นอย่างดี เพราะเนื้อหาของรายวิชานี้จะแสดงให้เห็นถึงการคิดวิเคราะห์อย่างละเอียดและเป็นระบบ และการพัฒนาองค์ความรู้ใหม่ทางคณิตศาสตร์ โดยเริ่มต้นจากการศึกษาความรู้เดิมที่มีอยู่แล้ว (เช่น การวัดขนาดของเซตของจำนวนจริง และการหาปริพันธ์รีมันน์ เป็นต้น) ว่ามีปัญหาหรือข้อจำกัดอะไรบ้าง แล้วหาแนวทางการแก้ปัญหาหรือข้อจำกัดดังกล่าว ซึ่งการศึกษานั้นได้เริ่มต้นจากการศึกษากรณีง่าย ๆ ก่อน แล้วจึงศึกษากรณีที่มีความซับซ้อนมากขึ้นเรื่อย ๆ ตามลำดับ จนในที่สุดเราก็จะได้องค์ความรู้ใหม่ที่สมบูรณ์ เช่น เราจะขยายแนวคิดการหาปริพันธ์ของรีมันน์ เพื่อให้ได้แนวคิดใหม่ที่สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนเกินกว่าที่จะหาปริพันธ์รีมันน์ได้ โดยที่ยังคงแนวคิดของการหาปริพันธ์เดิมไว้ ก่อนอื่นเริ่มต้นด้วยการพัฒนาเครื่องมือที่จะใช้ในการวัดขนาดของเซตของจำนวนจริง ให้สามารถวัดขนาดของเซตย่อยของจำนวนจริงที่มีความซับซ้อนได้ โดยยังคงสมบัติพื้นฐานของการวัดที่ควรมีไว้ จนได้เครื่องมือใหม่ที่เรียกว่า *เมเชอร์เลอเบก* (Lebesgue measure) หลังจากนั้นเราก็ศึกษาแนวคิดของการหาปริพันธ์แบบใหม่โดยจะใช้เมเชอร์เลอเบกเป็นเครื่องมือวัดขนาดของเซตแทนการวัดด้วยความยาวช่วง โดยเริ่มต้นศึกษากับฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนน้อย ๆ ก่อน นั่นก็คือ *ฟังก์ชัน*

เชิงเดียว (simple functions) แล้วจึงขยายแนวคิดไปสู่ฟังก์ชันมีขอบเขต ฟังก์ชันที่มีค่าไม่เป็นลบ และในที่สุดเราก็ได้แนวคิดสำหรับการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันทั่วไป

ตำราการวิเคราะเชิงจริงเล่มนี้ ผู้เขียนได้ปรับปรุงมาจากเอกสารประกอบการสอนที่ใช้จริงในการสอนรายวิชาการวิเคราะห์เชิงจริง ให้กับนักศึกษาระดับปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร จึงมีเนื้อหาสาระที่เหมาะสมในการเรียนการสอนในหนึ่งภาคการศึกษาในระบบทวิภาค โดยถือว่าผู้อ่านได้มีความรู้พื้นฐานทางคณิตวิเคราะห์ (Mathematical Analysis) หรือการวิเคราะห์เชิงจริงเบื้องต้น (Introduction to Real Analysis) มาพอสมควรแล้ว ผู้เขียนแบ่งเนื้อหาของตำราเล่มนี้ออกเป็น 6 บท ดังนี้

บทที่ 1 จะนำเสนอสัญลักษณ์และทฤษฎีบทเกี่ยวกับเซตที่จำเป็นต้องใช้ในตำราเล่มนี้

บทที่ 2 จะรวบรวมสมบัติและทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับระบบจำนวนจริงและฟังก์ชัน หากผู้อ่านมีความรู้ความเข้าใจในเรื่องดังกล่าวดีแล้ว ผู้อ่านก็สามารถข้ามไปศึกษาบทต่อไปได้เลย

บทที่ 3 จะนำเสนอแนวคิดและที่มาของเมเชอร์เลอเบก รวมทั้งความหมายและสมบัติของฟังก์ชันเมเชอร์ได้

บทที่ 4 จะเริ่มต้นด้วยการทบทวนบทนิยามของปริพันธ์รีมันน์และเงื่อนไขของฟังก์ชันที่จะหาปริพันธ์รีมันน์ได้ ซึ่งจะปูแนวทางไปสู่การนิยามการหาปริพันธ์เลอเบกของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ในที่สุด

บทที่ 5 จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ของอนุพันธ์กับปริพันธ์เลอเบก โดยเฉพาะเนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

บทที่ 6 จะศึกษาเซตของฟังก์ชันที่หาปริพันธ์เลอเบกได้บนช่วงปิด $[0,1]$ ซึ่งจะเขียนแทนเซตนี้ด้วย L^p โดยจะแสดงว่า L^p เป็นปริภูมินอร์มที่บริบูรณ์ หรือที่เรียกว่า *ปริภูมิบานาค* นอกจากนี้ยังแสดงให้เห็นว่า เซตของของฟังก์ชันนัลเชิงเส้น $F : L^p \to \mathbb{R}$ มีความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งกับปริภูมิ L^q เมื่อ $1 \leq p < \infty$ และ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ซึ่งการศึกษาในบทนี้เป็นตัวอย่างหนึ่งของการศึกษาในสาขาการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน

ผู้เขียนมิได้มุ่งเน้นให้ตำราเล่มนี้เป็นสารานุกรมฉบับสมบูรณ์ทางการวิเคราะห์เชิงจริง ผู้เขียนเพียงปรารถนาว่าตำราเล่มนี้จะเป็นแหล่งความรู้พื้นฐานเพื่อศึกษาหรือค้นคว้าวิจัยเพิ่มเติมต่อไปสำหรับผู้อ่านที่มีความสนใจในสาขาวิชานี้

ท้ายที่สุดนี้ผู้เขียนขอขอบคุณโครงการตำรา คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร เป็นอย่างสูงที่ให้การสนับสนุนทุนการเขียนตำราเล่มนี้ และขอบคุณคณะกรรมการผู้ทรงคุณวุฒิเป็นอย่างสูงที่ให้คำแนะนำเพื่อให้ตำราเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

สมเจตน์ ชัยยะ

สารบัญ

บทที่ 1

ทฤษฎีเซตเบื้องต้น

ในบทแรกนี้เราจะทบทวนความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเซตที่จำเป็นต่อการศึกษาเนื้อหาในตำราเล่มนี้ โดยมีเนื้อหาประกอบด้วย สัญลักษณ์และกฎพื้นฐานของเซต สัจพจน์การเลือก การนับได้ของเซต และพีชคณิตของเซต หากผู้อ่านมีความรู้ความเข้าใจในหัวข้อเหล่านี้ดีแล้ว ผู้อ่านก็สามารถข้ามไปศึกษาในหัวข้อต่อไปได้เลย

1.1 สัญลักษณ์และกฎพื้นฐานของเซต

ในตำรานี้เราให้

$\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

$\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ นั่นคือ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม นั่นคือ $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

เนื่องจากบางครั้งฟังก์ชัน ลิมิตของฟังก์ชัน หรือลิมิตของลำดับ ที่เราจะพบเห็นในบทต่อ ๆ ไปนั้นอาจมีค่าเป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ เพื่อความสะดวกเราจึงกำหนดให้ $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

ให้ X เป็นเซตเอกภพ และ $A \subset X$ เราจะให้ $P(A)$ แทน***เซตกำลัง*** (***power set***) ของ A และ A^c แทนคอมพลีเมนต์ของ A นั่นคือ

$$A^c = \{x \in X : x \notin A\}$$

และสำหรับ $B \subset X$ เราจะให้

$$B - A = B \cap A^c = \{x \in B : x \notin A\}$$

และ

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

เราเรียก $A \Delta B$ ว่า ***ผลต่างสมมาตร*** (***symmetric difference***) ***ของ*** A ***และ*** B

ให้ $\mathcal{I}$ เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $A_\alpha \subset X$ เมื่อ $\alpha \in \mathcal{I}$ เราให้

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha = \{x \in X : x \in A_\alpha \text{ สำหรับบาง } \alpha \in \mathcal{I}\}$$

และ

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha = \{x \in X : x \in A_\alpha \text{ สำหรับทุก } \alpha \in \mathcal{I}\}$$

และเราเรียกเซต $\mathcal{I}$ ว่า ***เซตดัชนี*** (***index set***) ถ้า $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ แล้วเราอาจเขียนแทน $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha$ และ $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha$ ด้วย

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

และ

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

ตามลำดับ ถ้า $\mathcal{I}$ เป็นเซตนับได้ (ซึ่งเราจะกล่าวถึงการนับได้ของเซตในหัวข้อต่อไป) เช่น $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ และ $\mathcal{I} = \mathbb{Z}$ เป็นต้น เราจะเรียก $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha$ ว่า ***ยูเนียนนับได้*** (***countable union***) และเรียก $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha$ ว่า ***อินเตอร์เซกชันนับได้*** (***countable intersection***) ในกรณี $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ เราอาจเขียน

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{และ} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

กฎการกระจาย (Distributive laws)

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} (B \cap A_\alpha)$$

และ

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} (B \cup A_\alpha)$$

กฎของเดอมอร์แกน (De Morgan's laws)

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha^c \quad \text{และ} \quad \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha^c$$

ให้ $f : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันจากเซต X ไปยังเซต Y และให้ $\mathcal{I}$ เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง สำหรับแต่ละ $\alpha \in \mathcal{I}$ ให้ $A_\alpha \subset X$ และ $B_\alpha \subset Y$ เรากำหนดให้

$$f[A_\alpha] = \{f(x) : x \in A_\alpha\} \quad \text{และ} \quad f^{-1}[B_\alpha] = \{x \in X : f(x) \in B_\alpha\}$$

โดยในกรณีที่ $A = \{x\}$ และ $B = \{y\}$ สำหรับบาง $x \in X$ และบาง $y \in Y$ เราจะเขียนแทน $f[A]$ และ $f^{-1}[B]$ ด้วย $f[x]$ และ $f^{-1}[y]$ ตามลำดับ เราสามารถแสดงได้ไม่ยากว่า

$$f\left[\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha \right] = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} f[A_\alpha]$$

แต่สำหรับอินเตอร์เซกชันนั้น เราจะได้ว่า

$$f\left[\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha \right] \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} f[A_\alpha]$$

ทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า

$$f^{-1}\left[\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} B_\alpha \right] = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} f^{-1}[B_\alpha] \quad \text{และ} \quad f^{-1}\left[\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} B_\alpha \right] = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} f^{-1}[B_\alpha]$$

แบบฝึกหัด 1.1

ให้ $f : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันจากเซต X ไปยังเซต Y และให้ $\mathcal{I}$ เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง สำหรับแต่ละ $\alpha \in \mathcal{I}$ ให้ $A_\alpha \subset X$ และ $B_\alpha \subset Y$

1. ให้ $B \subset X$ จงพิสูจน์ว่า

$$B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} (B \cap A_\alpha)$$

และ

$$B \cup \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} (B \cup A_\alpha)$$

2. จงพิสูจน์ว่า

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha^c \quad \text{และ} \quad \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha \right)^c = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha^c$$

3. ให้ $A, B \subset X$ จงพิสูจน์ว่า

   (i) ถ้า $A \not\subset B$ และ $B \not\subset A$ แล้ว $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subsetneq \mathcal{P}(A \cup B)$

   (ii) $\mathcal{P}(A - B) \subset (\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)) \cup \{\emptyset\}$

4. จงแสดงว่า

   (i) $f\left[\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha \right] = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} f[A_\alpha]$

   (ii) $f\left[\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha \right] \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} f[A_\alpha]$

   (iii) $f^{-1}\left[\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} B_\alpha \right] = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} f^{-1}[B_\alpha]$

   (iv) $f^{-1}\left[\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} B_\alpha \right] = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} f^{-1}[B_\alpha]$

   (v) $f^{-1}[B^c] = \left(f^{-1}[B]\right)^c$

5. จงยกตัวอย่างที่ฟังก์ชัน $f : X \to Y$ และเซต A_α ที่

$$f\left[\bigcap_{\alpha\in\mathcal{I}} A_\alpha\right] \neq \bigcap_{\alpha\in\mathcal{I}} f[A_\alpha]$$

6. ให้ $A \subset X$ และ $B \subset Y$

   (i) จงแสดงว่า

$$f[f^{-1}[B]] \subset B \quad \text{และ} \quad A \subset f^{-1}[f[A]]$$

   (ii) จงหาเงื่อนไขของฟังก์ชัน f ที่ทำให้ $f[f^{-1}[B]] = B$ สำหรับทุก $B \subset Y$

   (iii) จงหาเงื่อนไขของฟังก์ชัน f ที่ทำให้ $A = f^{-1}[f[A]]$ สำหรับทุก $A \subset X$

1.2 สัจพจน์การเลือก

ในหัวนี้เราจะมาทำความรู้จักกับสัจพจน์หนึ่งที่มีความสำคัญมากในวิชาทฤษฎีเซต และมีผลต่อการพิสูจน์ทฤษฎีบทอีกมากมายในสาขาต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ แต่ก็เป็นสัจพจน์ที่มีข้อโต้แย้งมากที่สุดสัจพจน์หนึ่งเช่นกัน สัจพจน์ดังกล่าวก็คือ ***สัจพจน์การเลือก (The Axiom of Choice)*** ซึ่งมีสาระดังต่อไปนี้

สัจพจน์การเลือก (The Axiom of Choice)

ให้ $\mathcal{I}$ เป็นเซตดัชนีที่ไม่ใช่เซตว่าง และสำหรับแต่ละ $\alpha \in \mathcal{I}$ ให้ S_α เป็นเซตที่มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัว แล้วจะมีฟังก์ชัน $f : \mathcal{I} \to \bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}} S_\alpha$ โดยที่ $f(\alpha) \in S_\alpha$ สำหรับแต่ละ $\alpha \in \mathcal{I}$

เราเรียกฟังก์ชัน f ในสัจพจน์นี้ว่า ***ฟังก์ชันการเลือก (choice function)*** นอกจากนี้เรายังสามารถเขียนสัจพจน์การเลือกในรูปแบบอื่นที่สมมูลกันได้ เช่น

1. ให้ $\mathcal{I}$ เป็นเซตดัชนีที่ไม่ใช่เซตว่าง และสำหรับแต่ละ $\alpha \in \mathcal{I}$ ให้ X_α เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง แล้วผลคูณคาร์ทีเซียน $\prod_{\alpha\in\mathcal{I}} X_\alpha$ ไม่เป็นเซตว่าง

2. ถ้า $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้วจะมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง g จาก B ไปยัง A โดยที่ $f \circ g(x) = x$ สำหรับทุก $x \in B$

เป็นต้น

สาระสำคัญของสัจพจน์การเลือก คือ ***มี*** (exists) การเลือกเกิดขึ้นได้ (นั่นคือ มีฟังก์ชันการเลือก) แต่ไม่ได้กล่าวว่าจะหาหรือสร้างการเลือกได้อย่างไร เพราะการเลือกบางอย่างเราอาจจะกำหนดกติกาการเลือกที่ชัดเจนได้ แต่การเลือกบางอย่างเราไม่สามารถกำหนดกติกาที่ชัดเจนได้ ซึ่ง Bertrand Russell (นักคณิตศาสตร์และนักปรัชญาชาวเวลล์ มีชีวิตอยู่ช่วง ค.ศ. 1872-1970) ได้ให้ตัวอย่างที่เป็นรูปธรรมดังนี้

สมมติว่า เรามีรองเท้าจำนวนอนันต์คู่ (พิจารณาแต่ละคู่เป็นเซต S_α) ซึ่งรองเท้าแต่ละคู่นั้นมีรองเท้าข้างซ้ายและข้างขวาที่ชัดเจน เราจึงสามารถสร้างการเลือกที่ชัดเจนได้ เช่น เลือกรองเท้าข้างซ้ายของแต่ละคู่ออกมา เป็นต้น คราวนี้เรามาพิจารณาถุงเท้าบ้าง โดยเรามีถุงเท้าอนันต์คู่และแต่ละคู่ไม่มีการกำหนดว่าเป็นถุงเท้าข้างซ้ายหรือข้างขวา (นั่นคือ ทั้งสองข้างเหมือนกันทุกประการ) ซึ่งเราย่อมสามารถหยิบถุงเท้าออกมาหนึ่งข้างจากแต่ละคู่ได้แน่นอน แต่เราไม่สามารถระบุผลของการเลือกนั้นได้ว่าเลือกอะไรมา

หากเรายอมรับสัจพจน์การเลือก เราก็จะมีฟังก์ชันการเลือกของถุงเท้าเกิดขึ้นทั้งที่เราไม่อาจระบุได้ว่าค่าของฟังก์ชันคืออะไรกันแน่ ปัญหานี้นำไปสู่ข้อโต้แย้งจากนักคณิตศาสตร์บางกลุ่มที่จะยอมรับเฉพาะสิ่งที่สามารถระบุได้ชัดเจนหรือสร้างให้เห็นประจักษ์ชัดเท่านั้น ซึ่งเราเรียกนักคณิตศาสตร์กลุ่มนี้ว่า *constructivists* โดยพวก constructivists จะแย้งว่าเมื่อเรายังไม่สามารถระบุได้ว่าเราเลือกอะไรมา เราจะยอมรับได้อย่างไรว่ามีการเลือกเกิดขึ้น อย่างไรก็ดีหลักการนี้ได้รับการยอมรับจากนักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ว่าเป็นสัจพจน์ และเมื่อใดก็ตามที่มีการอ้างใช้สัจพจน์การเลือกในการพิสูจน์การมีอยู่ (proof of existence) ของสิ่งใดก็ตาม เราจะถือว่าเป็นการพิสูจน์การมีอยู่ของสิ่งนั้นแบบ *non-constructive proof*

ต่อไปเราจะแสดงตัวอย่างทฤษฎีบทที่มีการใช้สัจพจน์การเลือกในการพิสูจน์ ซึ่งบทนิยามและสมบัติต่าง ๆ ที่ปรากฏในตัวทฤษฎีบทและบทพิสูจน์นี้ จะถูกกล่าวถึงอย่างละเอียดอีกครั้งในบทที่ 2

ทฤษฎีบท 1.2.1. *ถ้า A เป็นเซตย่อยของจำนวนจริงที่มีจำนวนจริง s เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด แล้วจะมีลำดับ $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ ที่สมาชิกทุกตัวอยู่ใน A และ $\lim_{n\to\infty} x_n = s$*

บทพิสูจน์ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $A_n = \{x \in A : s - \frac{1}{n} < x \leq s\}$ เนื่องจาก s เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A จึงได้ว่า $s - \frac{1}{n}$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ A_n นั่นคือจะต้องมีสมาชิก x บางตัวใน A ที่ $s - \frac{1}{n} < x$ ดังนั้นแต่ละ A_n ไม่เป็นเซตว่าง โดยสัจพจน์การเลือก สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ เราสามารถเลือก x_n มาหนึ่งตัวจากเซต A_n และเราแสดงได้ไม่ยากว่าลำดับ $\langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ นี้เป็นลำดับที่ลู่เข้าสู่ s ตามต้องการ $\square$

นอกจากสัจพจน์การเลือกแล้วยังมีสัจพจน์และหลักการ (principle) อื่น ๆ อีกที่มีชื่อเรียกและมีสาระแตกต่างกัน แต่สามารถแสดงได้ว่าสัจพจน์และหลักการเหล่านั้นกับสัจพจน์การเลือกสมมูลกัน ผู้ที่สนใจสามารถศึกษาต่อได้ในภาคผนวก

1.3 เซตนับได้และเซตนับไม่ได้

เรากล่าวว่า เซต A และเซต B ***สมมูลกัน*** (***equivalent***) ถ้ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก A ไป B ถ้า A เป็นเซตว่างหรือ A สมมูลกับเซต $\{1, 2, \ldots, n\}$ สำหรับบาง $n \in \mathbb{N}$ เราจะกล่าวว่า A เป็น***เซตจำกัด*** (***finite set***) และเราจะกล่าวว่า A เป็น***เซตอนันต์*** (***infinite set***) ถ้า A ไม่เป็นเซตจำกัด

จากนิยามข้างต้นเราจะได้ว่า ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว A จะสมมูลกับ B ก็ต่อเมื่อทั้งสองเซตมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน ดังนั้น ถ้า $B \subsetneq A$ และ A เป็นเซตจำกัด แล้ว A จะไม่สมมูลกับ B แต่สำหรับเซตอนันต์แล้ว A อาจจะสมมูลกับ B ทั้งที่ $B \subsetneq A$ ตัวอย่างเช่น ให้ $A = \mathbb{N}$ และ B เป็นเซตของจำนวนนับคู่ ซึ่งจะเห็นได้ชัดว่าฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(n) = 2n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก A ไป B ดังนั้น A และ B สมมูลกัน ทั้งที่ B เป็นเซตย่อยแท้ของ A

บทนิยาม 1.3.1. *ถ้า A เป็นเซตจำกัดหรือสมมูลกับ $\mathbb{N}$ เราจะกล่าวว่า A เป็น**เซตนับได้** (**countable set**) ไม่เช่นนั้นเรากล่าวว่า A เป็น**เซตนับไม่ได้** (**uncountable set**)*

ในหนังสือบางเล่มอาจกำหนดให้เซตนับได้หมายถึงเซตอนันต์นับได้เท่านั้น สังเกตว่าถ้า A เป็นเซตอนันต์นับได้ เราสามารถเขียนเซต A ในรูปการแจงนับ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ หรือเขียนในรูปของลำดับ $A = \langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ ที่สมาชิกแต่ละตัวในลำดับแตกต่างกันทั้งหมด เพราะมีฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \to A$ ที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงได้ ซึ่งเรามักจะใช้ความจริงข้อนี้ในการพิสูจน์เกี่ยวกับเซตนับได้

ทฤษฎีบท 1.3.2. *เซต A เป็นเซตนับได้ ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป $\mathbb{N}$*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด $\square$

จากทฤษฎีบท 1.3.2 เราจะได้ว่าทุกเซตย่อยของเซตนับได้เป็นเซตนับได้ นอกจากนี้เรายังได้ว่า

บทแทรก 1.3.3. *เซต A เป็นเซตนับได้ ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชันทั่วถึงจาก $\mathbb{N}$ ไป A*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 1.3.4. *ถ้า A และ B เป็นเซตนับได้ แล้ว $A \cup B$ เป็นเซตนับได้*

บทพิสูจน์ ให้ $f : \mathbb{N} \to A$ และ $g : \mathbb{N} \to B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง นิยาม $h : \mathbb{N} \to (A \cup B)$ โดยให้

$$h(n) = \begin{cases} f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ g\left(\frac{n+1}{2}\right) & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

ซึ่งจะได้ว่า h เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ดังนั้นโดยบทแทรก 1.3.3 จะได้ว่า $A \cup B$ เป็นเซตนับได้ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 1.3.5. *ให้ A เป็นเซตนับได้ และให้ B เป็นเซตของลำดับจำกัดที่มีสมาชิกอยู่ใน A แล้วจะได้ว่า B เป็นเซตนับได้*

บทพิสูจน์ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ $A = \mathbb{N}$ เราต้องการสร้างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไป $\mathbb{N}$ ให้ $\langle p_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมด

สำหรับแต่ละลำดับจำกัด $\langle n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k \rangle \in B$ เรานิยามฟังก์ชัน $f : B \to \mathbb{N}$ โดยให้

$$f(\langle n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k \rangle) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \cdots p_k^{n_k}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไป $\mathbb{N}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.3.2 จะได้ว่า B เป็นเซตนับได้ □

บทแทรก 1.3.6. *ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตนับได้เป็นเซตนับได้*

บทพิสูจน์ ให้ A และ B เป็นเซตนับได้ ดังนั้น $A \cup B$ เป็นเซตนับได้ เราสามารถพิจารณาว่า

$$(A \cup B) \times (A \cup B) = \{(x, y) : x, y \in A \cup B\}$$

เป็นเซตย่อยของเซตของลำดับจำกัดที่มีสมาชิกอยู่ใน $A \cup B$ ซึ่งเป็นเซตนับได้ เนื่องจากเซตย่อยของเซตนับได้เป็นเซตนับได้ จึงได้ว่า $(A \cup B) \times (A \cup B)$ เป็นเซตนับได้ และเนื่องจาก

$$A \times B \subset (A \cup B) \times (A \cup B)$$

จึงได้ว่า $A \times B$ เป็นเซตนับได้ตามต้องการ □

บทแทรก 1.3.7. *เซตของจำนวนตรรกยะเป็นเซตนับได้*

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์นับได้ จึงมีฟังก์หนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง f จาก $\mathbb{N}$ ไป $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ให้ $\mathbb{Q}^+$ เป็นเซตของจำนวนตรรกยะบวก และให้ $g : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ นิยามโดย

$$g(m,n) = \frac{m}{n}$$

ซึ่งเห็นได้ชัดว่าเป็นฟังก์ชันทั่วถึง ดังนั้น $g\circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ เป็นฟังก์ทั่วถึง และโดยบทแทรก 1.3.3 จะได้ว่า $\mathbb{Q}^+$ เป็นเซตนับได้ ในทำนองเดียวกันเราจะแสดงได้ว่า เซตของจำนวนตรรกยะลบ $\mathbb{Q}^-$ เป็นเซตนับได้ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.3.4 จะได้ว่า $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ เป็นเซตนับได้ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 1.3.8. *ยูเนียนนับได้ของเซตนับได้เป็นเซตนับได้*

บทพิสูจน์ ให้ $\langle A_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับของเซตนับได้โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ A_n เป็นเซตอนันต์สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $A_m \cap A_n = \emptyset$ เมื่อ $m \neq n$ เราจะพิสูจน์ว่า $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ เป็นเซตนับได้ด้วยการแสดงว่า เราสามารถจัดเรียงสมาชิกใน A ให้เป็นลำดับได้

เนื่องจากแต่ละ A_n เป็นเซตนับได้ จึงให้ $A_n = \langle a_{n,k}\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ ซึ่งจะได้ว่า

$$A = \{a_{n,k} : (n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$$

ให้ $f : A \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ นิยามโดย $f(a_{n,k}) = (n,k)$ เนื่องจากสมาชิกแต่ละคู่ในลำดับ $\langle A_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ ไม่มีส่วนร่วมกัน จึงเห็นได้ว่า f เป็นฟังก์ชันนิยามดีแล้ว (well-defined) และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วย ดังนั้นโดยบทแทรก 1.3.6 จะได้ว่า A เป็นเซตนับได้ตามต้องการ □

จากทฤษฎีบท 1.3.5 จะได้ว่าเซตของลำดับจำกัดของเซตนับได้เป็นเซตนับได้ คำถามที่น่าสนใจที่ตามมาก็คือ เซตของลำดับอนันต์ของเซตนับได้ยังคงเป็นเซตนับได้อยู่หรือไม่ โดยที่คำตอบของคำถามนี้เป็นผลของทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3.9. *ถ้า A เป็นเซตที่มีสมาชิกอย่างน้อยสองตัว แล้วเซตของลำดับอนันต์ที่มีสมาชิกอยู่ใน A เป็นเซตนับไม่ได้*

บทพิสูจน์ โดยไม่เสียนัยทั่วไปเราเพียงพอที่จะพิสูจน์กรณี $A = \{0,1\}$ ให้ B เซตของลำดับอนันต์ที่มีสมาชิกอยู่ใน A ถ้า B เป็นเซตนับได้ เราจะสามารถเขียน B ในรูปของลำดับ $\langle A_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ โดยที่สมาชิกในลำดับแตกต่างกันทั้งหมดได้ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $A_n = \langle a_{n,k}\rangle_{k\in\mathbb{N}}$ นิยาม

ลำดับ $b = \langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ โดยให้

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } a_{n,n} = 0 \\ 0 & \text{ถ้า } a_{n,n} = 1 \end{cases}$$

เห็นได้ชัดว่า $b \in B$ แต่ไม่มีจำนวนนับ n ที่ $b = A_n$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น B เป็นเซตนับไม่ได้ $\square$

ผลจากทฤษฎีบท 1.3.9 จะได้ว่า $\mathbb{R}$ เป็นเซตนับไม่ได้ ยิ่งไปกว่านั้นทุกช่วงที่ไม่ใช่เซตโทนเป็นเซตนับไม่ได้ เราจะปิดท้ายหัวข้อนี้ด้วยทฤษฎีบทที่ทำให้เราสามารถพิสูจน์การสมมูลกันของเซตได้ง่ายขึ้น เพราะแทนที่จะต้องหาฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง เราเพียงพอที่จะหาฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างสองเซตเพื่อแสดงการสมมูลกันของเซตคู่นั้น ดังจะกล่าวในรายละเอียดในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3.10 (Cantor-Bernstein-Schroeder Theorem). *ถ้ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปยัง B และมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไปยัง A แล้วจะมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก A ไปบน B*

บทพิสูจน์ ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to A$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ให้ $C_1 = A - g[B]$ และสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $C_{n+1} = g[f[C_n]]$ ให้ $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$

ต่อไปจะนิยามฟังก์ชัน $h : A \to B$ โดยให้

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{ถ้า } a \in C \\ g^{-1}(a) & \text{ถ้า } a \notin C \end{cases}$$

ก่อนอื่นเราต้องตรวจสอบว่าฟังก์ชันนี้นิยามดีแล้ว (well-defined) ถ้า $a \notin C$ จะได้ว่า $a \notin C_1$ ดังนั้น $a \in g[B]$ เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงได้ว่า มี $b \in B$ เพียงหนึ่งเดียวที่ $a = g(b)$ นั่นคือ $g^{-1}(a)$ หาค่าได้เพียงหนึ่งเดียว ซึ่งแสดงว่า h นิยามดีแล้วบน A

ต่อไปจะแสดงว่า h เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ให้ $y \in B$ ถ้า $y \in f[C]$ จะได้ $y \in h[A]$ ต่อไปสมมติว่า $y \notin f[C]$ และให้ $x = g(y)$ ถ้าเราแสดงได้ว่า $x \notin C$ แล้วเราจะได้ว่า

$$h(x) = g^{-1}(x) = y$$

และเมื่อสรุปรวมกับกรณีแรก จะได้ว่า $h[A] = B$ ดังนั้น h เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ดังนั้นเราจะต้อง

แสดงว่า $x \notin C$ เนื่องจาก $x = g(y) \in g[B]$ จึงได้ว่า $x \notin C_1$ ให้ n เป็นจำนวนนับแรกที่ $x \in C_n$ เนื่องจาก

$$x \in C_n = g[f[C_{n-1}]] \Leftrightarrow y = g^{-1}(x) \in f[C_{n-1}] \subset f[C]$$

ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมติฐานที่ว่า $y \notin f[C]$ ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า ถ้า $y \notin f[C]$ แล้ว $x \notin C$ ตามต้องการ

สุดท้ายนี้จะแสดงว่า h เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เนื่องจาก f และ g^{-1} เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จึงเพียงพอที่จะแสดงว่าไม่มี $x \in C$ และ $y \in A - C$ ที่ทำให้ $f(x) = g^{-1}(y)$ สมมติว่ามี $x \in C$ และ $y \in A - C$ ที่ทำให้ $f(x) = g^{-1}(y)$ ซึ่งจะได้ว่า

$$g(f(x)) = g\left(g^{-1}(y)\right) = y \in A - C$$

จาก $x \in C$ จะได้ว่า $x \in C_n$ สำหรับบาง n ดังนั้น $g(f(x)) \in C_{n+1} \subset C$ ซึ่งขัดแย้งกับ $g(f(x)) \in A - C$ จึงได้ว่า h เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งตามต้องการ □

เราสามารถแสดงว่า $[0, 1]$ และ $\mathbb{R}$ สมมูลกันได้อย่างง่ายดายด้วยการใช้ทฤษฎีบท 1.3.10 ดังนี้ ก่อนอื่นจะเห็นได้ชัดว่ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $[0, 1]$ ไปยัง $\mathbb{R}$ มากมาย เช่น ฟังก์ชันเอกลักษณ์ เป็นต้น เราจึงเพียงพอที่จะหาฟังก์ชัน $g : \mathbb{R} \to [0, 1]$ ที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ให้

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-x)} & \text{เมื่อ } \ x \in (-\infty, 0] \\ \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} & \text{เมื่อ } \ x \in (0, \infty) \end{cases}$$

ซึ่งจะได้ว่า g ที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ $g[(-\infty, 0]] = (0, 0.5]$ และ $g[(0, \infty)] = (0.5, 1)$ โดยทฤษฎีบท 1.3.10 จะได้ว่า $[0, 1]$ และ $\mathbb{R}$ สมมูลกัน ตามต้องการ

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.3.2 และ บทแทรก 1.3.3
2. จงใช้ทฤษฎีบท 1.3.9 ในการแสดงว่า ช่วง (a, b) เป็นเซตนับไม่ได้เมื่อ $a < b$
3. ให้ X เป็นเซต จงแสดงว่า X และเซตกำลัง $P(X)$ ไม่สมมูลกัน
   (คำแนะนำ: ให้ $f : X \to P(X)$ และให้ $E = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ แล้วแสดงว่า $E \notin f[X]$)

1.4 พีชคณิตของเซต

บทนิยาม 1.4.1. *ให้ X เป็นเซต และ $\mathcal{A} \subset P(X)$ เราจะกล่าวว่า $\mathcal{A}$ เป็น**พีชคณิต** (**algebra**) ของเซต X ถ้า $\mathcal{A}$ มีสมบัติดังต่อไปนี้*

1. *X และ $\emptyset$ เป็นสมาชิกของ $\mathcal{A}$*
2. *ถ้า $A \in \mathcal{A}$ แล้ว $A^c \in \mathcal{A}$*
3. *ถ้า $A, B \in \mathcal{A}$ แล้ว $A \cup B \in \mathcal{A}$*

จากบทนิยามเราจะได้ว่า

1) ถ้า $\mathcal{A}$ ไม่เป็นเซตว่าง แล้วเราสามารถตัดเงื่อนไขข้อ (1) ออกได้ เพราะถ้ามี $A \in \mathcal{A}$ แล้ว จากเงื่อนไขข้อ (2) และข้อ (3) เราจะได้ว่า $X = A \cup A^c \in \mathcal{A}$ และ $\emptyset = X^c \in \mathcal{A}$

2) เนื่องจาก $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ จึงได้ว่า ถ้า $\mathcal{A}$ เป็นพีชคณิตของเซต X และ $A, B \in \mathcal{A}$ แล้ว $A \cap B \in \mathcal{A}$

3) จากเงื่อนไขข้อ (3) และหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราจะได้ว่า ถ้า $\mathcal{A}$ เป็นพีชคณิตของเซต X และ $A_k \in \mathcal{A}$ สำหรับแต่ละ $k = 1, 2, \ldots, n$ แล้ว $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ กล่าวคือ ถ้า $\mathcal{A}$ เป็นพีชคณิตของเซต X แล้ว $\mathcal{A}$ มีสมบัติปิดภายใต้ยูเนียนจำกัด

4) ทำนองเดียวกันกับข้อ 3) เราจะได้ว่า ถ้า $\mathcal{A}$ เป็นพีชคณิตของเซต X แล้ว $\mathcal{A}$ มีสมบัติปิดภายใต้อินเตอร์เซกชันจำกัด

ตัวอย่างของพีชคณิตของเซต เช่น 1) เซตกำลังของเซต X ใด ๆ เป็นพีชคณิตของเซต X นั้น ๆ เสมอ 2) ถ้า $X = \mathbb{R}$ และ $\mathcal{A} = \Big\{ A \subset \mathbb{R} : \ A$ เป็นเซตนับได้ หรือ A^c เป็นเซตนับได้$\Big\}$ แล้วจะได้ว่า $\mathcal{A}$ เป็นพีชคณิตของ $\mathbb{R}$ เป็นต้น

บทนิยาม 1.4.2. *เราเรียกพีชคณิต $\mathcal{A}$ ของเซต X ว่า **พีชคณิตซิกมา** ($\sigma-$**algebra**) ของเซต X ถ้า $\mathcal{A}$ มีสมบัติปิดภายใต้ยูเนียนนับได้ กล่าวคือ ถ้า $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ แล้ว $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$*

โดยกฎของเดอมอร์แกนจะได้ว่า ถ้า $\mathcal{A}$ เป็นพีชคณิตซิกมาของเซต X แล้ว $\mathcal{A}$ จะมีสมบัติปิดภายใต้อินเตอร์เซกชันนับได้เช่นกัน

บทนิยาม 1.4.3. *ให้ X เป็นเซต และ $\mathcal{C} \subset P(X)$ เรากล่าวว่า พีชคณิต (และพีชคณิตซิกมา) $\mathcal{A}$ ของเซต X **ก่อกำเนิดโดย** $\mathcal{C}$ (**generated by** $\mathcal{C}$) ถ้า $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ สำหรับทุกพีชคณิต (และพีชคณิตซิกมา ตามลำดับ) $\mathcal{B}$ ของเซต X ที่ $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ กล่าวคือ $\mathcal{A}$ เป็นพีชคณิต (และพีชคณิตซิกมา ตามลำดับ) ของเซต X ที่เล็กสุดที่บรรจุ $\mathcal{C}$*

เราสามารถแสดงได้ไม่ยากว่า อินเตอร์เซกชันของพีชคณิตและอินเตอร์เซกชันพีชคณิตซิกมาของเซต X ยังคงเป็นพีชคณิตและพีชคณิตซิกมาของเซต X ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 1.4.4. *ให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นเซต แล้วจะมีพีชคณิตและพีชคณิตซิกมาที่ก่อกำเนิดโดย $\mathcal{C}$*

บทพิสูจน์ ในที่นี้จะขอพิสูจน์เฉพาะกรณีพีชคณิตซิกมาเท่านั้น เพราะกรณีพีชคณิตสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ให้ $X = \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A$ และให้ $\mathcal{F}$ เป็นเซตของพีชคณิตซิกมาของเซต X ทั้งหมดที่มี $\mathcal{C}$ เป็นเซตย่อย สังเกตว่า $\mathcal{F}$ ไม่เป็นเซตว่าง เพราะว่า $P(X) \in \mathcal{F}$ ให้ $\mathcal{A} = \bigcap_{B\in\mathcal{F}} B$ ซึ่งจะได้ว่า $\mathcal{A}$ เป็นพีชคณิตซิกมาของเซต X

ต่อไปจะแสดงว่า $\mathcal{A}$ ก่อกำเนิดโดย $\mathcal{C}$ เนื่องจาก $\mathcal{C} \subset B$ สำหรับทุก $B \in \mathcal{F}$ จึงได้ว่า $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ ดังนั้น $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ และจาก $\mathcal{A} \subset B$ สำหรับทุก $B \in \mathcal{F}$ จึงได้ว่า $\mathcal{A}$ เป็นพีชคณิตซิกมาที่เล็กสุดที่มี $\mathcal{C}$ เป็นเซตย่อย ดังนั้น $\mathcal{A}$ ก่อกำเนิดโดย $\mathcal{C}$ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 1.4.5. *ให้ $\mathcal{A}$ เป็นพีชคณิตของเซต X และ $A_n \in \mathcal{A}$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ แล้วจะมี $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}$ ซึ่งสมาชิกแต่ละคู่ไม่ส่วนร่วมกัน และ $B_n \subset A_n$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$*

บทพิสูจน์ ให้ $B_1 = A_1$ และสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $B_{n+1} = A_{n+1} - \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $B_n \subset A_n$ และ $B_n \in \mathcal{A}$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ นอกจากนั้น ถ้า $m < n$ แล้ว

$$\begin{aligned} B_m \cap B_n &= B_m \cap \left(A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k \right) \\ &= B_m \cap A_n \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} B_k^c \right) = \emptyset \end{aligned}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ เนื่องจาก $B_n \subset A_n$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ จึงได้ว่า $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ให้ $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ และ N เป็นจำนวนนับค่าน้อยสุดที่ $x \in A_N$ แล้วจะได้ว่า

$$x \in \left(A_N - \bigcup_{n=1}^{N-1} A_n \right) \subset B_N$$

ซึ่งแสดงว่า $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ดังนั้น $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 1.4

1. ให้ $\mathcal{A} = \Big\{A \subset \mathbb{R} : \; A$ เป็นเซตนับได้ หรือ A^c เป็นเซตนับได้$\Big\}$ จงแสดงว่า $\mathcal{A}$ เป็นพีชคณิตของ $\mathbb{R}$

2. จงแสดงว่า อินเตอร์เซกชันใด ๆ ของพีชคณิตและอินเตอร์เซกชันใด ๆ พีชคณิตซิกมาของเซต X ยังคงเป็นพีชคณิตและพีชคณิตซิกมาของ X ตามลำดับ

3. ให้ $\mathcal{A}$ เป็นพีชคณิตของเซต X และให้ Y เป็นเซตย่อยของ X ที่ไม่ใช่เซตว่าง จงแสดงว่าเซต $\mathcal{B} = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ เป็นพีชคณิตของเซต Y

บทที่ 2

ระบบจำนวนจริง

ในบทนี้เราจะทบทวนเรื่องสมบัติของจำนวนจริงและฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนจริงที่จำเป็นต่อการศึกษาในบทต่อ ๆ ไป โดยถือว่าผู้อ่านได้คุ้นเคยกับสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ เหล่านี้มาพอสมควรแล้ว นอกจากจำนวนจริงแล้วบางครั้งเราจะกล่าวถึง $+\infty$ และ $-\infty$ ซึ่งไม่ใช่จำนวนจริง แต่เพื่อความสะดวกในการศึกษาในกรณีทั่ว ๆ ไป เราจะกำหนดความหมายของการบวก "$+$" และการคูณ "$\cdot$" ของ $\pm\infty$ กับจำนวนจริง x ดังนี้

$$\begin{aligned}
&\infty + \infty = \infty && -\infty - \infty = -\infty \\
&\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty && -\infty \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \\
&x + \infty = \infty && x - \infty = -\infty \\
&x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \ \text{ เมื่อ } x > 0 && x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \ \text{ เมื่อ } x < 0
\end{aligned}$$

โดยเราให้ $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ สังเกตว่าเราไม่นิยามความหมายของ $\infty - \infty$ นอกจากนี้เพื่อความสะดวกเราจะกำหนดให้ $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ ซึ่งจะพบเห็นได้ในบทที่ 5 เรื่องปริพันธ์

2.1 สมบัติความบริบูรณ์

บทนิยาม 2.1.1. *ให้ $S \subset \mathbb{R}$ ไม่เป็นเซตว่าง และให้ $\alpha \in \mathbb{R}$ จะเรียก α ว่า*

1. ***ขอบเขตบน** (**upper bound**) ของ S ถ้า $x \leq \alpha$ สำหรับทุก $x \in S$*

2. ***ขอบเขตล่าง** (**lower bound**) ของ S ถ้า $\alpha \leq x$ สำหรับทุก $x \in S$*

3. ***ขอบเขตบนน้อยสุด*** (*least upper bound*) *ของ* S *ถ้า* α *เป็นขอบเขตบนของ* S *และถ้า* y *เป็นขอบเขตบนของ* S *แล้ว* $\alpha \leq y$ *โดยจะเขียนแทนขอบเขตบนน้อยสุดของ* S *ด้วย* $\sup(S)$ *หรือ* $\sup_{x\in S} x$

4. ***ขอบเขตล่างมากสุด*** (*greatest lower bound*) *ของ* S *ถ้า* α *เป็นขอบเขตล่างของ* S *และถ้า* y *เป็นขอบเขตล่างของ* S *แล้ว* $y \leq \alpha$ *โดยจะเขียนแทนขอบเขตล่างมากสุดของ* S *ด้วย* $\inf(S)$ *หรือ* $\inf_{x\in S} x$

นอกจากนี้เราจะกำหนดให้ $\sup(S) = \infty$ *ถ้า* S *ไม่มีขอบเขตบน และให้* $\inf(S) = -\infty$ *ถ้า* S *ไม่มีขอบเขตล่าง และในกรณีที่* S *เป็นเซตว่าง ถ้าเราจะกำหนดให้* $\sup(\emptyset) = -\infty$ *และ* $\inf(\emptyset) = \infty$

สัจพจน์ความบริบูรณ์ (The Completeness Axiom)

ให้ $S \subset \mathbb{R}$ ไม่เป็นเซตว่าง ถ้า S มีขอบเขตบน แล้ว S จะมีขอบเขตบนน้อยสุด และถ้า S มีขอบเขตล่าง แล้ว S จะมีขอบเขตล่างมากสุด

ผลจากสัจพจน์ความบริบูรณ์และบทนิยาม 2.1.1 เราจะได้ว่าทุกเซตย่อยของจำนวนจริงมีขอบเขตบนน้อยสุดและขอบเขตล่างมากสุดใน $\mathbb{R}$ เสมอ

ทฤษฎีบท 2.1.2. *ให้* $S \subset \mathbb{R}$ *จะได้ว่า* $\sup S$ *และ* $\inf S$ *จะมีเพียงหนึ่งเดียว กล่าวคือ ถ้า* m_1 *และ* m_2 *เป็นขอบเขตบนน้อยสุด หรือขอบเขตล่างมากสุดของ* S *แล้ว* $m_1 = m_2$

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด $\square$

หลักการจัดอันดับดี (The Well-Ordering Principle

ถ้า $S \subset \mathbb{N}$ ที่ไม่ใช่เซตว่าง แล้ว S มีสมาชิกค่าน้อยสุด

บทพิสูจน์ ในที่นี้จะแสดงการพิสูจน์โดยอาศัยสัจพจน์ความบริบูรณ์ เนื่องจาก S มี 0 เป็นขอบเขตล่าง โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า S มีขอบเขตล่างมากสุด ให้ $m = \inf(S)$ เราจะแสดงว่า $m \in S$ โดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง สมมติว่า $m \notin S$ เนื่องจาก m เป็นขอบเขตล่างมากสุด จึงได้ว่า $m+1$ ไม่เป็นขอบเขตล่างของ S จึงมี $x \in S$ ซึ่ง $m < x < m+1$ เนื่องจาก m เป็นขอบเขตล่างมากสุดและ $x > m$ จึงได้ว่า x ไม่เป็นขอบเขตล่างของ S ดังนั้นจึงมี $y \in S$ ที่ $y < x$ ทำให้ได้ว่า $m < y < x < m+1$ และ $0 < x - y < (m+1) - m = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะว่า $x - y$ เป็นจำนวนเต็ม จึงเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $m \in S$ ตามต้องการ $\square$

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทซึ่งมีชื่อเรียกที่รู้จักกันทั่วไปว่า “สัจพจน์ของอาร์คิมีดิส” แต่เนื่องจากเป็นความจริงที่สามารถพิสูจน์ได้โดยอาศัยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จึงเป็นเหตุให้อาจมองได้ว่าเป็นทฤษฎีบทมากกว่าเป็นสัจพจน์ แต่ด้วยเหตุผลทางประวัติศาสตร์ เรายังคงการเรียกชื่อไว้ดังเดิม

เกณฑ์การลู่เข้าโคชี (The Cauchy convergence criterion)

สำหรับแต่ละจำนวนจริง x จะมีจำนวนเต็ม n ที่ $x < n$

บทพิสูจน์ ถ้า $x \leq 0$ สามารถเลือกให้ $n = 1$ ต่อไปสมมติว่า $x > 0$ ให้ S เป็นเซตของจำนวนเต็มที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x ซึ่งจะเห็นว่า S ไม่ใช่เซตว่างเพราะ $0 \in S$ และมี x เป็นขอบเขตบน โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์จะได้ว่า มีจำนวนจริง y ที่เป็นขอบเขตบนน้อยสุดของ S ดังนั้น $y-1$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ S จึงมี $k \in S$ ที่มีค่ามากกว่า $y-1$ และจะได้ว่า $k+1 > y$ ดังนั้น $k+1$ ไม่เป็นสมาชิกใน S ไม่เช่นนั้น y จะไม่สามารถเป็นขอบเขตบนน้อยสุดของ S ได้ จึงได้ว่า $k+1$ เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า x ตามต้องการ $\square$

ผลจากสัจพจน์ของอาร์คิมีดิสทำให้เราสามารถแสดงได้ว่า มีจำนวนตรรกยะอยู่หนาแน่นใน $\mathbb{R}$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.3. *สำหรับทุกคู่ของจำนวนจริง a และ b ที่ $a < b$ จะมีจำนวนตรรกยะ x ที่ $a < x < b$*

บทพิสูจน์ เราแยกพิจารณาเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณี $1: a < 0 < b$ จะได้ว่า $x = 0$ มีสมบัติตามต้องการ

กรณี $2: 0 \leq a < b$ โดยสัจพจน์ของอาร์คิมีดิส จะมีจำนวนนับ n ที่ $n > \frac{1}{b-a}$

ให้ $S = \{k \in \mathbb{N} : k > na\}$ ซึ่งโดยสัจพจน์ของอาร์คิมีดิส จะได้ว่า $S \neq \emptyset$ ให้ m เป็นสมาชิกค่าน้อยสุดของ S ซึ่งจะทำให้ได้ว่า $\frac{m-1}{n} \leq a < \frac{m}{n}$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\frac{m}{n} < b$ ด้วยการหาข้อขัดแย้ง สมมติว่า $\frac{m}{n} \geq b$ ซึ่งจะได้ว่า

$$b - a \leq \frac{m}{n} - a \leq \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} = \frac{1}{n}$$

ซึ่งขัดแย้งกับสมบัติของ n ที่ว่า $n > \frac{1}{b-a}$ ดังนั้น $\frac{m}{n} < b$ และ $x = \frac{m}{n}$ เป็นจำนวนตรรกยะที่มีสมบัติตามต้องการ

กรณี $3: a < b \leq 0$ จากกรณี 2 ข้างต้นจะได้ว่า มีจำนวนตรรกยะ $-x$ ที่ $-b < -x < -a$ ดังนั้น x จะเป็นจำนวนตรรกยะที่ $a < x < b$ ตามต้องการ $\square$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.1.2

2. จงหา $\sup(A)$ และ $\inf(A)$ พร้อมทั้งแสดงการพิสูจน์ เมื่อ

   (i) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

   (ii) $A = \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

   (iii) $A = (a, b)$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ และ $a < b$

   (iv) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$

3. ให้ $A \subset B \subset \mathbb{R}$ โดยที่ A ไม่ใช่เซตว่าง จงแสดงว่า

$$\sup(A) \leq \sup(B) \quad \text{และ} \quad \inf(A) \geq \inf(B)$$

4. ให้ $S \subset \mathbb{R}$ ไม่เป็นเซตว่าง นิยามให้ $-S = \{-x : x \in S\}$ จงเสดงว่า

$$\sup(-S) = -\inf(S) \quad \text{และ} \quad \inf(-S) = -\sup(S)$$

5. ให้ $A, B \subset \mathbb{R}$ ไม่เป็นเซตว่าง นิยามให้ $A + B = \{a + b : a \in A$ และ $b \in B\}$ และ $A - B = \{a - b : a \in A$ และ $b \in B\}$ จงเสดงว่า

   (i) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

   (ii) $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$

   (iii) $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$

   (iv) $\inf(A - B) = \inf(A) - \sup(B)$

6. ให้ $A, B \subset \mathbb{R}$ ไม่เป็นเซตว่าง จงแสดงว่า ถ้า $a < b$ สำหรับทุก $a \in A$ และสำหรับทุก $b \in B$ แล้ว $\sup(A) \leq \inf(B)$

7. ให้ $c \in \mathbb{R}$ และ $A \subset \mathbb{R}$ ที่ไม่ใช่เซตว่าง นิยามให้ ห้ $cA = \{cx : x \in A\}$ จงแสดงว่า

   (i) ถ้า $c > 0$ แล้ว $\sup(cA) = c\sup(A)$ และ $\inf(cA) = c\inf(A)$

   (ii) ถ้า $c < 0$ แล้ว $\sup(cA) = c\inf(A)$ และ $\inf(cA) = c\sup(A)$

8. ให้ $A, B \subset \mathbb{R}$ ไม่เป็นเซตว่าง นิยามให้ $AB = \{ab : a \in A \text{ และ } b \in B\}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ ถ้าจริงให้แสดงการพิสูจน์ แต่ถ้าเท็จให้หาตัวอย่างค้านพร้อมทั้งหาเงื่อนไขเพิ่มเติมที่ทำให้ข้อความเป็นจริง

   (i) $\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)$

   (ii) $\inf(AB) = \inf(A)\inf(B)$

2.2 ลำดับและอนุกรมของจำนวนจริง

ในหัวข้อนี้เมื่อเรากล่าวถึงลำดับ $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ เราจะหมายถึงลำดับของจำนวนจริงเท่านั้น และจะเขียนอย่างย่อแทนด้วย $\langle x_n \rangle$

บทนิยาม 2.2.1. *เราจะเรียก $\langle x_n \rangle$ ว่า* ***ลำดับมีขอบเขต*** *(**bounded sequence**) ถ้ามีจำนวนจริงบวก M ที่ $|x_n| \le M$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และถ้ามีจำนวนจริง L ที่แต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้*

$$|x_n - L| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n \ge N$ แล้วเราจะเรียก $\langle x_n \rangle$ ว่า ***ลำดับลู่เข้า*** *(**convergent sequence**) และเรียก L ว่า* ***ลิมิตของลำดับ*** *$\langle x_n \rangle$ (**limit of a sequence** $\langle x_n \rangle$) โดยจะใช้สัญลักษณ์*

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim x_n \quad \text{หรือ} \quad x_n \to L$$

จากบทนิยามเราสามารถแสดงได้ไม่ยากว่า ทุกลำดับลู่เข้าเป็นลำดับมีขอบเขต และลิมิตของลำดับจะมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 2.2.2. *ให้ $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับลู่เข้า จะได้ว่า*

1. *$\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับมีขอบเขต*

2. *ถ้า L_1 และ L_2 เป็นลิมิตของ $\langle x_n \rangle$ แล้ว $L_1 = L_2$*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

บทนิยาม 2.2.3. *เราจะเรียก $\langle x_n \rangle$ ว่า* ***ลำดับเพิ่ม*** *(**increasing sequence**) ถ้า $x_n \le x_{n+1}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และจะเรียกว่า* ***ลำดับลด*** *(**decreasing sequence**) ถ้า $x_n \ge x_{n+1}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และจะเรียกลำดับทั้งสองประเภทนี้แบบไม่เจาะจงว่า* ***ลำดับทางเดียว*** *(**monotone sequence**)*

โดยใช้ผลจากสัจพจน์ความบริบูรณ์ เราสามารถพิสูจน์ได้ไม่ยากว่า ลำดับทางเดียวที่มีขอบเขตเป็นลำดับลู่เข้าเสมอ

ทฤษฎีบท 2.2.4. *ให้ $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับทางเดียวมีขอบเขต จะได้ว่า $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับลู่เข้า โดยที่*

1. *ถ้า $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับเพิ่ม แล้ว $\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$*

2. *ถ้า $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับลด แล้ว $\lim x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$*

บทพิสูจน์ (1) ให้ $L = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงเพราะ $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับมีขอบเขต ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก L เป็นขอบเขตบนน้อยสุดของเซต $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ จึงได้ว่า $x_n \leq L$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และจะมี $m \in \mathbb{N}$ ที่

$$L - \varepsilon < x_m \leq L$$

จาก $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับเพิ่ม จะได้ว่า $x_n \geq x_m$ สำหรับทุก $n \geq m$ ทำให้ได้ว่า

$$|x_n - L| \leq |x_m - L| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n \geq m$ ซึ่งเป็นการแสดงว่า $\lim x_n = L$ ตามต้องการ

การพิสูจน์ (2) ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

บทนิยาม 2.2.5. *เราจะเรียก $\langle x_n \rangle$ ว่า* ***ลำดับลู่ออกสู่บวกอนันต์*** (***diverge to positive infinity***) *ถ้าสำหรับแต่ละ $M \in \mathbb{R}$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $x_n > M$ สำหรับทุก $n \geq N$ และใช้สัญลักษณ์*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = \infty \quad \text{หรือ} \quad x_n \to \infty$$

และจะเรียก $\langle x_n \rangle$ ว่า ***ลำดับลู่ออกสู่ลบอนันต์*** (***diverge to negative infinity***) *ถ้าสำหรับแต่ละ $M \in \mathbb{R}$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $x_n < M$ สำหรับทุก $n \geq N$ และใช้สัญลักษณ์*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = -\infty \quad \text{หรือ} \quad x_n \to -\infty$$

เพื่อความสะดวกเราจะเขียนแทน $\sup\{x_n : n \geq N\}$ และ $\inf\{x_n : n \geq N\}$ ด้วย $\sup\limits_{n\geq N} x_n$ และ $\inf\limits_{n\geq N} x_n$ ตามลำดับ

บทนิยาม 2.2.6. *ลิมิตซูพีเรียร์* (***suprerior limit***) *ของ* $\langle x_n\rangle$ *ซึ่งเขียนแทนด้วย* $\limsup x_n$ *หรือ* $\overline{\lim} x_n$ *นิยามโดย*

$$\limsup x_n = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\geq N} x_n$$

*และ **ลิมิตอินฟีเรียร์*** (***inferior limit***) *ของ* $\langle x_n\rangle$ *ซึ่งเขียนแทนด้วย* $\liminf x_n$ *หรือ* $\underline{\lim} x_n$ *นิยามโดย*

$$\liminf x_n = \lim_{N\to\infty} \inf_{n\geq N} x_n$$

สังเกตว่า $\limsup x_n$ และ $\liminf x_n$ หาค่าได้เสมอใน $\overline{\mathbb{R}}$ เพราะว่า $\langle \sup_{n\geq N} x_n\rangle_{N=1}^{\infty}$ และ $\langle \inf_{n\geq N} x_n\rangle_{N=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลดและลำดับเพิ่มตามลำดับ โดยทฤษฎีบท 2.2.4 เราจะได้ว่า

$$\limsup x_n = \inf_{N\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq N} x_n \quad \text{และ} \quad \liminf x_n = \sup_{N\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq N} x_n$$

โดยที่ $\limsup x_n$ และ $\liminf x_n$ จะเป็นจำนวนจริงถ้า $\langle x_n\rangle$ เป็นลำดับมีขอบเขต

จากบทนิยามของลิมิตซูพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์ เราสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทที่สามารถช่วยในการตรวจสอบลิมิตทั้งสองประเภทได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2.7. *ให้* $\langle x_n\rangle$ *เป็นลำดับ และ* $L\in\mathbb{R}$ *จะได้ว่า*

1. $\limsup x_n = L$ *ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ* $\varepsilon > 0$ *จะมี* $N\in\mathbb{N}$ *ที่ทำให้* $x_n < L+\varepsilon$ *สำหรับทุก* $n > N$ *และมีจำนวนนับ* n *อนันต์จำนวนที่* $x_n > L-\varepsilon$

2. $\liminf x_n = L$ *ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ* $\varepsilon > 0$ *จะมี* $N\in\mathbb{N}$ *ที่ทำให้* $x_n > L-\varepsilon$ *สำหรับทุก* $n > N$ *และมีจำนวนนับ* n *อนันต์จำนวนที่* $x_n < L+\varepsilon$

3. $\limsup x_n = \infty$ *ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ* $M > 0$ *จะมีจำนวนนับ* n *อนันต์จำนวนที่* $x_n > M$ *และ* $\limsup x_n = -\infty$ *ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ* $M > 0$ *จะมีจำนวนนับ* n *จำกัดจำนวนที่* $x_n > -M$

4. $\liminf x_n = \infty$ *ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ* $M > 0$ *และมีจำนวนนับ* n *จำกัดจำนวนที่* $x_n < M$ *และ* $\liminf x_n = -\infty$ *ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ* $M > 0$ *และมีจำนวนนับ* n *อนันต์จำนวนที่* $x_n < -M$

ทฤษฎีบท 2.2.8. *ให้* $\langle x_n\rangle$ *เป็นลำดับ จะได้ว่า*

1. $\liminf x_n \leq \limsup x_n$

2. $\limsup -x_n = -\liminf x_n$

3. $\lim x_n$ *หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ* $\langle x_n \rangle$ *เป็นลำดับมีขอบเขต และ* $\liminf x_n = \limsup x_n$

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 2.2.9. *ให้* $\langle x_n \rangle$ *และ* $\langle y_n \rangle$ *เป็นลำดับมีขอบเขต จะได้ว่า*

$$\begin{aligned}\liminf x_n + \liminf y_n \le \liminf(x_n + y_n) &\le \limsup x_n + \liminf y_n \\ &\le \limsup(x_n + y_n) \le \limsup x_n + \limsup y_n\end{aligned}$$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $\langle x_n \rangle$ และ $\langle y_n \rangle$ เป็นลำดับมีขอบเขต จึงได้ว่า $\langle x_n + y_n \rangle$ เป็นลำดับมีขอบเขตด้วย ก่อนอื่นเราจะแสดงว่า

$$\liminf x_n + \liminf y_n \le \liminf(x_n + y_n) \tag{2.1}$$

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยทฤษฎีบท 2.2.7 จะได้ว่ามี $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ ที่

$$\begin{aligned}&\liminf x_n - \frac{\varepsilon}{2} < x_m && \text{สำหรับทุก } m \ge N_1 \\ &\liminf y_n - \frac{\varepsilon}{2} < y_m && \text{สำหรับทุก } m \ge N_2 \text{ และ} \\ &x_m + y_m < \liminf(x_n + y_n) + \varepsilon && \text{สำหรับทุก } m \ge N_3\end{aligned}$$

ให้ $m = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ แล้วจะได้ว่า

$$\liminf x_n + \liminf y_n - \varepsilon < x_m + y_m < \liminf(x_n + y_n) + \varepsilon \tag{2.2}$$

เนื่องจากอสมการ (2.2) เป็นจริงสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จึงได้ว่า อสมการ (2.1) เป็นจริงตามต้องการ

ต่อไปจะแสดงว่าอสมการที่สองเป็นจริง จากอสมการ (2.1) จะได้ว่า

$$\liminf -x_n + \liminf(x_n + y_n) \le \liminf y_n$$

จากทฤษฎีบท 2.2.8 เราได้ว่า $\liminf -x_n = -\limsup x_n$ ดังนั้น

$$\liminf(x_n + y_n) \le -\liminf -x_n + \liminf y_n = \limsup x_n + \liminf y_n \tag{2.3}$$

ตามต้องการ และเมื่อแทน x_n และ y_n ด้วย $-y_n$ และ $-x_n$ ตามลำดับลงในอสมการ (2.3) และอสมการ (2.1) จะได้อสมการ

$$\limsup x_n + \liminf y_n \leq \limsup(x_n + y_n)$$

และ

$$\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$$

ตามลำดับ □

จากบทนิยามการลู่เข้าของลำดับจะเห็นได้ว่า ถ้าจะตรวจสอบว่าลำดับใดเป็นลำดับลู่เข้า เราจะต้องทราบค่าของ L ก่อน ซึ่งโดยทั่วไปนั้นอาจจะยากที่จะคาดเดาค่าได้ การตรวจสอบการลู่เข้าโดยตรงจากบทนิยามจึงไม่เป็นที่สะดวกนัก แต่เรายังโชคดีที่ยังมีทฤษฎีบทที่ช่วยแก้ปัญหานี้ได้เป็นอย่างดี ซึ่งทฤษฎีบทนี้มีชื่อเรียกกันโดยทั่วไปว่า ***เกณฑ์การลู่เข้าโคชี***

บทนิยาม 2.2.10. *เราจะเรียก* $\langle x_n \rangle$ *ว่า* ***ลำดับโคชี*** (*Cauchy sequence*) *ถ้าสำหรับแต่ละ* $\varepsilon > 0$ *จะมี* $N \in \mathbb{N}$ *ที่* $|x_n - x_m| < \varepsilon$ *สำหรับทุก* $m, n \geq N$

ทฤษฎีบท 2.2.11. *ลำดับโคชีเป็นลำดับมีขอบเขต*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

สัจพจน์ของอาร์คิมีดิส (The Axiom of Archimedes)

ลำดับของจำนวนจริงเป็นลำดับลู่เข้าก็ต่อเมื่อลำดับนั้นเป็นลำดับโคชี

บทพิสูจน์ การพิสูจน์ว่าลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคชีนั้นสามารถพิสูจน์ได้ไม่ยาก จึงขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด

สมมติให้ $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับโคชี จากทฤษฎีบท 2.2.11 จะได้ว่า $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับมีขอบเขต ดังนั้น $\limsup x_n$ และ $\liminf x_n$ เป็นจำนวนจริง ให้ $u = \limsup x_n$ และ $v = \liminf x_n$ จากทฤษฎีบท 2.2.8 เราเพียงพอที่จะแสดงว่า $u = v$ โดยการหาข้อขัดแย้ง

สมมติว่า $v < u$ ให้ $\varepsilon = \frac{u-v}{3}$ และ $N \in \mathbb{N}$ จากทฤษฎีบท 2.2.7 จะได้ว่ามี $m > N$ ที่ $x_m < v + \varepsilon$ และจะมี $n > N$ ที่ $x_n > u - \varepsilon$ ซึ่งจะได้ว่า

$$x_n - x_m > u - v - 2\varepsilon = \varepsilon$$

เนื่องจาก N เป็นจำนวนนับใด ๆ ก็ได้ จึงขัดแย้งกับการเป็นลำดับโคชีของ $\langle x_n \rangle$ ดังนั้น $u = v$ ตามต้องการ $\square$

ก่อนที่จะกล่าวถึงบทนิยามต่อไป จะขอทบทวนเกี่ยวกับนิยามของลำดับย่อยของ $\langle x_n \rangle$ ซึ่งมักจะเขียนแทนด้วย $\langle x_{n_k} \rangle$ โดยเราจะกล่าวว่า $\langle x_{n_k} \rangle$ เป็นลำดับย่อยของ $\langle x_n \rangle$ ถ้าลำดับ $\langle x_{n_k} \rangle$ ได้มาจากการลบพจน์บางพจน์ของลำดับ $\langle x_n \rangle$ ออก โดยไม่มีการเปลี่ยนแปลงลำดับของพจน์ที่เหลือ

บทนิยาม 2.2.12. *เราจะเรียกจำนวนจริง l ว่า* ***จุดเกาะกลุ่มของลำดับ*** $\langle x_n \rangle$ (***cluster point of a sequence*** $\langle x_{n_k} \rangle$) *ถ้ามีลำดับย่อย $\langle x_{n_k} \rangle$ ของ $\langle x_n \rangle$ ที่ลู่เข้าสู่ l*

จากบทนิยามของจุดเกาะกลุ่มของลำดับนั้น เราสามารถกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2.13. *จำนวนจริง l เป็นจุดเกาะกลุ่มของลำดับ $\langle x_n \rangle$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ และสำหรับแต่ละ $N \in \mathbb{N}$ จะมี $k \in \mathbb{N}$ ที่ $k > N$ และ $|l - x_k| < \varepsilon$*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด $\square$

โดยทั่วไปแล้วลำดับบางลำดับอาจจะไม่มีจุดเกาะกลุ่มเลยก็ได้ และบางลำดับอาจจะมีจุดเกาะกลุ่มมากมายนับไม่ถ้วนก็ได้ ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะบอกให้เราทราบว่าอะไรคือเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับการมีจุดเกาะกลุ่มของลำดับนั้น

ทฤษฎีบท 2.2.14. *ให้ $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับมีขอบเขต จะได้ว่า $\limsup x_n$ และ $\liminf x_n$ เป็นจุดเกาะกลุ่มที่มีค่ามากสุดและค่าน้อยสุดของ $\langle x_n \rangle$ ตามลำดับ นั่นคือ ถ้า l เป็นจุดเกาะกลุ่มของ $\langle x_n \rangle$ แล้ว $\liminf x_n \leq l \leq \limsup x_n$*

บทพิสูจน์ จาก $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับมีขอบเขต จะได้ว่า $\limsup x_n$ และ $\liminf x_n$ เป็นจำนวนจริง จากทฤษฎีบท 2.2.7 และ ทฤษฎีบท 2.2.13 จะได้ว่า $\limsup x_n$ และ $\liminf x_n$ เป็นจุดเกาะกลุ่มของ $\langle x_n \rangle$ การพิสูจน์ส่วนที่เหลือขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด $\square$

เมื่อผนวกสาระของทฤษฎีบท 2.2.13 และทฤษฎีบท 2.2.14 เข้าด้วยกัน เราสามารถเขียนผลลัพธ์ในแบบกว้าง ๆ ซึ่งมีชื่อเรียกรู้จักกันทั่วไปดังนี้

ทฤษฎีบทของโบลซาโน-ไวเออร์สตราสส์ (The Bolzano-Weierstrass theorem)

ถ้า $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับมีขอบเขตแล้ว $\langle x_n \rangle$ จะมีจุดเกาะกลุ่ม หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า ทุกลำดับที่มีขอบเขตจะมีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

บทนิยาม 2.2.15. *ให้ $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ เราจะเรียก $\langle s_n \rangle$ ว่า* ***ลำดับของผลบวกย่อย*** *(**sequence of partial sums**) ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ซึ่งจะเขียนแทนอย่างย่อด้วย $\sum x_n$ เราจะกล่าวว่า $\sum x_n$ เป็น**อนุกรมลู่เข้า** (**convergent series**) ถ้า $\langle s_n \rangle$ ลู่เข้าสู่บางจำนวนจริง x_0 โดยจะเขียนแทนด้วย $\sum x_n = x_0$ และจะกล่าวว่าเป็น**อนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์** (**absolutely convergent series**) ถ้า $\sum |x_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า*

เราสามารถแสดงได้ไม่ยากว่าทุกอนุกรมที่ลู่เข้าสัมบูรณ์เป็นอนุกรมลู่เข้า แต่ในทางกลับกันนั้นไม่จริง เช่น $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แต่ $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$ ไม่เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.2.16. *ถ้า $\sum |x_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

เนื่องจากการลู่เข้าของอนุกรมขึ้นอยู่กับการลู่เข้าของลำดับของผลบวกย่อยซึ่งเป็นลำดับของจำนวนจริง เราจึงสามารถตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมได้ด้วยความจริงต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2.17. *(เกณฑ์การลู่เข้าโคชีของอนุกรม) อนุกรม $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่*

$$|x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n > m \geq N$

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

เราสามารถใช้เกณฑ์การลู่เข้าโคชีของอนุกรมในการแสดงว่า $\sum \frac{1}{n}$ ไม่ลู่เข้า โดยให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ และให้ m เป็นจำนวนนับ จะได้ว่า

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+m} \geq m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$$

และเราสามารถแสดงได้ว่า $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนี้ ก่อนอื่นสังเกตว่า

$$0 < \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{(-1)^k}{m+k} < \frac{1}{m}$$

สำหรับทุก $m \in \mathbb{N}$ ทำให้ได้ว่า ไม่ว่า ε เป็นจำนวนจริงบวกใดก็ตาม ถ้า $m > \varepsilon^{-1}$ แล้ว

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right| < \frac{1}{m} < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n > m$ โดยเกณฑ์การลู่เข้าโคชีของอนุกรม เราสรุปได้ว่า $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยที่ไม่จำเป็นต้องทราบค่าที่อนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.2.18. *สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $0 < x_n \leq y_n$ จะได้ว่า*

1. *ถ้า $\sum y_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า*
2. *ถ้า $\sum x_n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า (ลำดับของผลบวกย่อยลู่ออกสู่อนันต์) แล้ว $\sum y_n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า*

บทพิสูจน์ (1) ให้ $y = \sum y_n$ และ $\langle s_n \rangle$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เนื่องจาก $0 < x_n \leq y_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จึงได้ว่า $\langle s_n \rangle$ เป็นลำดับเพิ่มที่มี y เป็นขอบเขตบน โดยทฤษฎีบท 2.2.4 จะได้ว่า $\langle s_n \rangle$ เป็นลำดับลู่เข้า ดังนั้น $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าตามต้องการ

(2) ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด $\square$

ทฤษฎีบท 2.2.19. *ให้ $\langle y_n \rangle$ เป็นลำดับที่เกิดจากการเรียงสับเปลี่ยนของสมาชิกในลำดับ $\langle x_n \rangle$ ถ้า $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ แล้ว $\sum y_n = \sum x_n$*

บทพิสูจน์ ก่อนอื่นขอตกลงความหมายของสัญลักษณ์ที่จะใช้ในการพิสูจน์นี้ โดยในที่นี้เราถือว่าสมาชิกในเซตที่มีดัชนีแตกต่างกันเป็นสมาชิกที่แตกต่างกัน เช่น ถ้า $x_1 = 1$ และ $x_2 = 1$ เราจะได้ว่า $\{x_1\} \neq \{x_1, x_2\}$ เป็นต้น

ให้ $x = \sum x_n$ และ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่ามี $N_1 \in \mathbb{N}$ ที่

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k - x\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.4}$$

สำหรับทุก $n \geq N_1$ และจาก $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ จะได้ว่ามี $N_2 \in \mathbb{N}$ ที่

$$\sum_{k=m}^{n} |x_k| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.5}$$

สำหรับทุก $n > m \geq N_2$

ให้ $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$ และ $N \in \mathbb{N}$ ที่มีสมบัติว่า $\{x_k : k \leq N_3\} \subset \{y_k : k \leq N\}$

สังเกตว่า $N \geq N_3$ ให้ $n \geq N$ และให้ $S = \{y_k : k \leq n\} - \{x_k : k \leq N_3\}$ จาก (2.4) และ (2.5) จะได้ว่า $\left|\sum_{k=1}^{N_3} x_k - x\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ และ $\sum_{y_k \in S} |y_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} y_k - x\right| &= \left|\sum_{k=1}^{N_3} x_k + \sum_{y_k \in S} y_k - x\right| \\ &\leq \left|\sum_{k=1}^{N_3} x_k - x\right| + \left|\sum_{y_k \in S} y_k\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{y_k \in S} |y_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่า $\sum y_n = x$ ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.2
2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.4 ข้อ (2)
3. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.7
4. ให้ $\langle x_n \rangle$ และ $\langle y_n \rangle$ เป็นลำดับที่ $x_n \leq y_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่า

$$\liminf x_n \leq \liminf y_n \qquad \text{และ} \qquad \limsup x_n \leq \limsup y_n$$

5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.8
6. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.11
7. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.13
8. จงพิสูจน์โดยตรงจากบทนิยามว่า ถ้า $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับมีขอบเขต แล้ว $\langle x_n \rangle$ มีจุดเกาะกลุ่มอย่างน้อยหนึ่งจุด
9. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.14
10. จงพิสูจน์ทฤษฎีบทของโบลซาโน-ไวเออร์สตราสส์
11. ให้ $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับมีขอบเขต จงแสดงว่า มีลำดับย่อยของ $\langle x_n \rangle$ ที่เป็นลำดับทางเดียว

12. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\sum x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\lim x_n = 0$

13. ให้ $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับลด และ $\lim x_n = 0$ แล้ว $\sum (-1)^n x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

14. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.16

15. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.2.18

16. ให้ $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ จงพิสูจน์ว่า

    (i) ถ้า $\limsup \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$ แล้ว $\lim x_n = 0$ และ $\sum x_n$ ลู่เข้า

    (ii) ถ้า $\limsup \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| > 1$ แล้ว $\langle x_n \rangle$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้า

17. ให้ A เป็นเซตย่อยของจำนวนจริงบวก เราจะกล่าวว่า A เป็นเซตหาผลบวกได้ ก็ต่อเมื่อ

$$\sup \left\{ \sum_{x \in B} x : \ B \text{ เป็นเซตย่อยจำกัดของ } A \right\} < \infty$$

    จงพิสูจน์ว่า ถ้า A เป็นเซตหาผลบวกได้ แล้ว A เป็นเซตนับได้

2.3 ทอพอโลยีของจำนวนจริง

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาและทบทวนความรู้เกี่ยวกับทอพอโลยีของจำนวนจริง ก่อนอื่นขอตกลงว่า เมื่อเรากล่าวถึง ***ช่วง*** (*interval*) จะหมายถึง ช่วงต่าง ๆ ดังนี้ $(-\infty, a), (-\infty, a], (a, +\infty)$, $[a, +\infty), (a, b)$, $[a, b), (a, b]$ และ $[a, b]$ เมื่อ $-\infty < a < b < +\infty$ และจะรวมถึง $(a, a) = \emptyset$ และ $[a, a] = \{a\}$ หรือที่เรียกว่า ***เซตโทน*** (*singleton set*) ด้วย เพื่อความสะดวกเราให้ $B(x, \varepsilon)$ แทนช่วงเปิด $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ และ $\varepsilon > 0$ และให้ $B_0(x, \varepsilon)$ แทน $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) - \{x\}$

บทนิยาม 2.3.1. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เราจะเรียกจำนวนจริง x ว่า* ***จุดภายใน*** (*interior point*) *ของ A ถ้ามี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $B(x, \varepsilon) \subset A$ โดยจะเขียนแทนเซตของจุดภายในทั้งหมดของ A ด้วย A^o และเราจะกล่าวว่า A เป็น****เซตเปิด*** (*open set*) *ถ้า $A^o = A$*

จากบทนิยามเราจะได้ว่า $A^o \subset A$ เสมอ และช่วงเปิด $(-\infty, a), (a, +\infty)$ และ (a, b) รวมถึง $\emptyset$ และ $\mathbb{R}$ เป็นเซตเปิด แต่เซตจำกัดใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่างไม่เป็นเซตเปิด

ทฤษฎีบท 2.3.2. *ให้ $A, B \subset \mathbb{R}$ จะได้ว่า*

1. *A^o เป็นเซตเปิด*

2. *$A^o \cup B^o \subset (A \cup B)^o$*

3. *$A^o \cap B^o = (A \cap B)^o$*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 2.3.3. *ให้ $\mathcal{I}$ เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $A_\alpha \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตเปิดสำหรับแต่ละ $\alpha \in \mathcal{I}$ จะได้ว่า*

1. *$A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \cap \cdots \cap A_{\alpha_n}$ เป็นเซตเปิด เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $\alpha_k \in \mathcal{I}$ สำหรับแต่ละ $1 \leq k \leq n$*

2. *$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} A$ เป็นเซตเปิด*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

จากทฤษฎีบท 2.3.3 สรุปได้ว่า ยูเนียนใด ๆ (arbitrary union) ของเซตเปิดเป็นเซตเปิด และอินเตอร์เซกชันจำกัด (finite intersection) ของเซตเปิดเป็นเซตเปิด ซึ่งเงื่อนไขของอินเตอร์เซกชันจำกัดนั้นเป็นเงื่อนไขจำเป็นที่ไม่สามารถตัดออกได้ ตัวอย่างเช่น $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$ ซึ่งเป็นอินเตอร์เซกชันอนันต์ของช่วงเปิด แต่ $\{0\}$ ไม่เป็นเซตเปิด เป็นต้น

บทนิยาม 2.3.4. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เราจะเรียกว่า A ว่า* ***เซตปิด*** *(**closed set**) ถ้า A^c เป็นเซตเปิด*

จากบทนิยามเราจะได้ว่า ช่วง $(-\infty, a], [a, +\infty)$ และ $[a, b]$ รวมถึง $\emptyset$ และ $\mathbb{R}$ เป็นเซตปิด โดยในบรรดาเซตย่อยของจำนวนจริงทั้งหลายนั้น มีเพียง $\emptyset$ และ $\mathbb{R}$ เท่านั้นที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด สังเกตว่าเซตบางเซตอาจไม่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด เช่น $A = [0, 1)$ ไม่เป็นเซตเปิดเพราะ 0 ไม่เป็นจุดภายในของ A และ $A^c = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ ก็ไม่เป็นเซตเปิดเพราะ 1 ไม่เป็นจุดภายใน A^c ดังนั้น A ไม่เป็นเซตปิดด้วย

ทฤษฎีบท 2.3.5. *ให้ $\mathcal{I}$ เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $A_\alpha \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตปิดสำหรับแต่ละ $\alpha \in \mathcal{I}$ จะได้ว่า*

1. *$A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \cup \cdots \cup A_{\alpha_n}$ เป็นเซตปิด เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $\alpha_k \in \mathcal{I}$ สำหรับแต่ละ $1 \leq k \leq n$*

2. *$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A$ เป็นเซตปิด*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

จากทฤษฎีบท 2.3.5 สรุปได้ว่า ยูเนียนจำกัด (finite union) ของเซตปิดเป็นเซตปิด และอินเตอร์เซกชันใด ๆ (arbitrary intersection) ของเซตปิดเป็นเซตปิด ซึ่งเงื่อนไขของยูเนียนจำกัดนั้นจำเป็นที่ไม่สามารถตัดออกได้ ตัวอย่างเช่น $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] = (0,1)$ ซึ่งเป็นยูเนียนอนันต์ของช่วงปิด แต่ผลลัพธ์เป็นเซตเปิด $(0,1)$ เป็นต้น

บทนิยาม 2.3.6. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ และให้ $\overline{A}$ แทนเซตของจำนวนจริง x ที่ $B(x,\varepsilon)\cap A \neq \emptyset$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ และเราจะเรียกเซต $\overline{A}$ นี้ว่า **ส่วนปิดคลุมของ** A (**closure of** A)*

ก่อนอื่นสังเกตว่า $A \subset \overline{A}$ เสมอ และถ้า A เป็นช่วงแล้ว $\overline{A}$ เท่ากับยูเนียนของ A และเซตของจุดปลายช่วงที่ไม่ใช่ $\pm\infty$ ตัวอย่างเช่น $\overline{(0,1)} = [0,1]$, $\overline{(-\infty,a)} = (-\infty,a]$, $\overline{(a,+\infty)} = [a,+\infty)$ และ $\overline{[a,b]} = [a,b]$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 2.3.7. *ให้ $A, B \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตมีขอบเขตบนและขอบเขตล่างตามลำดับ จะได้ว่า $\sup(A) \in \overline{A}$ และ $\inf(B) \in \overline{B}$*

บทพิสูจน์ ให้ $u = \sup(A)$ และให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $u-\varepsilon$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ A จึงมี $x \in A$ ที่

$$u - \varepsilon < x \leq u$$

ซึ่งแสดงว่า $B(u,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ดังนั้น $u \in \overline{A}$ ตามต้องการ

การพิสูจน์ส่วนที่เหลือสามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน จึงขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 2.3.8. *ให้ $A, B \subset \mathbb{R}$ จะได้ว่า*

1. *A เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ $A = \overline{A}$*
2. *$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ดังนั้น $\overline{A}$ เป็นเซตปิดเสมอ*
3. *ถ้า $A \subset B$ แล้ว $\overline{A} \subset \overline{B}$*
4. *$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$ และ $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$*

บทพิสูจน์ (1) ก่อนอื่นสมมติให้ A เป็นเซตปิด ถ้า $x \in A^c$ แล้วจะมี $\varepsilon > 0$ ที่ $B(x,\varepsilon) \subset A^c$ เพราะ A^c เป็นเซตเปิด ดังนั้น $x \notin \overline{A}$ ซึ่งแสดงว่าถ้า $x \in \overline{A}$ แล้ว $x \in A$ ทำให้ได้ว่า $\overline{A} \subset A$ และเนื่องจาก $A \subset \overline{A}$ จึงได้ว่า $A = \overline{A}$

ต่อไปสมมติให้ $A = \overline{A}$ เราจะแสดงว่า A^c เป็นเซตเปิด ให้ $x \in A^c = (\overline{A})^c$ จะได้ว่า $x \notin \overline{A}$ ดังนั้นจะมี $\varepsilon > 0$ ที่ $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ ซึ่งแสดงว่า $B(x,\varepsilon) \subset A^c$ ดังนั้น A^c เป็นเซตเปิดตาม

ต้องการ

(2) จะแสดงว่า $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ซึ่งเพียงพอที่จะแสดงว่า $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ ให้ $\varepsilon > 0$ และ $x \in \overline{\overline{A}}$ จะได้ว่า $B(x,\varepsilon) \cap \overline{A} \neq \emptyset$ ให้ $y \in B(x,\varepsilon) \cap \overline{A}$ จะได้ว่า

$$B(y, \varepsilon - |x-y|) \subset B(x,\varepsilon) \text{ และ } B(y, \varepsilon - |x-y|) \cap A \neq \emptyset$$

เพราะว่า $y \in \overline{A}$ จึงได้ว่า $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ เนื่องจาก ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จึงได้ว่า $x \in \overline{A}$ และ $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ ตามต้องการ

(3) ให้ $\varepsilon > 0$, $A \subset B$ และ $x \in \overline{A}$ จะได้ว่า $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ เนื่องจาก $A \subset B$ จึงได้ว่า $B(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ ดังนั้น $x \in \overline{B}$ ตามต้องการ

(4) ให้ $x \in \overline{A \cup B}$ จะได้ว่า $B(x,\varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ สมมติว่า $x \notin \overline{A}$ ซึ่งจะได้ว่า $B(x,\varepsilon_0) \cap A = \emptyset$ สำหรับบาง $\varepsilon_0 > 0$ ดังนั้น $B(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ ซึ่งจะได้ $x \in \overline{B}$ จึงสรุปได้ว่า

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$$

จากข้อ 3 เราจะได้ว่า $\overline{A}, \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ ดังนั้น

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$

และสรุปได้ว่า $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

เนื่องจาก $(A \cap B) \subset A$ และ $(A \cap B) \subset B$ และจากข้อ 3 จะได้ว่า $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ และ $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$ ดังนั้น $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ ตามต้องการ □

จากทฤษฎีบท 2.3.7 และทฤษฎีบท 2.3.8 จะได้ว่า เซตปิดที่มีขอบเขตบนและเซตปิดที่มีขอบเขตล่างจะมีสมาชิกค่ามากสุดและสมาชิกค่าน้อยสุดตามลำดับ

บทแทรก 2.3.9. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตปิด ถ้า A มีขอบเขตบน แล้ว A มีสมาชิกค่ามากสุด และถ้า A มีขอบเขตล่าง แล้ว A มีสมาชิกค่าน้อยสุด*

ทฤษฎีบท 2.3.10. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\overline{A}$ เป็นเซตปิดที่เล็กสุดที่บรรจุ A*

บทพิสูจน์ สมมติให้ B เป็นเซตปิดที่ $A \subset B$ และ $x \notin B$ เนื่องจาก $x \in B^c$ ซึ่งเป็นเซตเปิด จึงมี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $B(x,\varepsilon) \subset B^c$ จึงได้ว่า $(B(x,\varepsilon) \cap A) \subset (B(x,\varepsilon) \cap B) = \emptyset$ ดังนั้น $x \notin \overline{A}$ จึงสรุปได้ว่าถ้า $x \in \overline{A}$ แล้ว $x \in B$ นั่นคือ $\overline{A} \subset B$ ดังนั้น $\overline{A}$ เป็นเซตปิดที่เล็กสุดที่บรรจุ A ตามต้องการ □

จากทฤษฎีบท 2.3.10 เราสามารถสรุปได้ว่า $\overline{A}$ เท่ากับอินเตอร์เซกชันของเซตปิดทั้งหมดที่บรรจุ A

บทนิยาม 2.3.11. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่าจำนวนจริง x เป็น**จุดเกาะกลุ่ม** (**accumulation point หรือ cluster point**) ของ A ถ้า $A \cap B_0(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ และเราให้ A' แทนเซตของจุดเกาะกลุ่มของ A*

จากบทนิยามเราสามารถแสดงได้ว่า ถ้า x เป็นจุดเกาะกลุ่มของ A แล้วจะมีลำดับที่ประกอบด้วยสมาชิกที่แตกต่างกันใน A และลู่เข้าสู่ x จึงมีการเรียกจุดเกาะกลุ่มอีกชื่อว่า **จุดลิมิต** (***limit point***) ของ A

ทฤษฎีบท 2.3.12. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\overline{A} = A \cup A'$*

บทพิสูจน์ จากบทนิยามจะได้ว่า $A' \subset \overline{A}$ ดังนั้น $A \cup A' \subset \overline{A}$ ต่อไปสมมติว่ามี $x \in \overline{A} - A$ จะได้ว่า

$$A \cap B_0(x, \varepsilon) = B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ ทำให้ได้ว่า $x \in A'$ และ $\overline{A} \subset (A \cup A')$ ดังนั้น $\overline{A} = A \cup A'$ ตามต้องการ □

บทนิยาม 2.3.13. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ และให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตของเซตเปิด เราจะเรียก $\mathcal{C}$ ว่า **เซตปกเปิด** (**open cover**) ของ A ถ้า $A \subset \bigcup_{A_\alpha \in \mathcal{C}} A_\alpha$ นอกจากนี้ถ้า $\{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_n}\} \subset \mathcal{C}$ ที่ $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{\alpha_k}$ แล้วเราจะเรียก $\{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_n}\}$ ว่า **เซตปกย่อยจำกัด** (**finite subcover**) ของ A*

บทนิยาม 2.3.14. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า A เป็น**เซตกระชับ** (**compact set**) ถ้าทุกเซตปกเปิดของ A มีเซตปกย่อยจำกัด*

ทฤษฎีบท 2.3.15. *ทุกช่วงปิดที่มีขอบเขตเป็นเซตกระชับ*

บทพิสูจน์ ให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตปกเปิดของช่วงปิด $[a, b]$ และให้

$$B = \{x \in [a, b] : \mathcal{C} \text{ มีเซตปกย่อยจำกัดของ} [a, x]\}$$

สังเกตว่า $B \neq \emptyset$ เพราะว่ามี $a \in B$ เนื่องจาก B มี b เป็นขอบเขตบน จึงได้ว่า $y = \sup B$ เป็นจำนวนจริงที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ b

จาก $\mathcal{C}$ เป็นเซตปกเปิดของ $[a, b]$ จะได้ว่ามี $A \in \mathcal{C}$ ที่ $a \in A$ และจะมี $0 < \varepsilon < b - a$ ที่

$B(a,\varepsilon) \subset A$ ซึ่งแสดงว่า $[a, a+\frac{\varepsilon}{2}] \subset B$ ดังนั้น $a < y \leq b$

ต่อไปเราต้องการแสดงว่า $y = b$ สมมติว่า $y < b$ เนื่องจาก $\mathcal{C}$ เป็นเซตปกเปิดของ $[a,b]$ จึงมี $A_0 \in \mathcal{C}$ ที่ $y \in A_0$ ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกที่ $B(y,\varepsilon) \subset A_0$ เนื่องจาก $B \cap (y-\varepsilon, y] \neq \emptyset$ จึงมี $z \in B \cap (y-\varepsilon, y]$ จากนิยามของ y จะได้ว่ามี $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{C}$ ที่ $[a,z] \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ดังนั้น $\{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ เป็นเซตย่อยจำกัดของ $\mathcal{C}$ ที่ $[a,w] \subset \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ สำหรับทุก $w \in [y, y+\varepsilon)$ ซึ่งขัดแย้งกับนิยามของ y ดังนั้น $y = b$ ตามต้องการ □

การใช้บทนิยามของเซตกระชับในการแสดงว่า เซตย่อยใดเป็นเซตกระชับหรือไม่นั้น เป็นเรื่องที่ยุ่งยากมาก ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเป็นเครื่องที่สำคัญที่สุดที่จะช่วยให้เราสามารถสรุปได้ว่า เซตใดจะเป็นเซตกระชับ

ทฤษฎีบทไฮเน-โบเรล (The Heine-Borel theorem)

ให้ $A \subset \mathbb{R}$ จะได้ว่า A เป็นเซตกระชับ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตปิดมีขอบเขต

บทพิสูจน์ สมมติให้ A เป็นเซตปิดมีขอบเขต และให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตปกเปิดของ A เนื่องจาก A เป็นเซตมีขอบเขต จึงมีช่วงปิด $[a,b]$ ที่ $A \subset [a,b]$ เนื่องจาก A^c เป็นเซตเปิดและ

$$A^c \cup \left[\bigcup_{B_\alpha \in \mathcal{C}} B_\alpha\right] = \mathbb{R}$$

จึงได้ว่า $\mathcal{C} \cup \{A^c\}$ เป็นเซตปกเปิดของ $[a,b]$ โดยทฤษฎีบท 2.3.15 จะได้ว่ามีเซตจำกัด $\{B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, B_{\alpha_3}, \ldots, B_{\alpha_n}\} \subset \mathcal{C}$ ที่

$$[a,b] \subset A^c \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_{\alpha_k}\right)$$

เนื่องจาก $A \subset [a,b]$ และ $A \cap A^C = \emptyset$ จึงได้ว่า $\{B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \ldots, B_{\alpha_n}\}$ เป็นเซตปกย่อยจำกัดของ A ดังนั้น A เป็นเซตกระชับ

ต่อไปสมมติให้ A เป็นเซตกระชับ ถ้า A เป็นเซตไม่มีขอบเขต แล้ว $\mathcal{C} = \{(-n,n) : n \in \mathbb{N}\}$ เป็นเซตปกเปิดของ A ที่ไม่มีเซตปกย่อยจำกัด จึงเกิดข้อขัดแย้งกับการเป็นเซตกระชับของ A ดังนั้น A ต้องเป็นเซตมีขอบเขต ถ้า A ไม่เป็นเซตปิด แล้วจากทฤษฎีบท 2.3.12 จะได้ว่ามีจุดเกาะกลุ่ม x ของ A ที่ไม่อยู่ใน A ให้ $\mathcal{C} = \left\{ \left(-\infty, x-\frac{1}{n}\right) \cup \left(x+\frac{1}{n}, +\infty\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ ซึ่งเป็นเซตปกเปิดของ A เราสามารถเห็นได้ไม่ยากว่า ไม่มีเซตย่อยจำกัดของ $\mathcal{C}$ ที่ปกคลุม A ทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับการเป็นเซตกระชับของ A ดังนั้น A ต้องเป็นเซตปิด □

บทนิยาม 2.3.16. *ให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตของเซตย่อยของจำนวนจริง จะกล่าวว่า $\mathcal{C}$ มี**สมบัติอินเตอร์เซกชันจำกัด** (**finite intersection property**) ถ้าทุกเซตย่อยจำกัดของ $\mathcal{C}$ มีอินเตอร์เซกชันไม่เป็นเซตว่าง กล่าวคือ สำหรับทุก $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathcal{C}$ จะได้ว่า $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \neq \emptyset$*

ทฤษฎีบท 2.3.17. *ถ้า $\mathcal{C}$ เป็นเซตของเซตปิดที่มีสมบัติอินเตอร์เซกชันจำกัดและมีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวเป็นเซตมีขอบเขต แล้ว $\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A \neq \emptyset$*

บทพิสูจน์ ให้ K เป็นสมาชิกใน $\mathcal{C}$ ที่เป็นเซตมีขอบเขต จากทฤษฎีบทไฮเน-โบเรล จะได้ว่า K เป็นเซตกระชับ สมมติว่า $\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A = \emptyset$ จะได้ว่า $\mathcal{C}_0 = \{A^c : A \in \mathcal{C}\}$ จะเป็นเซตปกเปิดของ K เพราะว่า

$$\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A^c = \mathbb{R} - \bigcap_{A\in\mathcal{C}} A = \mathbb{R}$$

เนื่องจาก K เป็นเซตกระชับ จึงมี $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathcal{C}$ ที่ $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c$ ซึ่งจะได้ว่า

$$K \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \emptyset$$

ดังนั้น $\mathcal{C}$ มีเซตย่อยจำกัด $\{A_1, A_2, \dots, A_n, K\}$ ที่มีอินเตอร์เซกชันเป็นเซตว่าง โดยการแย้งสลับที่จะสรุปได้ว่า ถ้า $\mathcal{C}$ ที่มีสมบัติอินเตอร์เซกชันจำกัด แล้ว $\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A$ ต้องไม่เป็นเซตว่าง □

สังเกตว่าเงื่อนไขการมีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวเป็นเซตมีขอบเขตในทฤษฎีบท 2.3.17 เป็นเงื่อนไขสำคัญ ไม่เช่นนั้นบทสรุปอาจเป็นเท็จได้ ตัวอย่าง เช่น $\mathcal{C} = \{[n, +\infty) : n \in \mathbb{N}\}$ เป็นเซตของเซตที่มีสมบัติอินเตอร์เซกชันจำกัด แต่ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[n, +\infty) = \emptyset$ เพราะทุกเซตใน $\mathcal{C}$ เป็นเซตไม่มีขอบเขต

บทนิยาม 2.3.18. *ให้ $A \subset B \subset \mathbb{R}$ เราจะเรียก A ว่า **เซตเปิดสัมพัทธ์** (**relatively open set**) ใน B หรือเรียกโดยย่อว่า A **เป็นเซตเปิดใน** B ถ้าแต่ละ $x \in A$ จะมี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ $B(x, \varepsilon) \cap B \subset A$ และจะเรียก A ว่า **เซตปิดสัมพัทธ์** (**relatively closed set**) ใน B หรือเรียกโดยย่อว่า A **เป็นเซตปิดใน** B ถ้า A^c เป็นเซตเปิดใน B*

ตัวอย่างเซตเปิดสัมพัทธ์ เช่น $A = [0, 1)$ เป็นเซตเปิดใน $B = [0, 2]$ แต่ A ไม่เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{R}$ และ $(0, 1)$ เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดใน $A = (0, 1) \cup (2, 3)$ แต่ $(0, 1)$ ไม่เป็นเซตปิดใน $\mathbb{R}$ หากเรากล่าวว่า A เป็นเซตเปิดหรือเซตปิดโดยไม่มีการระบุอย่างอื่น เราจะหมายถึง A เป็นเซตเปิดหรือเซตปิดใน $\mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 2.3.19. *ให้ $A \subset B \subset \mathbb{R}$ จะได้ว่า*

1. *A เป็นเซตเปิดใน B ก็ต่อเมื่อ มีเซตเปิด $\mathcal{O}$ (ใน $\mathbb{R}$) ที่ $A = B \cap \mathcal{O}$*
2. *A เป็นเซตปิดใน B ก็ต่อเมื่อ มีเซตปิด F (ใน $\mathbb{R}$) ที่ $A = B \cap F$*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 2.3.20. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ จะได้ว่า A เป็นเซตกระชับ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกเซต $\mathcal{C}$ ที่ประกอบด้วยเซตปิดใน A ถ้า $\mathcal{C}$ มีสมบัติอินเตอร์เซกชันจำกัด แล้ว $\bigcap_{B\in\mathcal{C}} B \neq \emptyset$*

บทพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตกระชับ จะได้ว่าทุกเซตปิดใน A เป็นเซตปิดมีขอบเขต ให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตที่ประกอบด้วยเซตปิดใน A และ $\mathcal{C}$ มีสมบัติอินเตอร์เซกชันจำกัด โดยทฤษฎีบท 2.3.17 เราจะได้ว่า $\bigcap_{B\in\mathcal{C}} B \neq \emptyset$ ตามต้องการ

ต่อไปสมมติให้ A เป็นเซตที่มีสมบัติว่า ถ้า $\mathcal{C}$ เป็นเซตที่ประกอบด้วยเซตปิดใน A และ $\mathcal{C}$ มีสมบัติอินเตอร์เซกชันจำกัด แล้ว $\bigcap_{B\in\mathcal{C}} B \neq \emptyset$ เราจะแสดงว่า A เป็นเซตกระชับ

ให้ $\mathcal{F} = \{G_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ เป็นเซตปกเปิดของ A และให้ $B_\alpha = G_\alpha^c \cap A$ สำหรับแต่ละ $\alpha \in \mathcal{I}$ จะได้ว่า $\mathcal{C} = \{B_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ เป็นเซตที่ประกอบด้วยเซตปิดใน A สมมติว่า A ไม่เป็นเซตกระชับ นั่นคือ $\mathcal{F}$ ไม่มีเซตปกย่อยจำกัดของ A จะได้ว่า $A - \bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} G_\alpha \neq \emptyset$ สำหรับทุกเซตจำกัด $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ ดังนั้น

$$\bigcap_{\alpha\in\mathcal{J}} B_\alpha = A - \bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} G_\alpha \neq \emptyset$$

สำหรับทุกเซตจำกัด $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ ซึ่งแสดงว่า $\mathcal{C}$ มีสมบัติอินเตอร์เซกชันจำกัด ดังนั้น $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{I}} B_\alpha \neq \emptyset$ และทำให้ได้ว่า

$$A - \bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}} G_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{I}} B_\alpha \neq \emptyset$$

ซึ่งขัดแย้งกับการที่ $\mathcal{F}$ เป็นเซตปกเปิดของ A ดังนั้น A ต้องเป็นเซตกระชับตามต้องการ □

บทนิยาม 2.3.21. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า A เป็น**เซตเชื่อมโยง** (**connected set**) ก็ต่อเมื่อ ถ้า U และ V เป็นเซตเปิดใน A ที่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ $U \cup V = A$ แล้ว $U = \emptyset$ หรือ $V = \emptyset$*

จากทฤษฎีบท 2.3.19 เราสามารถกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า A เป็นเซตเชื่อมโยง ก็ต่อเมื่อ ถ้า U และ V เป็นเซตเปิดซึ่งไม่มีส่วนร่วมกัน และ $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A$ แล้ว $A \cap U = \emptyset$ หรือ $A \cap V = \emptyset$ จากบทนิยามเราจะได้ว่า $\mathbb{R}$ เป็นเซตเชื่อมโยง และเซต $A = (0, 1) \cup (2, 3)$ ไม่เป็นเซตเชื่อมโยง เพราะ $(0, 1)$ เป็นทั้งเซตเปิดและปิดใน A เป็นต้น

ทฤษฎีบท 2.3.22. *ให้* $A \subset \mathbb{R}$ *และ* $A \subsetneq B \subset \overline{A}$ *ถ้า* A *เป็นเซตเชื่อมโยง แล้ว* B *เป็นเซตเชื่อมโยง*

บทพิสูจน์ ให้ U และ V เป็นเซตเปิดที่ไม่ใช่เซตว่างและไม่มีส่วนร่วมกัน และ $(B \cap U) \cup (B \cap V) = B$ เนื่องจาก $A \subset B$ จึงได้ว่า $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A$ และเนื่องจาก A เป็นเซตเชื่อมโยง จึงได้ว่า $A \cap U = \emptyset$ หรือ $A \cap V = \emptyset$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติว่า $A \cap V = \emptyset$ ซึ่งจะได้ว่า $A \subset U$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $B \subset U$ ให้ $x \in B - A$ ถ้า $x \in V$ จะได้ว่า $x \notin \overline{A}$ เพราะว่า $A \cap V = \emptyset$ ซึ่งขัดแย้งกับ $B \subset \overline{A}$ ดังนั้น $x \in U$ และจะได้ว่า $B \subset U$ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 2.3.23. *ให้* $\mathcal{C}$ *เป็นเซตของเซตเชื่อมโยงที่มีจุด* x_0 *ร่วมกัน แล้ว* $\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ *เป็นเซตเชื่อมโยง*

บทพิสูจน์ ให้ $E = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ และให้ U และ V เป็นเซตเปิดที่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ $(E \cap U) \cup (E \cap V) = E$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ x_0 อยู่ใน U พิจารณาแต่ละ $A \in \mathcal{C}$ จะได้ว่า $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A$ และ $A \cap U \neq \emptyset$ จาก A เป็นเซตเชื่อมโยง จึงได้ว่า $A \cap V = \emptyset$ ทำให้ได้ว่า $A \subset U$ สำหรับทุก $A \in \mathcal{C}$ หรือ $E \cap V = \emptyset$ นั่นเอง ดังนั้น E เป็นเซตเชื่อมโยงตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 2.3.24. *ให้* $A \subset \mathbb{R}$ *จะได้ว่า* A *เป็นเซตเชื่อมโยง ก็ต่อเมื่อ* A *เป็นช่วง*

บทพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตเชื่อมโยง สมมติว่า A ไม่เป็นช่วง นั่นคือ มี $y \in \mathbb{R}$ ที่ไม่อยู่ใน A และมี $x, z \in A$ ที่สอดคล้องกับ $x < y < z$ ให้ $U = (-\infty, y)$ และ $V = (y, \infty)$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $U \cap V = \emptyset$ และ $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A$ แต่ $A \cap U \neq \emptyset$ และ$A \cap V \neq \emptyset$ เพราะว่ามี $x \in A \cap U$ และมี $z \in A \cap U$ ตามลำดับ ซึ่งขัดแย้งกับการเป็นเซตเชื่อมโยงของ A ดังนั้น A ต้องเป็นช่วง

ต่อไปสมมติว่า A เป็นช่วง ก่อนอื่นพิจารณา $A = [a, b]$ เมื่อ $-\infty < a < b < \infty$ และให้ U และ V เป็นเซตเปิดที่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปสมมติให้ a อยู่ใน U จะแสดงว่า $A \cap V = \emptyset$ ให้

$$r = \sup\{c \in \mathbb{R} : [a, c] \subset U \cap A\}$$

สังเกตว่า $a < r \leq b$ เพราะว่า U เป็นเซตเปิด ต่อไปจะแสดงว่า $r = b$ โดยสมมติว่า $r < b$ ถ้า $r \in V \cap A$ จะได้ว่ามี $\delta > 0$ ที่ $(r - \delta, r + \delta) \subset V \cap A$ เนื่องจาก $r - \frac{\delta}{2} < r$ จึงได้ว่า

$[a, r - \frac{\delta}{2}] \subset U \cap A$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $(A \cap U) \cap (A \cap V) \neq \emptyset$ จึงขัดแย้งกับเงื่อนไขที่ว่า U และ V ไม่มีส่วนร่วมกัน ดังนั้น $r = b$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $[a, b] \subset U \cap A$ และ $A \cap V = \emptyset$ ตามต้องการ ดังนั้น A เป็นเซตเชื่อมโยง

สำหรับกรณี A เป็นช่วงประเภทอื่น เราสามารถเขียน A ในรูปยูเนียนของช่วงปิดจำกัดที่มีจุดร่วมกันได้ โดยทฤษฎีบท 2.3.23 จะได้ว่า A เป็นเซตเชื่อมโยงตามต้องการ □

จากทฤษฎีบท 2.3.23 และทฤษฎีบท 2.3.24 เราจะได้ว่า ถ้า I และ J เป็นช่วงที่ $I \cap J \neq \emptyset$ แล้ว $I \cup J$ เป็นช่วงเสมอ

บทนิยาม 2.3.25. *ให้ $C \subset A \subset \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า C เป็น**คอมโพเนนท์** (**component**) ของ A ถ้า C เป็นเชื่อมโยงที่ใหญ่สุดที่เป็นเซตย่อยของ A นั่นคือ ถ้า B และ C เป็นเซตเชื่อมโยงและ $C \subset B \subset A$ แล้ว $B = C$*

ทฤษฎีบท 2.3.26. *ทุกเซตย่อยของจำนวนจริงสามารถเขียนได้ในรูปยูเนียนของคอมโพแนนท์ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วมร่วมกัน*

บทพิสูจน์ ให้ $A \subset \mathbb{R}$ สำหรับแต่ละ $x \in A$ ให้ C_x เป็นคอมโพแนนท์ของ A ที่ $x \in C_x$ ซึ่งจะได้ว่า $A = \bigcup_{x \in A} C_x$ เราเพียงพอที่จะแสดงว่า ถ้า $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ แล้ว $C_x = C_y$

สมมติว่า $z \in C_x \cap C_y \neq \emptyset$ โดยทฤษฎีบท 2.3.23 จะได้ว่า $C = C_x \cup C_y$ เป็นเซตเชื่อมโยงที่เป็นเซตย่อยของ A เนื่องจาก $C_x \subset C \subset A$ และ C_x เป็นคอมโพแนนท์ของ A จึงได้ว่า $C_x = C$ และในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $C_y = C$ ดังนั้น $C_x = C_y$ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 2.3.27. *ทุกเซตเปิดสามารถเขียนได้ในรูปยูเนียนนับได้ของช่วงเปิดที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน*

บทพิสูจน์ ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตเปิด จากทฤษฎีบท 2.3.26 จะได้ว่าเราสามารถเขียน A ได้ในรูปยูเนียนของคอมโพแนนท์ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วมร่วมกัน จากทฤษฎีบท 2.3.24 จะได้ว่าแต่ละคอมโพแนนท์ C ของ A เป็นช่วง เราจะต้องแสดงว่า C เป็นช่วงเปิด ให้ $a \in \mathbb{R}$ เป็นจุดปลายช่วงของ C สมมติว่า $a \in C$ เนื่องจาก A เป็นเซตเปิด จึงมี $\varepsilon > 0$ ที่ $B(a, \varepsilon) \subset A$ ซึ่งจะได้ว่า $B(a, \varepsilon) \cup C$ เป็นเซตย่อยเชื่อมโยงของ A แต่จาก $B(a, \varepsilon) \not\subset C$ จะได้ว่า $C \subsetneq (B(a, \varepsilon) \cup C)$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกับการเป็นคอมโพแนนท์ของ C ดังนั้น $a \notin C$ จึงสรุปได้ว่า C เป็นช่วงเปิด

เนื่องจากแต่ละช่วงเปิดมีจำนวนตรรกยะอยู่ในช่วงเปิดนั้น จึงได้ว่าเซตของช่วงเปิดที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกันเป็นเซตนับได้ ดังนั้น A เป็นยูเนียนนับได้ของช่วงเปิดที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกันตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 2.3.28. *ให้ $\mathcal{C} = \{A \subset \mathbb{R} : A$ เป็นเซตเปิด$\}$ แล้วจะมี $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ ที่เป็นเซตนับได้และ*

$$\bigcup_{A\in\mathcal{B}} A = \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A$$

บทพิสูจน์ ให้ $\mathcal{O} = \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A$ สำหรับแต่ละ $x \in \mathcal{O}$ จะมี $A \in \mathcal{C}$ ที่ $x \in A$ โดยทฤษฎีบท 2.1.3 จะได้ว่ามี $a_x, b_x \in \mathbb{Q}$ ที่ $x \in (a_x, b_x) \subset A$ สังเกตว่าแต่ละ (a_x, b_x) อาจจะสัมพันธ์กับเซต A มากกว่าหนึ่งเซตก็เป็นได้ ให้ $S(a_x, b_x) = \{A \in \mathcal{C} : (a_x, b_x) \subset A\}$ โดยสัจพจน์การเลือกจะมีเซต $\mathcal{B}$ ที่ประกอบด้วยสมาชิกเพียงหนึ่งตัวจากแต่ละ $S(a_x, b_x)$ โดยให้ A_{a_x,b_x} แทนสมาชิกตัวนั้น เนื่องจากสมาชิก A_{a_x,b_x} แต่ละตัวใน $\mathcal{B}$ สัมพันธ์กับคู่อันดับ (a_x, b_x) เพียงหนึ่งคู่เท่านั้น และเซตของคู่อันดับ (a_x, b_x) เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ซึ่งเป็นเซตนับได้ ดังนั้น $\mathcal{B}$ เป็นเซตย่อยนับได้ของ $\mathcal{C}$ และ $\mathcal{O} = \bigcup_{A\in\mathcal{B}} A$ ตามต้องการ □

บทแทรก 2.3.29. *ให้ $\mathcal{I} \neq \emptyset$ และ $\mathcal{C} = \{I_\alpha$ เป็นช่วงที่ไม่ใช่เซตโทน $: \alpha \in \mathcal{I}\}$ แล้วจะมี $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ ที่เป็นเซตนับได้และ*

$$\bigcup_{I\in\mathcal{B}} I = \bigcup_{I\in\mathcal{C}} I$$

บทพิสูจน์ ให้ $a \in \mathbb{R}$ เป็นจุดปลายซ้ายของช่วง $I \in \mathcal{C}$ ที่ a ไม่เป็นจุดภายในของช่วงอื่นใดใน $\mathcal{C}$ เนื่องจาก I ไม่เป็นเซตโทน จึงมี $\varepsilon > 0$ ที่ $(a, a+\varepsilon) \subset I$ เลือกจำนวนตรรกยะ r_a ที่อยู่ใน $(a, a+\varepsilon)$ มาหนึ่งตัว สังเกตว่าถ้า a_0 เป็นจุดปลายซ้ายของบางช่วงใน $\mathcal{C}$ และ $a_0 \in (a, a+\varepsilon)$ แล้ว a_0 เป็นจุดภายในของช่วง I จึงได้ว่าจำนวนตรรกยะแต่ละจำนวนสามารถสัมพันธ์กับจุดปลายซ้ายของช่วงใน $\mathcal{C}$ ที่ไม่เป็นจุดภายในของช่วงอื่นใดในลักษณะนี้อย่างมากเพียงหนึ่งจุดเท่านั้น ดังนั้นเซตของจุดปลายซ้ายของช่วงที่ไม่เป็นจุดภายในของช่วงอื่นใดใน $\mathcal{C}$ เป็นเซตนับได้ ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า เซตของจุดปลายขวาของช่วงที่ไม่เป็นจุดภายในของช่วงอื่นใดใน $\mathcal{C}$ เป็นเซตนับ ดังนั้นเซตของช่วงใน $\mathcal{C}$ ที่มีจุดปลายข้างใดข้างหนึ่งไม่เป็นจุดภายในของช่วงอื่นใดใน $\mathcal{C}$ เป็นเซตนับได้ ให้ $\mathcal{C}_1$ เป็นเซตดังกล่าว และให้ $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C} - \mathcal{C}_1$ เนื่องจากจุดปลายช่วงที่เป็นจำนวนจริงของแต่ละ $I \in \mathcal{C}_2$ จะเป็นจุดภายในของบางช่วงใน $\mathcal{C}_1$ หรือ $\mathcal{C}_2$ จึงได้ว่า

$$\bigcup_{I\in\mathcal{C}} I = \left[\bigcup_{I\in\mathcal{C}_1} I\right] \cup \left[\bigcup_{I\in\mathcal{C}_2} I^o\right]$$

จากทฤษฎีบท 2.3.27 จะได้ว่ามี $\mathcal{C}_3 \subset \mathcal{C}_2$ ที่เป็นเซตนับได้และ $\bigcup_{I\in\mathcal{C}_2} I^o = \bigcup_{I\in\mathcal{C}_3} I^o$
ให้ $\mathcal{B} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_3$ แล้วเราจะได้ว่า $\mathcal{B}$ เป็นเซตนับได้ที่มีสมบัติตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.3.2
2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.3.3
3. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.3.5
4. จงยกตัวอย่างเซต A และ B ซึ่งเป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ที่ $\overline{A \cap B} \subsetneq \overline{A} \cap \overline{B}$
5. ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตมีขอบเขตล่าง จงแสดงว่า $\inf(A) \in \overline{A}$
6. ให้ $A \subset \mathbb{R}$ จงแสดงว่า $A^o = \mathbb{R} - \overline{(A^c)}$
7. ให้ $A \subset \mathbb{R}$ และ x เป็นจุดเกาะกลุ่มของ A จงแสดงว่า มีลำดับ $\langle a_n \rangle$ ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่แตกต่างกันใน A และ $a_n \to x$
8. ให้ $A \subset \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า A' เป็นเซตปิด
9. ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตนับได้ แล้ว A' จำเป็นต้องเป็นเซตนับได้หรือไม่ ถ้า A' ต้องเป็นเซตนับได้ ให้แสดงการพิสูจน์ แต่ถ้าไม่จำเป็นที่จะต้องเป็นเซตนับได้ ให้ยกตัวอย่างค้าน
10. ให้ $\langle A_n \rangle$ เป็นลำดับของเซตปิดมีขอบเขตและ $A_{n+1} \subset A_n$ จงแสดงว่า $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$
11. จงพิสูจน์ว่า ยูเนียนจำกัดของเซตกระชับเป็นเซตกระชับ

2.4 ฟังก์ชันต่อเนื่อง

ในหัวข้อนี้และหัวข้อ 2.5 เมื่อเรากล่าวถึงฟังก์ชัน เราจะหมายถึงฟังก์ชันค่าจริงที่มีโดเมนเป็นเซตย่อยของจำนวนจริงเท่านั้น

บทนิยาม 2.4.1. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ และให้ $a \in A$ เราจะกล่าวว่า f* ***ต่อเนื่องที่*** a (***continuous at*** a) *ถ้าสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้*

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } x \in A \text{ ที่ } |x - a| < \delta$$

และกล่าวว่า f ***ต่อเนื่องบน*** A (***continuous on*** A) *ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก $a \in A$ ในกรณีที่ f ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ เราจะกล่าวเพียงสั้น ๆ ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง*

สังเกตว่า ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน f ขึ้นอยู่กับโดเมนที่กำลังพิจารณา ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{เมื่อ } x \in \mathbb{R} - \mathbb{N} \end{cases}$$

จะเห็นได้ชัดว่า f ไม่ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ แต่เมื่อกำกัด f ลงบน $\mathbb{N}$ (f is restricted to $\mathbb{N}$) จะได้ว่า f ต่อเนื่องบน $\mathbb{N}$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 2.4.2. *ให้ $A, B \subset \mathbb{R}$ และ $\alpha \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า*

1. *ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน A แล้ว $\alpha f, f \pm g$ และ $f \cdot g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน A นอกจากนั้น f/g จะต่อเนื่องที่ทุก $x \in A$ ที่ $g(x) \neq 0$*
2. *ถ้า $f : A \to B$ ต่อเนื่องที่ a และ $g : B \to \mathbb{R}$ ต่อเนื่องที่ $f(a)$ แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด $\square$

จากบทนิยามของความต่อเนื่องของฟังก์ชัน เราอาจกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า f ต่อเนื่องที่ a ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$f[B(a,\delta) \cap A] \subset B(f(a), \varepsilon)$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$B(a,\delta) \cap A \subset f^{-1}[B(f(a), \varepsilon)]$$

เราจึงสามารถกล่าวถึงความต่อเนื่องของ f บน A ในเชิงภาพผกผัน (inverse image) ของเซตเปิดได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4.3. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ และ $f : A \to \mathbb{R}$ จะได้ว่า f ต่อเนื่องบน A ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}[\mathcal{O}]$ เป็นเซตเปิดใน A สำหรับทุกเซตเปิด $\mathcal{O}$*

บทพิสูจน์ ให้ f ต่อเนื่องบน A และ $\mathcal{O}$ เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{R}$ สำหรับแต่ละ $x \in f^{-1}[\mathcal{O}]$ จะมี $\varepsilon > 0$ ที่ $B(f(x), \varepsilon) \subset \mathcal{O}$ จาก f ต่อเนื่องที่ x จะได้ว่ามี $\delta_x > 0$ ที่ทำให้

$$f[B(x,\delta_x) \cap A] \subset B(f(x), \varepsilon)$$

ซึ่งแสดงว่า $B(x,\delta_x) \cap A \subset f^{-1}[\mathcal{O}]$ เราจึงได้ว่า

$$f^{-1}[\mathcal{O}] = \bigcup_{x \in f^{-1}[\mathcal{O}]} (B(x,\delta_x) \cap A) = \left(\bigcup_{x \in f^{-1}[\mathcal{O}]} B(x,\delta_x) \right) \cap A$$

โดยทฤษฎีบท 2.3.19 เราได้ว่า $f^{-1}[\mathcal{O}]$ เป็นเซตเปิดใน A

ต่อไปสมมติให้ $f^{-1}[\mathcal{O}]$ เป็นเซตเปิดใน A สำหรับทุกเซตเปิด $\mathcal{O}$ ให้ $x \in A$ และ $\varepsilon > 0$ จากสมมติฐานจะได้ว่า $f^{-1}[B(f(x),\varepsilon)]$ เป็นเซตเปิดใน A นั่นคือ มีเซตเปิด $\mathcal{U}$ (ใน $\mathbb{R}$) ที่ $\mathcal{U} \cap A = f^{-1}[B(f(x),\varepsilon)]$ เลือก $\delta > 0$ ที่ทำให้ $B(x,\delta) \subset \mathcal{U}$ แล้วจะได้ว่า

$$f[B(x,\delta) \cap A] \subset B(f(x),\varepsilon)$$

ซึ่งแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ x ดังนั้น f ต่อเนื่องบน A ตามต้องการ $\square$

ทฤษฎีบท 2.4.4. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตกระชับ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน A แล้ว $f[A]$ เป็นเซตกระชับ*

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน A และให้ $\mathcal{C} = \{\mathcal{O}_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ เป็นเซตปกเปิดของ $f[A]$ จากทฤษฎีบท 2.4.3 จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $\alpha \in \mathcal{I}$ เซต $f^{-1}[\mathcal{O}_\alpha]$ เป็นเซตเปิดใน A จึงมีเซตเปิด U_α ที่ $f^{-1}[\mathcal{O}_\alpha] = U_\alpha \cap A$ จาก $\mathcal{C}$ เป็นเซตปกเปิดของ $f[A]$ จะได้ว่า $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ เป็นเซตปกเปิดของ A เนื่องจาก A เป็นเซตกระชับ จึงมีเซตย่อยจำกัด $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}\} \subset \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ ที่ $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha_k}$ ทำให้ได้ว่า

$$f[A] \subset \bigcup_{k=1}^{n} f[U_{\alpha_k} \cap A] \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{\alpha_k}$$

ซึ่งแสดงว่า $\{\mathcal{O}_{\alpha_1}, \mathcal{O}_{\alpha_2}, \ldots, \mathcal{O}_{\alpha_n}\}$ เป็นเซตปกย่อยจำกัดของ $f[A]$ ดังนั้น $f[A]$ เป็นเซตกระชับตามต้องการ $\square$

ทฤษฎีบทค่าสุดขีด (The extreme value theorem)

ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตกระชับ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน A แล้วจะมี $a, b \in A$ ที่มีสมบัติว่า $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ สำหรับทุก $x \in A$

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2.4.4 จะได้ว่า $f[A]$ เป็นเซตปิดมีขอบเขต จากบทแทรก 2.3.9 จะได้

ว่า $f[A]$ มีสมาชิกค่ามากสุดและสมาชิกค่าน้อยสุด นั่นคือ มี $a, b \in A$ ที่ $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ สำหรับทุก $x \in A$ ตามต้องการ □

นอกจากความต่อเนื่องของฟังก์ชันจะคงสภาพของเซตกระชับให้ยังคงเป็นเซตกระชับภายใต้การส่งของฟังก์ชัน แล้วยังรักษาความเป็นเซตเชื่อมโยงอีกด้วย

ทฤษฎีบท 2.4.5. *ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I แล้ว $f[I]$ เป็นช่วง*

บทพิสูจน์ ให้ $f : I \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เราเพียงพอที่จะแสดงว่า ถ้า $a, b \in I$ โดยที่ $f(a) < f(b)$ แล้ว $[f(a), f(b)] \subset f[I]$

สมมติว่ามี $a, b \in I$ โดยที่ $f(a) < f(b)$ แต่ $[f(a), f(b)] \not\subseteq f[I]$ นั่นคือ มี z ซึ่ง $f(a) < z < f(b)$ และ $z \notin f[I]$ เราจะได้ว่า $f[I] \subset (-\infty, z) \cup (z, \infty)$ และ

$$I = f^{-1}[(-\infty, z)] \cup f^{-1}[(z, \infty)]$$

โดยทฤษฎีบท 2.4.3 จะได้ว่า $f^{-1}[(-\infty, z)]$ และ $f^{-1}[(z, \infty)]$ เป็นเซตเปิดใน I ซึ่งทั้งคู่ไม่มีส่วนร่วมกันและไม่เป็นเซตว่างเพราะว่า $a \in f^{-1}[(-\infty, z)]$ และ $b \in f^{-1}[(z, \infty)]$ ซึ่งขัดแย้งกับการเป็นเซตเชื่อมโยงของ I ดังนั้น ถ้า $a, b \in I$ โดยที่ $f(a) < f(b)$ แล้ว $[f(a), f(b)] \subset f[I]$ ตามต้องการ □

ผลจากทฤษฎีบท 2.4.5 เราจะได้ทฤษฎีบทที่พบเห็นมาแล้วในวิชาแคลคูลัส ซึ่งมีชื่อเป็นรู้จักกันทั่วไปว่า ***ทฤษฎีบทค่ากลาง***

ทฤษฎีบทค่ากลาง (The intermediate value theorem)

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ ถ้า z เป็นจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ แล้วจะมี $c \in (a, b)$ ที่ $f(c) = z$

บทนิยาม 2.4.6. *ให้ f เป็นฟังก์ชันบนโดเมน A เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่องเอกรูปบน** A (**uniformly continuous function on** A) ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $x, y \in A$ ที่สอดคล้องกับ $|x - y| < \delta$

เราเห็นได้ชัดว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเอกรูปบน A แล้ว f ต้องต่อเนื่องบน A แต่ในทางกลับกันนั้นอาจไม่เป็นจริง ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ แต่ไม่ต่อเนื่องเอกรูปบน $\mathbb{R}$ (พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด) นอกจากนี้ตัวอย่างนี้ยังแสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันผลคูณของฟังก์ชันต่อเนื่องเอกรูปสองฟังก์ชันอาจไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเอกรูป เพราะฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ เป็นกำลังสองของ $g(x) = x$ ซึ่ง g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเอกรูปบน $\mathbb{R}$ เป็นต้น คำถามที่น่าสนใจคือ เราจะทราบได้อย่างไรว่า เมื่อใดฟังก์ชันที่ต่อเนื่องนั้นจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเอกรูปด้วย ซึ่งทฤษฎีบท 2.4.7 จะเป็นส่วนหนึ่งของคำตอบนี้

ทฤษฎีบท 2.4.7. *ถ้า A เป็นเซตกระชับและ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน A แล้ว f ต่อเนื่องเอกรูปบน A*

บทพิสูจน์ ให้ $\varepsilon > 0$ สำหรับแต่ละ $x \in A$ จะมี $\delta_x > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.6}$$

สำหรับทุก $y \in B(x, \delta_x) \cap A$ ให้ $B_x = B(x, \delta_x/2)$ แล้วจะได้ว่า $\{B_x, x \in A\}$ เป็นเซตปกเปิดของ A เนื่องจาก A เป็นเซตกระชับ จึงมี $\{B_{x_1}, B_{x_2}, \ldots, B_{x_n}\} \subset \{B_x, x \in A\}$ ที่ $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_{x_k}$

ให้ $\delta = \frac{1}{2}\min\{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_n}\}$ และให้ $x, y \in A$ โดยที่ $|x - y| < \delta$ จะได้ว่า $x \in B_{x_k}$ สำหรับบาง $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ และ

$$|y - x_k| \leq |y - x| + |x - x_k| < \delta + \frac{\delta_{x_k}}{2} \leq \frac{\delta_{x_k}}{2} + \frac{\delta_{x_k}}{2} = \delta_{x_k}$$

จาก (2.6) จะได้ว่า

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเอกรูปบน A □

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.4.2

2. ให้ f เป็นฟังก์ชันบน A และ $a \in A$ จงพิสูจน์ว่า f ต่อเนื่องที่ a ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ สำหรับทุกลำดับ $\langle x_n \rangle$ ที่สมาชิกทุกตัวอยู่ใน A และ $x_n \to a$

3. ให้ A และ B เป็นเซตย่อยของจำนวนจริง และให้ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันผกผัน f^{-1} จงพิสูจน์ว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน B

4. จงหาเซตของจุด x_0 ทั้งหมดที่ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x_0 เมื่อ

   (i) $f(x) = \begin{cases} x \text{ เมื่อ } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ เมื่อ } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

   (ii) $f(x) = \begin{cases} x \text{ เมื่อ } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ a\sin\left(\frac{1}{b}\right) \text{ เมื่อ } x = \frac{a}{b} \end{cases}$

   โดยที่ $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ และ ห.ร.ม. ของ a และ b เป็น 1

2.5 ลำดับและอนุกรมของฟังก์ชัน

บทนิยาม 2.5.1. *ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบน A และให้ f เป็นฟังก์ชันบน A เราจะกล่าวว่า $\langle f_n \rangle$ **ลู่เข้าแบบจุดต่อจุด** (**converges pointwise**) สู่ f บน A ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $f_n \to f$ ถ้า*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

สำหรับทุก $x \in A$ นั่นคือ สำหรับแต่ละ $x \in A$ และ $\varepsilon > 0$ จะมี $N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก } n \geq N_{x,\varepsilon}$$

*และเรียก f นี้ว่า **ฟังก์ชันลิมิต** (**limit function**) ของ $\langle f_n \rangle$ และเราจะกล่าวว่า $\langle f_n \rangle$ **ลู่เข้าแบบเอกรูป** (**converges uniformly**) สู่ f บน A ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ สำหรับทุก $x \in A$ เมื่อ $n \geq N_\varepsilon$*

*นอกจากนี้เราจะกล่าวว่า $\langle f_n \rangle$ เป็น**ลำดับเพิ่มของฟังก์ชัน** (**increasing sequence of functions**) ถ้า $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ สำหรับทุก $x \in A$ และทุก $n \in \mathbb{N}$ และจะกล่าวว่า $\langle f_n \rangle$ เป็น**ลำดับลดของฟังก์ชัน** (**decreasing sequence of functions**) ถ้า $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ สำหรับทุก $x \in A$ และทุก $n \in \mathbb{N}$*

เราแสดงได้ไม่ยากว่า ลำดับของฟังก์ชัน $f_n(x) = x^n$ ลู่เข้าสู่ 0 แบบจุดต่อจุดบน $[0, 1)$ แต่ไม่ลู่เข้าแบบเอกรูปบน $[0, 1)$ (แสดงเป็นแบบฝึกหัด) นอกจากนี้ยังได้ว่า $f_n \to f$ บน $[0, 1]$ เมื่อ $f(x) = 0$ บน $[0, 1)$ และ $f(1) = 1$ ซึ่ง f_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0, 1]$ แต่ฟังก์ชันลิมิต f

ไม่ต่อเนื่องที่ 1 ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะให้เงื่อนไขที่จะการันตีว่า ทุกลำดับของฟังก์ชันต่อเนื่องที่สอดคล้องกับเงื่อนไขนี้จะมีฟังก์ชันลิมิตเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 2.5.2. *ถ้า $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันต่อเนื่องที่ลู่เข้าแบบเอกรูปสู่ฟังก์ชันค่าจริง f บน A แล้ว f ต่อเนื่องบน A*

บทพิสูจน์ ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\langle f_n \rangle$ ลู่เข้าแบบเอกรูปสู่ f บน A จึงมี $N \in \mathbb{N}$ ที่สำหรับทุก $y \in A$ ถ้า $n \geq N$ แล้ว

$$|f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.7}$$

ให้ $x \in A$ เนื่องจาก f_N เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงมี $\delta_x > 0$ ที่ทำให้

$$|f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.8}$$

สำหรับทุก $y \in B(x, \delta_x) \cap A$ ดังนั้นถ้า $y \in B(x, \delta_x) \cap A$ แล้วจาก (2.7) และ (2.8) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ x เนื่องจาก x เป็นสมาชิกใด ๆ ใน A จึงได้ว่า f ต่อเนื่องบน A ตามต้องการ $\square$

บทนิยาม 2.5.3. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$* ***ฟังก์ชันแคแรกเทอริสติก*** *(**characteristic function**) ของ A คือ ฟังก์ชัน χ_A ที่นิยามโดย*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x \in A \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin A \end{cases}$$

จากบทนิยาม เราจะได้ว่า $\chi_\emptyset$ เป็นฟังก์ชันคงตัวศูนย์ และ $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$ นอกจากนี้เมื่อ $B \subset \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B \quad \text{และ} \quad \chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$$

บทนิยาม 2.5.4. *เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f บนช่วง I เป็น**ฟังก์ชันขั้นบันได** (**step function**) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $a_1, a_2, \ldots, a_n$ และช่วง $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ที่*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}(x)$$

สำหรับทุก $x \in I$

สังเกตว่า ช่วง A_k ในบทนิยาม 2.5.4 สามารถเป็นเซตโทนได้ และฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ สามารถเขียน I ให้อยู่ในรูปยูเนียนจำกัดของช่วงที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกันโดยที่ f เป็นฟังก์ชันคงตัวบนแต่ละช่วงเหล่านั้น

ทฤษฎีบท 2.5.5. *ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้วจะมีลำดับของฟังก์ชันขั้นบันได $\langle \psi_n \rangle$ และ $\langle \Psi_n \rangle$ ที่ลู่เข้าสู่ f แบบเอกรูปบน $[a, b]$ โดยที่ $\psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x), \Psi_{n+1}(x) \leq \Psi_n(x)$ และ $\psi_n(x) \leq f(x) \leq \Psi_n(x)$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ และทุก $n \in \mathbb{N}$*

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2.4.7 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเอกรูปบน $[a, b]$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ จะมี $\delta_n > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2n}$$

สำหรับทุก $x, y \in [a, b]$ ที่ $|x - y| < \delta_n$

ให้ $N_n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $N_n > \frac{b-a}{\delta_n}$ และให้ $x_k = a + \frac{(b-a)k}{N_n}$ สำหรับ $k = 0, 1, 2, \ldots, N_n$ นอกจากนี้ให้ $A_k = [x_{k-1}, x_k)$ สำหรับ $k = 1, 2, \ldots, N_n - 1$ และ $A_{N_n} = [x_{N_n - 1}, b]$ จะเห็นได้ว่า $A_1, A_2, \ldots, A_{N_n}$ เป็นช่วงที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{N_n} = [a, b]$ สำหรับแต่ละ $k = 1, 2, \ldots, N_n$ ให้

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in A_k\} \text{ และ } M_k = \sup\{f(x) : x \in A_k\}$$

จะได้ว่า ถ้า $x \in A_k$ แล้ว

$$|f(x) - m_k| \leq |f(x) - f(x_{k-1})| + |f(x_{k-1}) - m_k| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

และในทำนองเดียวกัน $|f(x) - M_k| < \frac{1}{n}$ นิยามให้

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{N_n} m_k \chi_{A_k}(x) \text{ และ } \Psi_n(x) = \sum_{k=1}^{N_n} M_k \chi_{A_k}(x)$$

เราจะได้ลำดับของ ψ_n และ Ψ_n ที่มีสมบัติตามต้องการ □

บทนิยาม 2.5.6. *ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบน A และให้ $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ สำหรับแต่ละ $x \in A$ และ $n \in \mathbb{N}$ เราจะเรียก $\langle s_n \rangle$ ว่า **ลำดับของผลบวกย่อย** (**sequence of partial sums**) ของอนุกรมของฟังก์ชัน $\sum f_n$ เราจะกล่าวว่า $\sum f_n$ เป็น*

1. ***อนุกรมลู่เข้า** (**convergent series**) ถ้ามีฟังก์ชันค่าจริง f บนโดเมน A ที่ $s_n(x) \to f(x)$ สำหรับทุก $x \in A$ และจะเขียนแทนด้วย $\sum f_n = f$*

2. ***อนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์** (**absolutely convergent series**) บน A ถ้า $\sum |f_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้าบน A*

3. ***อนุกรมลู่เข้าแบบเอกรูป** (**uniformly convergent series**) บน A ถ้า $\langle s_n \rangle$ ลู่เข้าแบบเอกรูปบน A*

จากบทนิยามสังเกตว่า ทุกอนุกรมที่ลู่เข้าสัมบูรณ์เป็นอนุกรมลู่เข้า แต่ในทางกลับกันอาจไม่จริง นั่นคือ อนุกรมที่ลู่เข้าไม่จำเป็นที่จะต้องลู่เข้าสัมบูรณ์ ตัวอย่างเช่น ให้ f_n เป็นฟังก์ชันคงตัว $(-1)^n n^{-1}$ นั่นคือ $f_n(x) = (-1)^n n^{-1}$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\sum f_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแต่ไม่ลู่เข้าสัมบูรณ์

ทฤษฎีบท 2.5.7. *ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันต่อเนื่องบน A ถ้า $\sum f_n$ ลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน f แบบเอกรูปบน A แล้ว f ต่อเนื่องบน A*

บทพิสูจน์ เป็นผลโดยตรงของทฤษฎีบท 2.5.2 □

ทฤษฎีบท 2.5.8 ต่อไปนี้เป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์มากในการตรวจสอบการลู่เข้าแบบเอกรูปของอนุกรมของฟังก์ชัน โดยเราไม่จำเป็นต้องรู้ว่าฟังก์ชันที่อนุกรมลู่เข้าคือฟังก์ชันอะไร

ทฤษฎีบท 2.5.8. *อนุกรม $\sum f_n$ ลู่เข้าแบบเอกรูปบน A ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้*

$$|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $x \in A$ และ $m, n \geq N$

บทพิสูจน์ ก่อนอื่นสมมติให้ $\sum f_n$ ลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน f แบบเอกรูปบน A นั่นคือ ลำดับของอนุกรมย่อย s_n ลู่เข้าสู่ f แบบเอกรูปบน A และให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่ามี $N \in \mathbb{N}$ ที่

$$|s_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

สำหรับทุก $x \in A$ และทุก $n \geq N$ ทำให้ได้ว่า ถ้า $m, n \geq N$ แล้ว

$$|s_n(x) - s_m(x)| \leq |s_n(x) - f(x)| + |f(x) - s_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

สำหรับทุก $x \in A$

ต่อไปสมมติว่า แต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $|s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon$ สำหรับทุก $x \in A$ และทุก $m, n \geq N$ จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $x \in A$ ลำดับ $\langle s_n(x) \rangle$ เป็นลำดับโคชี ซึ่งจะลู่เข้าสู่บางจำนวนจริง สำหรับแต่ละ $x \in A$ นิยามให้

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$$

เราจะต้องแสดงว่า $\sum f_n$ ลู่เข้าสู่ f แบบเอกรูปบน A

ให้ $\varepsilon > 0$ และให้ $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $|s_n(x) - s_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก $x \in A$ และทุก $m, n \geq N$ สำหรับแต่ละ $x \in A$ จะมี $m_x > N$ ที่

$$|f(x) - s_{m_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} |f(x) - s_n(x)| &\leq |f(x) - s_{m_x}(x)| + |s_{m_x}(x) - s_n(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \tag{2.9}$$

สำหรับทุก $n \geq N$ เนื่องจากค่าของ N ที่ทำให้อสมการ (2.9) เป็นจริงเป็นอิสระจากค่าของ x จึงได้ว่า $\langle s_n \rangle$ ลู่เข้าสู่ f แบบเอกรูปตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 2.5.9 (Weierstrass M-Test). *ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบน A และ $\langle M_n \rangle$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกที่ $|f_n(x)| \leq M_n$ สำหรับทุก $x \in A$ และทุก $n \in \mathbb{N}$ ถ้า $\sum M_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum f_n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์และแบบเอกรูปบน A*

บทพิสูจน์ สำหรับการพิสูจน์ว่า $\sum f_n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์บน A ขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด ในที่นี้เราจะแสดงว่า $\sum f_n$ ลู่เข้าแบบเอกรูปบน A

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\sum M_n$ ลู่เข้า จึงมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $\sum_{k=N}^{n} M_k < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$

ให้ $\langle s_n \rangle$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของ $\sum f_n$ เราจะได้ว่า

$$|s_n(x) - s_m(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| < \sum_{k=N}^{n} M_k < \varepsilon$$

สำหรับทุก $x \in A$ และทุก $n > m \geq N$ โดยทฤษฎีบท 2.5.8 จะได้ว่า $\sum f_n$ ลู่เข้าแบบเอกรูปบน A ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงแสดงว่า ลำดับของฟังก์ชัน $f_n(x) = x^n$ ลู่เข้าสู่ 0 แบบจุดต่อจุดบน $[0, 1)$ แต่ไม่ลู่เข้าแบบเอกรูปบน $[0, 1)$

2. จากเงื่อนไขของทฤษฎีบท 2.5.9 จงพิสูจน์ $\sum f_n$ ลู่เข้าสัมบูรณ์บน A

3. สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx^2}}$ เมื่อ $x \in [0, 1]$ จงแสดงว่า $f_n(x) \to 0$ แบบเอกรูปบน $[\delta, 1]$ เมื่อ $0 < \delta < 1$ แต่ไม่ลู่เข้าแบบเอกรูปบน $[0, 1]$

4. จงแสดงว่า อนุกรม $\sum \frac{\cos nx}{n^2}$ ลู่เข้าแบบเอกรูปบน $\mathbb{R}$

5. ให้ $a \in (0, 1)$ และ b เป็นจำนวนเต็มคี่ ***ฟังก์ชันไวเออร์สตราสส์*** (***The Weierstrass function***) f คือฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = \sum a^n \cos(b^n \pi x)$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$

6. ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบน A และให้ $\langle g_n \rangle$ เป็นลำดับที่เกิดจากการเรียงสับเปลี่ยนของสมาชิกในลำดับ $\langle f_n \rangle$ จงแสดงว่า ถ้า $\sum f_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์บน A แล้ว $\sum f_n(x) = \sum g_n(x)$ สำหรับทุก x ใน A

7. ให้ $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ให้ $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $g(h(n)) = 2^{-n}$ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ จึงได้ว่า $\sum_{r \in \mathbb{Q}} g(r)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์เช่นกัน นิยาม $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดย

$$f(x) = \sum_{r \in \mathbb{Q} : r < x} g(r)$$

   (i) จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันนิยามดีแล้ว

   (ii) จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มแท้

(iii) จงแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ทุกจุดตรรกยะ (คำแนะนำ : ให้ $r \in \mathbb{Q}$ และ n เป็นจำนวนนับที่ $h(n) = r$ แล้วแสดงว่า $f(x) \geq f(r) + 2^{-n}$ สำหรับทุก $x > r$)

(iv) ให้ $n \in \mathbb{N}$ และให้ $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$f_n(x) = \sum_{r \in \mathbb{Q} : r < x, g(r) \geq 2^{-n}} g(r)$$

จงแสดงว่า f_n ต่อเนื่องที่ทุกจุดอตรรกยะ

(v) จงแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ทุกจุดอตรรกยะ (คำแนะนำ : แสดงว่า $|f(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n}$ เมื่อ x เป็นจำนวนอตรรกยะ)

2.6 เซตโบเรลและเซตคันเตอร์

เราจะปิดท้ายบทนี้ด้วยการทำความรู้จักกับ เซตโบเรลและเซตคันเตอร์ ซึ่งจะเป็นตัวอย่างสำคัญในการศึกษาบทต่อ ๆ ไป

บทนิยาม 2.6.1. *ให้ $\mathcal{B}$ เป็นพีชคณิตซิกมาของเซตที่ก่อกำเนิดโดยช่วงเปิด เราจะเรียกสมาชิกใน $\mathcal{A}$ ว่า* ***เซตโบเรล*** (*Borel set*)

จากบทนิยามจะได้ว่า เซตเปิด เซตปิด เซตที่ได้จากการยูเนียนนับได้ของเซตเปิดและเซตปิดและเซตที่ได้จากการอินเตอร์เซกชันนับได้ของเซตเปิดและเซตปิดเป็นเซตโบเรลทั้งสิ้น เราเรียกเซตโบเรลที่ได้จากการอินเตอร์เซกชันนับได้ของเซตเปิดว่า ***เซต*** G_δ และเรียกเซตโบเรลที่ได้จากการยูเนียนนับได้ของเซตปิดว่า ***เซต*** F_σ โดยเราใช้สัญลักษณ์ G และ F แทนเซตเปิดและเซตปิดตามลำดับ และใช้สัญลักษณ์ δ แทนการอินเตอร์เซกชันนับได้ และ σ แทนการยูเนียนนับได้ เช่น เซต $F_{\sigma\delta}$ เป็นเซตที่ได้จากอินเตอร์เซกชันนับได้ของเซต F_σ และ $G_{\delta\sigma\delta}$ เป็นเซตที่ได้จากอินเตอร์เซกชันนับได้ของเซต $G_{\delta\sigma}$ และเรายังสามารถสร้างเซตโบเรลด้วยวิธีนี้ต่อไปเรื่อย ๆ เป็นต้น นอกจากนี้ยังมีเซตโบเรลอีกมากมายที่ไม่ได้มาจากการสร้างเช่นนี้

ทฤษฎีบท 2.6.2. *ให้ f เป็นฟังก์ชันบน $\mathbb{R}$ และให้ $A = \{x \in \mathbb{R} : f$ ต่อเนื่องที่ $x\}$ จะได้ว่า A เป็นเซต G_δ*

บทพิสูจน์ สำหรับแต่ละ $x \in A$ และ $n \in \mathbb{N}$ จะมี $\delta_{x,n} > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n} \quad \text{สำหรับทุก } y \in B(x, \delta_{x,n})$$

ให้ $\mathcal{O}_n = \bigcup_{x\in A} B(x,\delta_{x,n})$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $A \subset \mathcal{O}_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $A \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $B \subset A$ เมื่อ $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$
ให้ $z \in B$ และ $\varepsilon > 0$ เลือก $n \in \mathbb{N}$ ที่ $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ เนื่องจาก $z \in \mathcal{O}_n$ จึงมีบาง $x \in A$ ที่ $z \in B(x,\delta_{x,n})$ ให้ δ เป็นจำนวนจริงบวกที่ทำให้ $B(z,\delta) \subset B(x,\delta_{x,n})$ จะได้ว่า ถ้า $y \in B(z,\delta)$ แล้ว

$$\begin{aligned}|f(y)-f(z)| &\le |f(y)-f(x)| + |f(x)-f(z)| \\ &< \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{n} < \varepsilon\end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ z ดังนั้น $B \subset A$ ตามต้องการ $\square$

ต่อไปเราจะมาทำความรู้จักกับเซตที่มีสมบัติน่าสนใจหลายประการและเป็นหนึ่งในตัวอย่างที่จะมีการอ้างถึงบ่อยครั้ง โดยเซตนี้เป็นเซตย่อยของช่วงปิด $[0,1]$ ที่ได้มาจากการสร้างดังต่อไปนี้ เริ่มต้นจากแบ่งช่วงปิด $[0,1]$ ออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน แล้วตัดช่วงเปิดตรงกลางออก นั่นคือ ตัดช่วงเปิด $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ ออก และเรียกเซตของส่วนที่เหลืออยู่ว่า C_1 นั่นคือ

$$C_1 = [0,\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},1]$$

ขั้นตอนที่สอง แบ่งแต่ละช่วงที่เหลือออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน แล้วตัดช่วงเปิดตรงกลางของแต่ละช่วงออก นั่นคือ ตัดช่วงเปิด $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ และช่วงเปิด $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$ ออก และเรียกเซตของส่วนที่เหลืออยู่ว่า C_2 ซึ่ง

$$C_2 = [0,\tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9},\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},\tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9},1]$$

ขั้นตอนต่อไป แบ่งแต่ละช่วงที่เหลือออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน แล้วตัดช่วงเปิดตรงกลางของแต่ละช่วงออก และเรียกเซตของส่วนที่เหลืออยู่ว่า C_3 และกระทำซ้ำเช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ โดยในขั้นตอนที่ n เราจะได้เซต C_n ซึ่งเป็นยูเนียนของช่วงปิด 2^n ช่วง และในขั้นตอนที่ $n+1$ เราจะแบ่งแต่ละช่วงที่อยู่ใน C_n ออกเป็น 3 ส่วนเท่า ๆ กัน แล้วตัดช่วงเปิดตรงกลางของแต่ละช่วงออก และเรียกเซตที่ได้จากการยูเนียนของช่วงปิดที่เหลืออยู่ว่า C_{n+1} โดยเซตของจุดในช่วง $[0,1]$ ที่ไม่ถูกตัดออกในขั้นตอนใด ๆ ในการสร้างดังกล่าวนี้มีชื่อเรียกว่า ***เซตคันเตอร์***

บทนิยาม 2.6.3. ***เซตคันเตอร์*** *(Cantor set หรือ Cantor ternary set) คือ เซต* $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ *เมื่อ* C_n *เป็นเซตที่นิยามตามข้างต้น*

สังเกตว่า ผลรวมของความยาวช่วงที่ถูกตัดออกในการสร้างเซตคันเตอร์มีค่าเท่ากับ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-2/3}\right) = 1$$

ซึ่งแสดงว่า เซตคันเตอร์ไม่สามารถบรรจุช่วงที่ไม่ใช่เซตโทน และดูเหมือนว่าทุกสมาชิกของเซตคันเตอร์จะเป็นจุดปลายของช่วงที่ถูกตัดออกซึ่งเป็นเซตนับได้ แต่ความจริงไม่ได้เป็นเช่นนั้น เพราะถ้าเป็นเช่นนั้น เซตคันเตอร์จะเป็นเซตนับได้ ซึ่งทฤษฎีบท 2.6.5 ข้างล่างนี้จะแสดงให้เห็นว่า แท้จริงแล้วเซตคันเตอร์สมมูลกับช่วงปิด $[0,1]$ ดังนั้นเซตคันเตอร์เป็นเซตนับไม่ได้ เนื่องจากในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.6.5 นั้น เราต้องใช้ความจริงเกี่ยวกับเลขฐานสองและเลขฐานสาม จึงขอทบทวนเรื่องดังกล่าวก่อน

เราสามารถแสดงได้ว่า ทุก $x \in [0,1]$ สามารถเขียนได้ในรูป $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ โดยที่ $a_n \in \{0,1,2\}$ หรือเขียนในรูปเลขฐานสาม (ternary expansion) ได้เป็น

$$x = (0.a_1a_2a_3\ldots)_3$$

เช่น $\frac{1}{4} = (0.020202\ldots)_3 = (0.\dot{0}\dot{2})_3$ และ $\frac{1}{3} = (0.1)_3$ ซึ่งยังเขียนได้อีกแบบคือ

$$\frac{1}{3} = (0.022222\ldots)_3 = (0.0\dot{2})_3$$

เป็นต้น ดังนั้นจำนวนบางจำนวนสามารถเขียนได้ในรูปเลขฐานสาม 2 แบบ กล่าวคือ ลงท้ายด้วย 0 ซ้ำและลงท้ายด้วย 2 ซ้ำ เช่น $\frac{1}{3} = (0.1)_3 = (0.0\dot{2})_3$ และ $\frac{2}{9} = (0.02)_3 = (0.02\dot{0})_3 = (0.01\dot{2})_3$ เป็นต้น ในทำนองเดียวกัน ทุก $x \in [0,1]$ สามารถเขียนได้ในรูป $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$ โดยที่ $b_n \in \{0,1\}$ หรือเขียนในรูปเลขฐานสอง (binary expansion) ได้เป็น

$$x = (0.b_1b_2b_3\ldots)_2$$

โดยจำนวนที่ลงท้ายด้วย 0 สามารถเขียนได้อีกแบบด้วยการลงท้ายด้วย 1 ซ้ำ เช่น $\frac{1}{2} = (0.1\dot{0})_2 = (0.0\dot{1})_2$ และ $\frac{3}{4} = (0.11\dot{0})_2 = (0.10\dot{1})_2$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 2.6.4. *ให้ $x \in [0,1]$ จะได้ว่า $x \in C$ ก็ต่อเมื่อ x สามารถเขียนได้ในรูปเลขฐานสามที่ไม่มี 1 ปรากฏได้*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด $\square$

จากทฤษฎีบท 2.6.4 เราจะได้ว่า ทุกสมาชิกในเซตคันเตอร์สามารถเขียนได้ในรูปเลขฐานสามที่ไม่มี 1 ปรากฏอยู่ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 2.6.5. *เซตคันเตอร์สมมูลกับ* $[0, 1]$

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 1.3.10 (Cantor-Bernstein-Schroeder Theorem) เราเพียงพอที่จะแสดงว่า มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $[0, 1]$ ไปยังเซตคันเตอร์ C เพราะว่า $C \subset [0, 1]$

เนื่องจากทุก $x \in [0, 1]$ สามารถเขียนได้ในรูปเลขฐานสองที่ไม่ลงท้ายด้วย 0 ซ้ำได้เพียงแบบเดียว เช่น $0.5 = (0.1)_2 = (0.0\dot{1})_2$ เราจะเลือก $(0.0\dot{1})_2$ ให้เป็นตัวแทนของ 0.5 ในรูปของเลขฐานสอง เป็นต้น ให้ $f : [0, 1] \to C$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$f(x) = (0.b_1b_2b_3\ldots)_3$$

เมื่อ $x = (0.a_1a_2a_3\ldots)_2$ เป็นตัวแทนที่ไม่ลงท้ายด้วย 0 ซ้ำ และ $b_n = 2a_n \in \{0, 2\}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งตามต้องการ $\square$

เนื่องจากแต่ละ $x \in C$ สามารถเขียนอยู่ในรูปเลขฐานสามที่ไม่มี 1 ปรากฏอยู่เลยได้เพียงแบบเดียว เราจึงสามารถนิยาม $f : C \to [0, 1]$ โดยให้

$$f(x) = (0.b_1b_2b_3\ldots)_2$$

เมื่อ $x = (0.a_1a_2a_3\ldots)_3$ เป็นตัวแทนที่ไม่มี 1 ปรากฏอยู่ และ $b_n = a_n/2$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงจาก C ไปบน $[0, 1]$ และเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ต่อไปเราจะแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มแท้

ให้ $x < y$ เป็นสมาชิกใน C โดยให้ $x = (0.x_1x_2x_3\ldots)_3$ และ $y = (0.y_1y_2y_3\ldots)_3$ เป็นตัวแทนที่ไม่มี 1 ปรากฏอยู่เลย ให้ k เป็นตำแหน่งแรกที่ $x_k \neq y_k$ นั่นคือ $x_n = y_n$ สำหรับ $n = 1, \ldots, k-1$ เนื่องจาก $x < y$ จึงได้ว่า $x_k = 0$ และ $y_k = 2$ ดังนั้น $k-1$ ตำแหน่งแรกของ $f(x)$ และ $f(y)$ มีค่าเท่ากัน และตำแหน่งที่ k ของ $f(x)$ เท่ากับ 0 แต่ตำแหน่งที่ k ของ $f(y)$ เท่ากับ 1 จึงได้ว่า $f(x) < f(y)$ ยกเว้นเสียแต่ว่าตั้งแต่ตำแหน่งที่ k เป็นต้นไปของ x คือ $x_kx_{k+1}\ldots = 0\dot{2}$ และตั้งแต่ตำแหน่งที่ k เป็นต้นไปของ y คือ $y_ky_{k+1}\ldots = 2\dot{0}$ ซึ่งในกรณีนี้จะได้ว่า $f(x) = f(y)$ เราสามารถแสดงได้ว่า x และ y ที่ทำให้ $f(x) = f(y)$ นี้เป็นจุดปลายของช่วง (x, y) ที่ถูกตัดออกไปในการสร้างเซตคันเตอร์นั่นเอง

บทนิยาม 2.6.6. *ให้* $f : [0, 1] \to [0, 1]$ *นิยามดังนี้ สำหรับ* $x \in C$ *ให้* $f(x) = (0.b_1b_2b_3\ldots)_2$ *เมื่อ* $x = (0.a_1a_2a_3\ldots)_3$ *เป็นตัวแทนที่ไม่มี* 1 *ปรากฏอยู่ และ* $b_n = a_n/2$ *สำหรับทุก* $n \in \mathbb{N}$

และสำหรับ $x \in [0,1] - C$ ให้ $f(x) = f(a)$ เมื่อ a เป็นจุดปลายของช่วงเปิด (a,b) ที่ถูกตัดออกในการสร้าง C และ $x \in (a,b)$ เราจะเรียกฟังก์ชัน f นี้ว่า ***ฟังก์ชันคันเตอร์*** (***Cantor function***)

จากบทนิยามจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มจาก $[0,1]$ ไปทั่วถึง $[0,1]$ และ f เป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วงเปิด (a,b) ที่ถูกตัดออกในการสร้าง C

ทฤษฎีบท 2.6.7. *ฟังก์ชันคันเตอร์เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

เซตคันเตอร์และฟังก์ชันคันเตอร์มีสมบัติที่น่าสนใจหลายประการ จึงเป็นตัวอย่างที่สำคัญในการศึกษาในบทอื่น ๆ ต่อไป

แบบฝึกหัด 2.6

1. ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง และให้ C เป็นเซตของจำนวนจริง x ที่ $\langle f_n(x) \rangle$ เป็นลำดับลู่เข้า จงแสดงว่า C เป็นเซต $F_{\sigma\delta}$

2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.6.4

3. ให้ (a,b) เป็นช่วงเปิดที่ถูกตัดออกในขั้นตอนใดขั้นตอนหนึ่งของการสร้างเซตคันเตอร์ และให้ $f : C \to [0,1]$ นิยามโดย $f(x) = (0.b_1b_2b_3\ldots)_2$ เมื่อ $x = (0.a_1a_2a_3\ldots)_3$ เป็นตัวแทนที่ไม่มี 1 ปรากฏอยู่ และ $b_n = a_n/2$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่า $f(a) = f(b)$

4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 2.6.7

บทที่ 3

เมเชอร์เลอเบก

ในบทนี้เราจะพัฒนาวิธีการวัดขนาดของเซตย่อยของจำนวนจริง เพื่อให้วัดเซตที่มีความซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ และคงสมบัติพื้นฐานของการวัดที่พึงจะมี เราจะพิจารณาการวัดขนาดของเซตว่าเป็นฟังก์ชันที่มีตัวแปรต้นเป็นเซตย่อยของจำนวนจริงและมีผลลัพธ์ (ตัวแปรตาม) เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบหรือเป็นบวกอนันต์ ซึ่งเราเรียกฟังก์ชันประเภทนี้ว่า ***ฟังก์ชันเซต*** (***set function***) ตัวอย่างของฟังก์ชันเซตที่เรามักจะใช้วัดขนาดของเซต เช่น

1. ให้ $\mathcal{F}_1$ เป็นเซตของเซตย่อยของจำนวนจริง และให้ $f_1 : \mathcal{F}_1 \to [0, \infty]$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f_1(S)$ แทนจำนวนสมาชิกในเซต S ซึ่งจะได้ว่า $f_1(\emptyset) = 0$ และ $f_1(S) = \infty$ เมื่อ S เป็นเซตอนันต์ ซึ่งการวัดขนาดแบบนี้ไม่เกิดประโยชน์อะไรเลยเมื่อวัดเซตอนันต์ เพราะทุกเซตอนันต์มีขนาดเท่ากันหมด

2. ให้ $\mathcal{F}_2$ เป็นเซตของช่วงใน $\mathbb{R}$ และให้ $f_2 : \mathcal{F}_2 \to [0, \infty]$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f_2(I)$ แทนความยาวของช่วง I กล่าวคือ ถ้า I เป็นช่วงที่มี a และ b เป็นจุดปลายช่วงและ $-\infty < a < b < \infty$ แล้ว $f_2(I) = b - a$ และถ้า $a = -\infty$ หรือ $b = \infty$ จะได้ว่า $f_2(I) = \infty$ นอกจากนี้เราให้ $f_2([x, x]) = f_2(\{x\}) = 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ ซึ่งเราอาจจะขยายบทนิยามของ f_2 ให้สามารถวัดเซตที่มีความหลากหลายขึ้น เช่น เรากำหนดให้ $f_2(I_1 \cup I_1) = f_2(I_1) + f_2(I_2)$ เมื่อ $I_1, I_2 \in \mathcal{F}_2$ และ $I_1^o \cap I_2^o = \emptyset$ โดยใช้แนวคิดเดียวกันนี้ เราอาจนิยามให้ $f_2\left(\cup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(I_n)$ เมื่อช่วงแต่ละคู่ไม่มีจุดภายในร่วมกัน เช่น

$$f_2(\mathbb{N}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_2(\{n\}) = \sum 0 = 0$$

และในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า $f_2(S) = 0$ ถ้า S เป็นเซตนับได้ เป็นต้น การขยายบทนิยามของ f_2 ดังกล่าว ทำให้เราสามารถวัดขนาดของเซตที่มีความหลากหลายขึ้นได้ แต่ปัญหาที่ยังคงมี

อยู่ คือ ถ้า S เป็นเซตที่ไม่อยู่ในรูปยูเนียนนับได้ของช่วง เราจะวัดอย่างไร เช่น ให้ $S_1 = [0,1] - \mathbb{Q}, S_2 = [0,2] - \mathbb{Q}, Q_1 = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ และ $Q_2 = \mathbb{Q} \cap [0,2]$ เราจะได้ว่า $S_1 \cap Q_1 = \emptyset$ และ $S_1 \cup Q_1 = [0,1]$ ถ้าเรายังต้องการให้การวัดด้วย f_2 ยังคงสมบัติ $f_2(S_1 \cup Q_1) = f_2(S_1) + f_2(Q_1)$ เราจะได้ว่า $f_2(S_1) = 1$ ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f_2(S_2 \cup Q_2) = f_2(S_2) + f_2(Q_2)$ แล้วเราจะได้ว่า $f_2(S_2) = 2$ ซึ่งทั้ง S_1 และ S_2 เป็นเซตนับไม่ได้ที่ไม่มีช่วงเปิดเป็นเซตย่อย เราจะนิยามการวัดในกรณีเช่นนี้อย่างไร

ในบทนี้เราจะศึกษาแนวทางการแก้ปัญหาที่กล่าวมาข้างต้น

3.1 แนวคิดพื้นฐาน

ก่อนอื่นเรามารวบรวมสมบัติที่ต้องการของฟังก์ชันเซตที่จะใช้ในการวัดขนาดของเซตย่อยของจำนวนจริงว่า ควรมีสมบัติอย่างไรบ้าง ในอุดมคตินั้นเราต้องการฟังก์ชันเซต m ที่มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. $m(S)$ หาค่าได้สำหรับทุก $S \subset \mathbb{R}$ และ $0 \le m(S) \le \infty$
2. ถ้า I เป็นช่วง แล้ว $m(I)$ เท่ากับความยาวของช่วง I
3. ถ้า $\langle A_n \rangle$ เป็นลำดับของเซตที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน กล่าวคือ $A_m \cap A_n = \emptyset$ สำหรับทุกคู่ $m \neq n$ แล้ว $m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$
4. ถ้า $A \subset \mathbb{R}$ และ $y \in \mathbb{R}$ แล้ว $m(A) = m(A+y)$ เมื่อ $A + y = \{x + y : x \in A\}$

โดยสมบัติข้อ 3 และข้อ 4 มีชื่อเรียกว่า ***สมบัติการบวกนับได้*** (*countably additive property*) และ ***สมบัติการไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การเลื่อน*** (*translation invariant property*) ตามลำดับ

ในความจริงนั้น เราไม่สามารถหาฟังก์ชันเซตที่มีสมบัติครบทั้ง 4 ข้อดังกล่าวได้ เพราะมีลำดับของเซตย่อยของจำนวนจริงที่ทำให้สมบัติการบวกนับได้ไม่เป็นจริง ดังตัวอย่างที่จะแสดงต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1.1. *ให้ $x, y \in [0,1)$ และ $E \subset [0,1)$* ***ผลบวกมอดุโล 1 ของ x และ y*** *นิยามโดย*

$$x \dotplus y = \begin{cases} x + y & \text{ถ้า } x + y < 1 \\ x + y - 1 & \text{ถ้า } x + y \ge 1 \end{cases}$$

และ ***การเลื่อนมอดุโล 1 ของ E ด้วย y*** *นิยามโดย $E \dotplus y = \{x \dotplus y : x \in E\}$*

บทตั้ง 3.1.2. *ให้ $y \in [0,1)$ และ $E \subset [0,1)$ ถ้า m เป็นฟังก์ชันเซตที่มีสมบัติการบวกนับได้และไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การเลื่อน แล้ว $m(E \dotplus y) = m(E)$*

บทพิสูจน์ ให้ m เป็นฟังก์ชันเซตที่มีสมบัติการบวกนับได้และไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การเลื่อน ให้ $E_1 = E \cap [0, 1-y)$ และ $E_2 = E \cap [1-y, 1)$ จะได้ว่า $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ และ $E = E_1 \cup E_2$ ดังนั้น

$$m(E) = m(E_1) + m(E_2)$$

เพราะว่า m มีสมบัติการบวกนับได้

สังเกตว่า $E_1 \dotplus y = E_1 + y$ และ $E_2 \dotplus y = E_2 + y - 1$ จึงได้ว่า

$$m(E_1 \dotplus y) = m(E_1 + y) = m(E_1)$$

และ

$$m(E_2 \dotplus y) = m(E_2 + y - 1) = m(E_2)$$

เนื่องจาก $E \dotplus y = (E_1 \dotplus y) \cup (E_2 \dotplus y)$ และ $(E_1 \dotplus y) \cap (E_2 \dotplus y) = \emptyset$ จึงได้ว่า

$$m(E \dotplus y) = m(E_1 \dotplus y) + m(E_2 \dotplus y) = m(E_1) + m(E_2) = m(E)$$

ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 3.1.3. *ถ้า m เป็นฟังก์ชันเซตบน $P(\mathbb{R})$ ที่มีสมบัติการไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การเลื่อน และ $m(I)$ เท่ากับความยาวของช่วง I แล้ว m ไม่มีสมบัติการบวกนับได้ กล่าวคือ มีลำดับของเซตย่อยของจำนวนจริง $\langle S_n \rangle$ ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกันและ*

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} m(S_n)$$

บทพิสูจน์ ให้ m เป็นฟังก์ชันเซตที่มีสมบัติการไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การเลื่อนและ $m(I)$ เท่ากับความยาวของช่วง I เราจะพิสูจน์ด้วยวิธีการหาข้อขัดแย้ง

สมมติว่า m มีสมบัติการบวกนับได้ เราจะสร้างลำดับของเซตย่อยของจำนวนจริง $\langle S_n \rangle$ ที่จะก่อให้เกิดข้อขัดแย้ง ดังต่อไปนี้

ให้ $x, y \in [0,1)$ เราจะกล่าวว่า $x \sim y$ ก็ต่อเมื่อ $x - y$ เป็นจำนวนตรรกยะ เราสามารถตรวจสอบได้ไม่ยากว่า $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล ดังนั้นเราสามารถแบ่งช่วง $[0,1)$ ออกเป็นชั้นสมมูล

(equivalence class) ด้วยความสัมพันธ์ $\sim$ นี้ โดยสัจพจน์การเลือก (the axiom of choice) จะได้ว่า มีเซต S ที่ประกอบด้วยสมาชิกจากแต่ละชั้นสมมูลเพียงชั้นละหนึ่งตัว

ให้ $\{r_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ เป็นเซตของจำนวนตรรกยะในช่วง $[0, 1)$ ที่เขียนในรูปการแจงนับโดยให้ $r_0 = 0$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ให้ $S_n = S \dot{+} r_n$ ก่อนอื่นเราจะแสดงว่า $S_k \cap S_n = \emptyset$ สำหรับทุกคู่ $k \neq n$

ให้ k และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่แตกต่างกัน สมมติว่ามี $x \in S_k \cap S_n$ ซึ่งจะได้ว่ามี $s_k \in S_k$ และมี $s_n \in S_n$ ที่ทำให้

$$x = s_k \dot{+} r_k = s_n \dot{+} r_n$$

เนื่องจาก $s_k \dot{+} r_k = s_k + r_k - i$ และ $s_n \dot{+} r_n = s_n + r_n - j$ สำหรับบาง $i, j \in \{0, 1\}$ จึงได้ว่า $s_k - s_n = r_n - r_k + L$ สำหรับบาง $L \in \mathbb{Z}$ ซึ่งแสดงว่า $s_k - s_n$ เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้น $s_k \sim s_n$ แต่เนื่องจาก S ประกอบด้วยสมาชิกจากแต่ละชั้นสมมูลเพียงชั้นละหนึ่งตัว จึงได้ว่า $s_k = s_n$ เนื่องจาก $-1 < r_n - r_k < 1$ และ

$$0 = s_k - s_n = r_n - r_k + L$$

ทำให้ได้ว่า $r_n - r_k$ เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือ $r_n - r_k = 0$ ดังนั้น $r_n = r_k$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งเพราะว่า $r_n \neq r_k$ ดังนั้น $S_k \cap S_n = \emptyset$ ตามต้องการ

ต่อไปจะแสดงว่า $\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n = [0, 1)$ สังเกตว่า $\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n \subset [0, 1)$ เพราะ $S_n \subset [0, 1)$ สำหรับทุก n ดังนั้นจึงเพียงพอที่จะแสดงว่า $[0, 1) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$

ให้ $x \in [0, 1)$ เนื่องจาก x จะต้องอยู่ในชั้นสมมูลใดชั้นสมมูลหนึ่ง จึงได้ว่า มี $s \in S$ และ $r \in \mathbb{Q}$ ที่ $x = s + r$ สังเกตว่า ถ้า $x \geq s$ แล้ว $r \in [0, 1)$ ดังนั้น $r = r_n$ สำหรับบาง $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $x \in S_n$ ถ้า $x < s$ แล้ว $r \in (-1, 0)$ ซึ่งจะได้ว่า $x = s \dot{+} (r + 1)$ และ $r + 1 = r_n$ สำหรับบาง $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $x \in S_n$ จากทั้งสองกรณีแสดงว่า $[0, 1) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$ ตามต้องการ

เนื่องจาก m เป็นมีสมบัติการไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การเลื่อนและสมบัติการบวกนับได้ โดยบทตั้ง 3.1.2 จะได้ว่า

$$m(S_n) = m(S \dot{+} r_n) = m(S)$$

สำหรับทุก n และ

$$1 = m([0,1)) = m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m(S_n) = \sum_{n=0}^{\infty} m(S)$$

ถ้า $m(S) = 0$ จะได้ว่า $1 = \sum_{n=0}^{\infty} m(S) = 0$ ซึ่งเป็นเท็จ และถ้า $m(S) > 0$ จะได้ว่า $1 = \sum_{n=0}^{\infty} m(S) = +\infty$ ซึ่งเป็นเท็จเช่นกัน

ดังนั้น m ต้องไม่มีสมบัติการบวกนับได้ □

ทฤษฎีบท 3.1.3 แสดงให้เห็นว่า ไม่มีฟังก์ชันเซตใดที่จะมีสมบัติครบทั้ง 4 ข้อได้ ดังนั้นสมบัติบางประการของฟังก์ชันเซตในอุดมคตินั้นต้องมีการทำให้อ่อนลง ซึ่งเมื่อพิจารณาแล้วจะเห็นว่าเราควรคงสมบัติข้อ 2, 3 และ 4 ไว้ แต่จะจำกัดประเภทของเซตย่อยของจำนวนจริงที่จะพิจารณาแทน เพราะโดยทั่วไปนั้น เซตย่อยของจำนวนจริงที่เราพบเห็นทั่วไปนั้นเป็นเซตโบเรล ซึ่งเป็นสมาชิกในพีชคณิตซิกมาที่ก่อกำเนิดโดยช่วงเปิด ดังนั้นเราจึงปรารถนาให้ฟังก์ชันเซต m นิยามบนพีชคณิตซิกมา Γ ของเซต $\mathbb{R}$ (ที่ไม่ใช่ $P(\mathbb{R})$) ซึ่งจะทำให้ m มีสมบัติว่า ถ้า $A, B \in \Gamma$ และ $A \subset B$ แล้ว $m(A) \leq m(B)$ อันเป็นสมบัติที่ควรมี

ทฤษฎีบท 3.1.4. *ให้ m เป็นฟังก์ชันเซตบนพีชคณิตซิกมา Γ ของเซต X และ $A, B \in \Gamma$ ถ้า m มีสมบัติการบวกนับได้ และ $A \subset B$ แล้ว $m(A) \leq m(B)$*

บทพิสูจน์ ให้ $A \subset B$ และ $C = B \cap A^c$ จะได้ว่า $C \in \Gamma, A \cap C = \emptyset$ และ $B = A \cup C$
ถ้า m มีสมบัติการบวกนับได้ จะได้ว่า

$$m(B) = m(A) + m(C) \geq m(A)$$

เพราะว่า $m(C) \geq 0$ เสมอ □

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงแสดงว่า ความสัมพันธ์ $\sim$ ในบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 3.1.3 เป็นความสัมพันธ์สมมูล

2. ให้ m เป็นฟังก์ชันเซตบนพีชคณิตซิกมา Γ ของเซต X จงพิสูจน์ว่า ถ้ามี $A \in \Gamma$ ที่ $m(A) < \infty$ แล้ว $m(\emptyset) = 0$

3.2 เมเชอร์ภายนอก

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาฟังก์ชันเซตที่สมบัติข้อ 1, 2 และ 4 โดยสมบัติข้อ 3 ถูกทำให้อ่อนลง โดยจะแทนสมบัติการบวกนับได้ (countably additive property) ด้วยสมบัติการบวกย่อยนับได้ (countably subadditive property)

บทนิยาม 3.2.1. *ให้ f เป็นฟังก์ชันเซตบนโดเมน D เราจะกล่าวว่า f มี**สมบัติการบวกย่อยนับได้** (**countably subadditive property**) ถ้า*

$$f\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(A_n)$$

สำหรับทุกลำดับของเซต $\langle A_n\rangle$ ใน D ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน

บทนิยาม 3.2.2. *สำหรับแต่ละ $A \subset \mathbb{R}$ ให้*

$$\mathcal{C}_A = \left\{\mathcal{C} : \mathcal{C} \text{ เป็นเซตนับได้ที่มีสมาชิกเป็นช่วงเปิดที่ } A \subset \bigcup_{I_n\in\mathcal{C}} I_n\right\}$$

*และให้ $\ell(I)$ แทนความยาวของช่วง I นิยามให้ **เมเชอร์ภายนอก** (**outer measure**) m^* คือฟังก์ชันเซตที่กำหนดโดย*

$$m^*(A) = \inf_{\mathcal{C}\in\mathcal{C}_A} \sum_{I_n\in\mathcal{C}} \ell(I_n)$$

จากบทนิยามจะได้ว่า

1. $m^*(A)$ จะมีค่าอยู่ในช่วง $[0,\infty]$ สำหรับทุก $A \subset \mathbb{R}$
2. $m^*(\emptyset) = 0$
3. $m^*(\{x\}) = 0$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$
4. ถ้า $A \subset B \subset \mathbb{R}$ แล้ว $m^*(A) \leq m^*(B)$

นอกจากนี้เรายังได้ว่า เมเชอร์ภายนอกของช่วงจะมีค่าเท่ากับความยาวของช่วงนั้น ๆ ด้วย

ทฤษฎีบท 3.2.3. *ถ้า I เป็นช่วง แล้ว $m^*(I) = \ell(I)$*

บทพิสูจน์ จะเห็นได้ชัดว่า ถ้า I เป็นเซตโทนแล้ว $m^*(I) = 0$ ต่อไปพิจารณากรณี I เป็นช่วงที่ไม่ใช่เซตโทน

ก่อนอื่นพิจารณาช่วงปิด $I=[a,b]$ เนื่องจาก $\{(a-\varepsilon,b+\varepsilon)\}\in\mathcal{C}_I$ สำหรับทุก $\varepsilon>0$ จึงได้ว่า

$$m^*(I)\le b-a+2\varepsilon$$

เนื่องจาก ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จึงได้ว่า $m^*(I)\le b-a$

ต่อไปจะแสดงว่า $m^*(I)\ge b-a$ ให้ $\mathcal{C}\in\mathcal{C}_I$ เนื่องจาก I เป็นเซตกระชับ จึงมี

$$\{I_{n_1},I_{n_2},\dots,I_{n_k}\}\subset\mathcal{C}\quad \text{ที่} \quad I\subset\bigcup_{j=1}^{k}I_{n_j}$$

ให้ $I_{n_j}=(a_j,b_j)$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปเราสามารถเลือก $\{I_{n_1},I_{n_2},\dots,I_{n_k}\}$ ที่มีสมบัติว่า $a_1<a<b_1, a_j<b_{j-1}<b_j$ สำหรับ $j=2,\dots,k$ และ $a_k<b<b_k$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\ell\left(I_{n_j}\right)&=(b_k-a_k)+(b_{k-1}-a_{k-1})+\cdots+(b_1-a_1)\\&=b_k+(b_{k-1}-a_k)+(b_{k-2}-a_{k-1})+\cdots+(b_1-a_2)-a_1\\&>b_k-a_1>b-a\end{aligned}$$

จึงได้ว่า

$$m^*(I)=\inf_{\mathcal{C}\in\mathcal{C}_I}\sum_{I_n\in\mathcal{C}}\ell(I_n)\ge b-a$$

ดังนั้น $m^*(I)=b-a$ ตามต้องการ

ต่อไปสมมติให้ I เป็นช่วงจำกัดที่ไม่ใช่ช่วงปิดและมี a และ b เป็นจุดปลายช่วงโดยที่ $a<b$ นั่นคือ $I\subset[a,b]$ โดยที่ $[a,b]-I\subset\{a,b\}$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$m^*(I)\le m^*([a,b])=b-a$$

ให้ $N\in\mathbb{N}$ ที่มีค่ามากกว่า $\frac{3}{b-a}$ และสำหรับแต่ละจำนวนนับ $n\ge N$ ให้ $I_n=\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]$ จะได้ว่า $I_n\subset I$ และ

$$m^*(I)\ge m^*(I_n)=b-a-\frac{2}{n}$$

สำหรับทุก $n\ge N$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$m^*(I)\ge b-a$$

ดังนั้น $m^*(I) = b - a = \ell(I)$ สำหรับในกรณีนี้

สุดท้ายนี้ เราพิจารณากรณีที่ I เป็นช่วงอนันต์ ซึ่งจะได้ว่า สำหรับทุกจำนวนนับ n จะมีช่วงปิด J ที่ $J \subset I$ และ $m^*(J) = n$ ดังนั้น $m^*(I) \geq n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งสรุปได้ว่า $m^*(I) = \infty = \ell(I)$ ตามต้องการ □

จากบทนิยามเราสามารถแสดงได้ไม่ยากว่า เมเชอร์ภายนอกมีสมบัติการไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การเลื่อน

ทฤษฎีบท 3.2.4. *เมเชอร์ภายนอกมีสมบัติการไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การเลื่อน กล่าวคือ ถ้า* $A \subset \mathbb{R}$ *และ* $y \in \mathbb{R}$ *แล้ว*

$$m^*(A) = m^*(A + y)$$

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

จากทฤษฎีบท 3.1.3 ทฤษฎีบท 3.2.3 และทฤษฎีบท 3.2.4 จะได้ว่า m^* ไม่มีสมบัติการบวกนับได้บน $P(\mathbb{R})$ แต่อย่างน้อย m^* ยังมีสมบัติการบวกย่อยนับได้

ทฤษฎีบท 3.2.5. *สำหรับแต่ละ* $n \in \mathbb{N}$ *ให้* $A_n \subset \mathbb{R}$ *จะได้ว่า*

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

บทพิสูจน์ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) = \infty$ แล้วอสมการเป็นจริง จึงสมมติให้ $\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) < \infty$

ให้ $\varepsilon > 0$ และสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $\mathcal{C}_n = \{I_{n,k} : k \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{C}_{A_n}$ ที่มีสมบัติว่า

$$m^*(A_n) > \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{n,k}) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

ให้ $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ และ $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ จะได้ว่า $S \in \mathcal{C}_A$ และ

$$m^*(A) \leq \sum_{I\in S} \ell(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{n,k}) < \sum_{n=1}^{\infty}\left(m^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon$$

เนื่องจาก ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จึงได้ว่า

$$m^*(A) = m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

ตามต้องการ □

ผลจากทฤษฎีบท 3.2.5 เราสรุปได้ว่า

บทแทรก 3.2.6. *เมเชอร์ภายนอกของเซตนับได้มีค่าเท่ากับ* 0

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

จากบทแทรก 3.2.6 เราสามารถสรุปได้ว่าเซตใด ๆ ที่มีเมเชอร์ภายนอกเป็นบวกเป็นเซตนับไม่ได้ ซึ่งเป็นอีกเหตุผลหนึ่งที่แสดงให้เห็นว่า ช่วงที่ไม่เป็นเซตโทนเป็นเซตนับไม่ได้

ทฤษฎีบท 3.2.7. *ให้* $A \subset \mathbb{R}$ *ที่มี* $m^*(A) < \infty$ *จะได้ว่า*

1. *สำหรับแต่ละ* $\varepsilon > 0$ *จะมีเซตเปิด* $\mathcal{O}$ *ที่มีสมบัติว่า* $A \subset \mathcal{O}$ *และ* $m^*(\mathcal{O}) < m^*(A) + \varepsilon$

2. *มีเซต* G *ที่เป็นเซต* G_δ *ที่มีสมบัติว่า* $A \subset G$ *และ* $m^*(G) = m^*(A)$

บทพิสูจน์ (1) ให้ $\varepsilon > 0$ โดยบทนิยามของ m^* จะได้ว่ามี $\mathcal{C} \in \mathcal{C}_A$ ที่มีสมบัติว่า

$$\sum_{I_n \in \mathcal{C}} \ell(I_n) < m^*(A) + \varepsilon$$

ให้ $\mathcal{O} = \bigcup_{I_n \in \mathcal{C}} I_n$ จากสมบัติการบวกย่อยนับได้ จะได้ว่า

$$m^*(\mathcal{O}) \leq \sum_{I_n \in \mathcal{C}} m^*(I_n) = \sum_{I_n \in \mathcal{C}} \ell(I_n)$$

ดังนั้น $\mathcal{O}$ เป็นเซตเปิดที่มีสมบัติตามต้องการ

(2) ผลจากข้อ 1 จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ จะมีเซตเปิด $\mathcal{O}_n$ ที่ $A \subset \mathcal{O}_n$ และ

$$m^*(\mathcal{O}_n) < m^*(A) + \frac{1}{n}$$

ให้ $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ จะได้ว่า G เป็นเซต G_δ ซึ่ง $A \subset G$ และ

$$m^*(A) \leq m^*(G) \leq m^*(\mathcal{O}_n) < m^*(A) + \frac{1}{n}$$

สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น เราจะได้ $m^*(G) = m^*(A)$ ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงแสดงว่า $m^*(A)$ หาค่าได้ใน $[0,\infty]$ สำหรับทุก $A \subset \mathbb{R}$
2. ให้ $A \subset B \subset \mathbb{R}$ จงแสดงว่า $m^*(A) \leq m^*(B)$
3. ให้ $A \subset \mathbb{R}$ และ $y \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า $m^*(A) = m^*(A+y)$
4. จงพิสูจน์บทแทรก 3.2.6
5. ให้ $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ จงแสดงว่า
   (i) ถ้า $I_1, I_2, \ldots, I_n$ เป็นช่วงเปิดที่ $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ แล้ว $\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geq 1$
   (ii) สำหรับแต่ละ $0 < \varepsilon < 1$ จะมีลำดับของช่วงเปิด $\langle I_n \rangle$ ที่ $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ และ
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$$
6. ให้ $A, B \subset \mathbb{R}$ โดยที่ $m^*(A) = 0$ จงแสดงว่า $m^*(A \cup B) = m^*(B)$
7. ให้ $E \subset \mathbb{R}$ และ $\alpha > 0$ จงแสดงว่า $m^*(\alpha E) = \alpha \cdot m^*(E)$
8. ให้ $A = [0,1] - \mathbb{Q}$ จงแสดงว่า $m^*(A) = 1$

3.3 เมเชอร์เลอเบก

จากที่เราทราบแล้วว่า ไม่มีฟังก์ชันเซตที่มีสมบัติครบทั้งสี่ข้อที่ปรากฏในหน้า 56 ดังนั้นถ้าจะทำให้เมเชอร์ภายนอกมีสมบัติการบวกนับได้ เราต้องหาเงื่อนไขที่จะตัดเซตย่อยที่ทำให้สมบัติการบวกนับได้ไม่เป็นจริงออกไป ซึ่งเราควรที่จะย้อนกลับไปพิจารณาเซต S ที่สร้างขึ้นในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.3 โดยเราได้ว่า $S = S_0, S_m \cap S_n = \emptyset$ เมื่อ $m \neq n$ และ $\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n = [0,1)$ เนื่องจาก m^* มีสมบัติการบวกย่อยนับได้ และ $m^*(S_n) = m^*(S)$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ เราจึงได้ว่า

$$m^*([0,1)) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m^*(S_n) = \sum_{n=0}^{\infty} m^*(S)$$

จาก $m^*([0,1)) = 1$ จะได้ว่า $m^*(S) > 0$ จากตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า S เป็นเซตที่ควรตัดออก เพื่อมองปัญหาให้ง่ายขึ้น แทนที่จะพิจารณาการเท่ากันในการบวกนับได้ เราควรเริ่มต้นด้วยการพิจารณาการเท่ากันกับการบวกเพียงสองเซตก่อน

ให้ $A = [0,1)$ เราจะได้ว่า $S \cap A = S, S^c \cap A = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ และ

$$m^*(A) \neq m^*(A \cap S) + m^*(A \cap S^c)$$

ดังนั้น การที่จะให้ได้เซตที่มีสมบัติการบวกนับได้ภายใต้เมเชอร์ภายนอกนั้น ก่อนอื่นเราควรที่จะพิจารณาเฉพาะเซต E ที่มีสมบัติ

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \tag{3.1}$$

สำหรับทุก $A \subset \mathbb{R}$

บทนิยาม 3.3.1. *เราเรียกเซต E ว่า* ***เซตเมเชอร์ได้*** (***measurable set***) *หรือ**เซตเมเชอร์ได้แบบเลอเบก*** (***Lebesgue measurable set***) *ถ้าสมการ (3.1) เป็นจริงสำหรับทุก $A \subset \mathbb{R}$ และเราให้ $\mathcal{M}$ แทนเซตของเซตย่อยของจำนวนจริงทั้งหมดที่เป็นเซตเมเชอร์ได้*

จากบทนิยามจะเห็นได้ว่า $\mathbb{R}$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ และถ้า E เป็นเซตเมเชอร์ได้แล้ว E^c จะเป็นเซตเมเชอร์ได้เช่นเดียวกัน เนื่องจาก m^* มีสมบัติการบวกย่อยนับได้ จึงได้ว่า

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

เสมอ ดังนั้นในการแสดงว่า E เป็นเซตเมเชอร์ได้ จึงเพียงพอที่จะแสดงว่า

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

สำหรับทุก $A \subset \mathbb{R}$ ที่ $m^*(A) < \infty$

ทฤษฎีบท 3.3.2. *ทุกเซตที่มีเมเชอร์ภายนอกเท่ากับศูนย์เป็นเซตเมเชอร์ได้*

บทพิสูจน์ ให้ $E \subset \mathbb{R}$ ที่มี $m^*(E) = 0$ และให้ $A \subset \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0 \qquad \text{และ} \qquad m^*(A) \geq m^*(A - E)$$

ดังนั้น $m^*(A \cap E) = 0$ และ $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A - E)$ ตามต้องการ $\square$

จากทฤษฎีบท 3.3.2 จะได้ว่าเซตนับได้เป็นเซตเมเชอร์ได้ ดังนั้นทุกเซตย่อยของ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ และ $\mathbb{Q}$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ นอกจากนี้เซตของจำนวนอตรรกยะเป็นเซตเมเชอร์ได้

ทฤษฎีบท 3.3.3. *เซต $\mathcal{M}$ เป็นพีชคณิตของเซต $\mathbb{R}$*

บทพิสูจน์ จากบทนิยามจะได้ว่า $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$ และถ้า $E \in \mathcal{M}$ แล้ว $E^c \in \mathcal{M}$ เพื่อที่จะแสดงว่า $\mathcal{M}$ เป็นพีชคณิต จึงเหลือเพียงแค่จะต้องแสดงว่า ถ้า $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ แล้ว $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$

ให้ $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ และ $A \subset \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \tag{3.2}$$

เนื่องจาก $A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_1^c \cap E_2)$ จึงได้ว่า

$$m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) \leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} m^*\left(A \cap [E_1 \cup E_2]\right) + m^*\left(A \cap [E_1 \cup E_2]^c\right) \leq & m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) \\ & + m^*\left(A \cap E_1^c \cap E_2^c\right) \end{aligned}$$

จาก (3.2) จะได้ว่า

$$m^*\left(A \cap [E_1 \cup E_2]\right) + m^*\left(A \cap [E_1 \cup E_2]^c\right) \leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A)$$

ซึ่งแสดงว่า $E_1 \cup E_2$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ตามต้องการ $\square$

ทฤษฎีบท 3.3.4. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ ถ้า $E_1, E_2, \ldots, E_n$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน แล้ว*

$$m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right]\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k)$$

บทพิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เห็นชัดว่าทฤษฎีบทเป็นจริงกรณี $n = 1$ ต่อไปสมมติว่า $n \geq 2$ และ

$$m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right]\right) = \sum_{k=1}^{n-1} m^*(A \cap E_k)$$

สังเกตว่า $m^*(A \cap E_n) = m^*\left(A \cap [\bigcup_{k=1}^{n} E_k] \cap E_n\right)$ และ

$$m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right]\right) = m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right] \cap E_n^c\right)$$

จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap E_n) \\ &= m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right]\right) + m^*(A \cap E_n) \\ &= m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right] \cap E_n^c\right) + m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right] \cap E_n\right) \\ &= m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right]\right)\end{aligned}$$

โดยสมการสุดท้ายเป็นจริงเพราะ E_n เป็นเซตเมเชอร์ได้ □

เมื่อเราแทน A ในทฤษฎีบท 3.3.4 ด้วย $\mathbb{R}$ เราจะได้ว่า m^* มี***สมบัติการบวกจำกัด*** (***finite additive property***)

ทฤษฎีบท 3.3.5. *เซต $\mathcal{M}$ เป็นพีชคณิตซิกมาเซต $\mathbb{R}$ และ m^* มีสมบัติการบวกนับได้บน $\mathcal{M}$*

บทพิสูจน์ ให้ $\langle E_n \rangle$ เป็นลำดับของเซตเมเชอร์ได้ และ $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ เนื่องจาก $\mathcal{M}$ เป็นพีชคณิต จึงเพียงพอที่จะแสดงว่า $E \in \mathcal{M}$

เนื่องจาก $\mathcal{M}$ เป็นพีชคณิต โดยทฤษฎีบท 1.4.5 จะได้ว่า มีลำดับ $\langle F_n \rangle$ ของเซตเมเชอร์ได้ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกันและ $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $H_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ ซึ่งจะได้ว่า $H_n \in \mathcal{M}$ และ $H_n \subset E$

ให้ $A \subset \mathbb{R}$ โดยทฤษฎีบท 3.3.4 เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap H_n) + m^*(A \cap H_n^c) \\ &= \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap F_k) + m^*(A \cap H_n^c) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap F_k) + m^*(A \cap E^c) \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap F_k) + m^*(A \cap E^c) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \; m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k\right]\right) + m^*(A \cap E^c) \\
&= \; m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)
\end{aligned}$$

โดยอสมการสุดท้ายได้มาจากสมบัติการบวกย่อยนับได้ของ m^* ดังนั้น E เป็นเซตเมเชอร์ได้ตามต้องการ

จากอสมการ (3.3) ถ้าให้ $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ เราจะได้

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(F_n))$$

และจากสมบัติการบวกย่อยนับได้ของ m^* ทำให้ได้ว่า

$$m^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(F_n))$$

เนื่องจากสมการนี้เป็นจริงสำหรับทุกลำดับ $\langle F_n \rangle$ ของเซตเมเชอร์ได้ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน จึงได้ว่า m^* มีสมบัติการบวกนับได้บน $\mathcal{M}$ ตามต้องการ $\square$

การตรวจสอบว่าเซตใดเป็นเซตเมเชอร์ได้โดยตรงจากบทนิยามนั้นไม่ใช่เรื่องง่าย แต่เรายังโชคดีที่เซตที่เราพบเห็นทั่วไปเป็นเซตเมเชอร์ได้ เพราะทุกเซตโบเรลเป็นเซตเมเชอร์ได้

ทฤษฎีบท 3.3.6. *เซตโบเรลเป็นเซตเมเชอร์ได้*

บทพิสูจน์ ก่อนอื่นจะแสดงว่าช่วงเปิด (a, ∞) เป็นเซตเมเชอร์ได้เมื่อ $a \in \mathbb{R}$
ให้ $I = (a, \infty)$ และ $A \subset \mathbb{R}$ ที่มี $m^*(A) < \infty$ จากบทนิยามของเมเชอร์ภายนอกจะได้ว่าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\mathcal{C} \in \mathcal{C}_A$ ที่มีสมบัติว่า

$$\sum_{I_n\in\mathcal{C}} \ell(I_n) \leq m^*(A) + \varepsilon$$

สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $J_n = I_n \cap I$ และ $K_n = I_n - I$ สังเกตว่าทั้ง J_n และ K_n เป็นช่วงหรือไม่ก็เซตว่าง นอกจากนั้น

$$(A \cap I) \subset \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n\right] \quad \text{และ} \quad (A - I) \subset \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\right]$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$m^*(A \cap I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \quad \text{และ} \quad m^*(A - I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} m^*(A \cap I) + m^*(A - I) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(K_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [\ell(J_n) + \ell(K_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \\ &\leq m^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

เนื่องจาก ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จึงได้ว่า

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A - I)$$

ซึ่งแสดงว่า $I \in \mathcal{M}$

ให้ $-\infty < a < b < \infty$ เนื่องจาก $\mathcal{M}$ เป็นพีชคณิตซิกมา จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} (-\infty, a] &= (a, \infty)^c & (a, b] &= (-\infty, b] \cap (a, \infty) \\ (a, b) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(a, b - \tfrac{1}{n}\right] \quad \text{และ} & (-\infty, b) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(a - n, b - \tfrac{1}{n}\right] \end{aligned}$$

เป็นเซตเมเชอร์ได้ เนื่องจากเซตโบเรลเป็นสมาชิกของเซตพีชคณิตซิกมาที่ก่อกำเนิดโดยช่วงเปิด จึงได้ว่า เซตโบเรลเป็นเซตเมเชอร์ได้ตามต้องการ □

บทแทรก 3.3.7. *ทุกเซตเปิดและเซตปิดเป็นเซตเมเชอร์ได้*

บทพิสูจน์ เป็นผลโดยตรงจากทฤษฎีบท 3.3.6 □

บทนิยาม 3.3.8. ***เมเชอร์เลอเบก*** (***Lebesgue measure***) *คือ ฟังก์ชันเซต m ที่นิยามบนพีชคณิตซิกมา $\mathcal{M}$ โดยให้*

$$m(E) = m^*(E) \qquad \text{สำหรับทุก } E \in \mathcal{M}$$

*เราจะกล่าวว่า E เป็น**เซตเมเชอร์จำกัด (set of finite measure)** ถ้า E เป็นเซตเมเชอร์ได้*

และ $m(E) < \infty$ *และจะกล่าวว่า* E *เป็น**เซตเมเชอร์ศูนย์ (set of zero measure)** เมื่อ* $m(E) = 0$

ต่อจากนี้ไปถ้าเราทราบว่า E เป็นเซตเมเชอร์ได้ เราจะใช้ $m(E)$ แทน $m^*(E)$ และเราจะใช้ $m^*(E)$ ในกรณีที่เรายังไม่ทราบว่า E เป็นเซตเมเชอร์ได้หรือไม่ นอกจากนี้เมื่อใดก็ตามที่เขียน $m(E)$ จะหมายถึง E เป็นเซตเมเชอร์ได้

ทฤษฎีบท 3.3.9. *ให้* A *และ* B *เป็นเซตเมเชอร์ได้ ถ้า* $B \subset A$ *และ* $m(B) < \infty$ *แล้ว*

$$m(A - B) = m(A) - m(B)$$

บทพิสูจน์ ให้ $B \subset A$ และ $m(B) < \infty$ เนื่องจาก $A = (A - B) \cup B$ และ $(A - B) \cap B = \emptyset$ จึงได้ว่า

$$m(A) = m(A - B) + m(B)$$

หรือ $m(A - B) = m(A) - m(B)$ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 3.3.10. *ให้* $E \subset \mathbb{R}$ *ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน*

1. E *เป็นเซตเมเชอร์ได้*

2. *สำหรับแต่ละ* $\varepsilon > 0$ *จะมีเซตเปิด* $\mathcal{O}$ *ที่* $E \subset \mathcal{O}$ *และ* $m^*(\mathcal{O} - E) < \varepsilon$

3. *สำหรับแต่ละ* $\varepsilon > 0$ *จะมีเซตปิด* F *ที่* $F \subset E$ *และ* $m^*(E - F) < \varepsilon$

4. *มีเซต* G *ซึ่งเป็นเซต* G_δ *ที่* $E \subset G$ *และ* $m^*(G - E) = 0$

5. *มีเซต* F *ซึ่งเป็นเซต* F_σ *ที่* $F \subset E$ *และ* $m^*(E - F) = 0$

บทพิสูจน์ เราจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนแรกจะแสดงว่า (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) และส่วนที่สองจะแสดงว่า (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1)

(1) $\Rightarrow$ (2) ให้ $E \in \mathcal{M}$ และ $\varepsilon > 0$ ถ้า $m(E) < \infty$ โดยทฤษฎีบท 3.2.7 จะได้ว่ามีเซตเปิด $\mathcal{O}$ ที่มีสมบัติตามต้องการ ต่อไปสมมติว่า $m(E) = \infty$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ให้

$$E_n = \big([-n, -n+1) \cup [n, n+1)\big) \cap E$$

เนื่องจาก $m(E_n) < \infty$ จึงได้ว่า มีเซตเปิด $\mathcal{O}_n$ ที่ $E_n \subset \mathcal{O}_n$ และ $m(\mathcal{O}_n - E_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$
ให้ $\mathcal{O} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{O}_n$ จะได้ว่า $\mathcal{O}$ เป็นเซตเปิดที่ $E \subset \mathcal{O}$ และ

$$\mathcal{O} - E = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathcal{O}_n - E) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathcal{O}_n - E_n)$$

ดังนั้น

$$m(\mathcal{O} - E) \leq m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathcal{O}_n - E_n)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m\left(\mathcal{O}_n - E_n\right) < \varepsilon$$

ซึ่งแสดงว่า $\mathcal{O}$ มีสมบัติตามต้องการ

(2) $\Rightarrow$ (4) สมมติให้ (2) เป็นจริง จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ จะมีเซตเปิด $\mathcal{O}_n$ ที่ $E \subset \mathcal{O}_n$ และ

$$m^*\left(\mathcal{O}_n - E\right) < \frac{1}{n}$$

ให้ $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ จะได้ว่า G เป็นเซต G_δ ที่ $E \subset G$ และ $G - E \subset \mathcal{O}_n - E$ ดังนั้น

$$m^*(G - E) \leq m^*\left(\mathcal{O}_n - E\right) < \frac{1}{n}$$

สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ทำให้ได้ว่า $m^*(G - E) = 0$ ตามต้องการ

(4) $\Rightarrow$ (1) สมมติให้ (4) เป็นจริง ให้ G เป็นเซตที่มีสมบัติตามข้อ 4 และให้ $A = G - E$ เนื่องจาก $m^*(A) = 0$ จึงได้ว่า $A \in \mathcal{M}$ เนื่องจาก G เป็นเซตโบเรลและ $\mathcal{M}$ เป็นพีชคณิต จึงได้ว่า G และ A^c เป็นเซตเมเชอร์ได้ ดังนั้น $E = G \cap A^c$ เป็นเซตเมเชอร์ได้

(1) $\Rightarrow$ (3) สมมติให้ $E \in \mathcal{M}$ จะได้ว่า $E^c \in \mathcal{M}$ จากข้อ 2 ซึ่งพิสูจน์แล้วว่าเป็นจริง จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีเซตเปิด $\mathcal{O}$ ที่ $E^c \subset \mathcal{O}$ และ $m(\mathcal{O} - E^c) < \varepsilon$ ให้ $F = \mathcal{O}^c$ จะได้ว่า F เป็นเซตปิดที่ $F \subset E$ และ

$$m(E - F) = m\left(E \cap F^c\right) = m\left(E \cap \mathcal{O}\right) = m\left(\mathcal{O} - E^c\right) < \varepsilon$$

(3) $\Rightarrow$ (5) สมมติให้ (3) เป็นจริง สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ F_n เป็นเซตปิดที่ $F_n \subset E$ และ

$$m^*\left(E - F_n\right) < \frac{1}{n}$$

ให้ $F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ จะได้ว่า F เป็นเซต F_σ ที่ $F\subset E$ และ $E-F\subset E-F_n$ ดังนั้น

$$m^*(E-F)\leq m^*\left(E-F_n\right)<\frac{1}{n}$$

สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$ จึงได้ว่า $m^*(E-F)=0$ ตามต้องการ

(5) $\Rightarrow$ (1) สมมติให้ (5) เป็นจริง และให้ F เป็นเซตที่มีสมบัติตามข้อ 5 ให้ $A=E-F$ ซึ่งจะได้ว่า $m^*(A)=0$ และ $A\in\mathcal{M}$ เนื่องจาก $F\in\mathcal{M}$ และ $E=F\cup A$ จึงได้ว่า $E\in\mathcal{M}$ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 3.3.11. *ให้ $E\subset\mathbb{R}$ เป็นเซตที่มี $m^*(E)<\infty$ จะได้ว่า E เป็นเซตเมเชอร์ได้ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $\varepsilon>0$ จะมีเซต U ซึ่งเป็นยูเนียนจำกัดของช่วงเปิดที่มี $m^*(U\Delta E)<\varepsilon$ เมื่อ $U\Delta E=(U-E)\cup(E-U)$*

บทพิสูจน์ ก่อนอื่นสมมติให้ E เป็นเซตเมเชอร์ได้ และให้ $\varepsilon>0$ โดยทฤษฎีบท 3.3.10 จะมีเซตเปิด $\mathcal{O}$ ที่ $E\subset\mathcal{O}$ และ $m^*(\mathcal{O}-E)<\frac{\varepsilon}{2}$ จากทฤษฎีบท 2.3.27 จะได้ว่า $\mathcal{O}$ เป็นยูเนียนนับได้ของช่วงเปิดที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน นั่นคือ $\mathcal{O}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ เมื่อ I_n เป็นช่วงเปิด (หรืออาจเป็นเซตว่าง) โดยที่ $I_m\cap I_n=\emptyset$ เมื่อ $m\neq n$ สังเกตว่า $m(\mathcal{O})=\sum_{n=1}^{\infty} m\left(I_n\right)<\infty$ จึงได้ว่า มี $N\in\mathbb{N}$ ที่ทำให้ $\sum_{n=N}^{\infty} m\left(I_n\right)<\frac{\varepsilon}{2}$

ให้ $U=\bigcup_{n=1}^{N-1} I_n$ แล้วจะได้ว่า $U-E\subset\mathcal{O}-E$ และ $E-U\subset\left(\bigcup_{n\geq N} I_n\right)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} m(U\Delta E) &= m(U-E)+m(E-U) \\ &\leq m(\mathcal{O}-E)+m\left(\bigcup_{n\geq N} I_n\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่า U มีสมบัติที่ต้องการ

ต่อไปสมมติว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ จะมีเซต U ซึ่งเป็นยูเนียนจำกัดของช่วงเปิดที่มี

$$m^*(U\Delta E)<\varepsilon$$

ให้ $\varepsilon>0$ และให้ U เป็นยูเนียนของช่วงเปิดจำนวนจำกัดที่มี $m^*(U\Delta E)<\frac{\varepsilon}{2}$ จะได้ว่ามี $\mathcal{C}\in\mathcal{C}_{(U\Delta E)}$ ที่ $\sum_{I_n\in\mathcal{C}}\ell(I_n)<\frac{\varepsilon}{2}$ ให้ $V=\bigcup_{I_n\in\mathcal{C}} I_n$ และ $\mathcal{O}=U\cup V$ แล้วจะได้ว่า

$m^*(V) < \frac{\varepsilon}{2}$ และ $\mathcal{O}$ เป็นเซตเปิดที่ $E \subset \mathcal{O}$ และ

$$\begin{aligned} m^*(\mathcal{O} - E) &= m^*\left([U - E] \cup [V - E]\right) \\ &\leq m^*(U - E) + m^*(V) \\ &< m^*(U \Delta E) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 3.3.10 ข้อ 2 จะได้ว่า E เป็นเซตเมเชอร์ได้ $\square$

ทฤษฎีบท 3.3.12. *ให้ $\langle E_n \rangle$ เป็นลำดับของเซตเมเชอร์ได้โดยที่ $E_{n+1} \subset E_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และให้ $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ ถ้ามี n ที่ $m(E_n) < \infty$ แล้วจะได้ว่า*

$$m(E) = \lim_{n \to \infty} m(E_n)$$

บทพิสูจน์ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ $m(E_1) < \infty$ และให้ $A_n = E_n - E_{n+1}$ จะได้ว่า $\langle A_n \rangle$ เป็นลำดับของเซตเมเชอร์ได้ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ

$$E \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \emptyset$$

เนื่องจาก $E_1 = E \cup \left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right]$ และ $m(A_n) = m(E_n) - m(E_{n+1})$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} m(E_1) &= m(E) + \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \\ &= m(E) + \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \left[m(E_n) - m(E_{n+1})\right] \\ &= m(E) + \lim_{N \to \infty} \left[m(E_1) - m(E_{N+1})\right] \\ &= m(E) + m(E_1) - \lim_{N \to \infty} m(E_{N+1}) \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่า $m(E) = \lim_{n \to \infty} m(E_n)$ ตามต้องการ $\square$

ทฤษฎีบท 3.3.13. *ให้ $\langle E_n \rangle$ เป็นลำดับของเซตเมเชอร์ได้โดยที่ $E_n \subset E_{n+1}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ถ้า $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ แล้วจะได้ว่า*

$$m(E) = \lim_{n \to \infty} m(E_n)$$

บทพิสูจน์ เราสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3.12 จึงขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 3.3.14. *ให้ E เป็นเซตเมเชอร์จำกัด สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีเซตกระชับ $K \subset E$ ที่ $m(E - K) < \varepsilon$*

บทพิสูจน์ ให้ $\varepsilon > 0$ โดยทฤษฎีบท 3.3.10 เราได้ว่า มีเซตปิด $F \subset E$ ที่ $m(E - F) < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $F_n = F \cap [-n, n]$ ซึ่งจะได้ว่า F_n เป็นเซตกระชับ เนื่องจาก

$$F_n \subset F_{n+1} \quad \text{และ} \quad F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

โดยทฤษฎีบท 3.3.13 จะได้ว่า $m(F) = \lim_{n \to \infty} m(F_n)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $m(F - F_n) \to 0$ ดังนั้นจึงมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ $m(F - F_N) < \frac{\varepsilon}{2}$ ให้ $K = F_N$ ซึ่งจะได้ว่า K เป็นเซตกระชับ และ

$$\begin{aligned} m(E - K) &= m(E) - m(F_N) = m(E) - m(F) + m(F - F_N) \\ &= m(E - F) + m(F - F_N) < \varepsilon \end{aligned}$$

ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 3.3

1. ให้ A เป็นเซตเมเชอร์ได้ และ $y \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า $A + y$ เป็นเซตเมเชอร์ได้
2. ให้ A และ B เป็นเซตเมเชอร์ได้ จงแสดงว่า $m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$
3. จงแสดงว่า เงื่อนไขการเป็นเซตเมเชอร์ได้ของเซตในลำดับ $\langle E_n \rangle$ ในทฤษฎีบท 3.3.12 นั้นเป็นเงื่อนไขจำเป็น
4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3.13
5. จงพิสูจน์ว่า ทุกเซต A ที่ $m^*(A) > 0$ มีเซตย่อยที่เป็นเซตเมเชอร์ไม่ได้
6. ให้ $A \subset \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $A \cap K$ เป็นเซตเมเชอร์ได้สำหรับทุกเซตกระชับ K แล้ว A เป็นเซตเมเชอร์ได้
7. ให้ $A \subset \mathbb{R}$ โดยที่ $m^*(A) < \infty$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า A เป็นเซตเมเชอร์ไม่ได้ แล้วจะมีเซตเปิด $\mathcal{O}$ ที่ $A \subset \mathcal{O}, m(\mathcal{O}) < \infty$ และ $m^*(\mathcal{O} - A) > m(\mathcal{O}) - m^*(A)$

8. ให้ $E \subset \mathbb{R}$ โดยที่ $m^*(E) < \infty$ จงพิสูจน์ว่า E เป็นเซตเมเชอร์ได้ ก็ต่อเมื่อ

$$b - a = m^*((a,b) \cap E) + m^*((a,b) - E)$$

   สำหรับทุกช่วงเปิดจำกัด (a,b)

3.4 ฟังก์ชันเมเชอร์ได้

บทนิยาม 3.4.1. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ เราจะเรียกฟังก์ชัน $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ว่า* ***ฟังก์ชันเมเชอร์ได้*** *(**measurable function**) บน A หรือ* ***ฟังก์ชันเมเชอร์ได้แบบเลอเบก*** *(**Lebesgue measurable function**) ถ้าสำหรับแต่ละ $\alpha \in \mathbb{R}$*

$$\{x \in A : f(x) > \alpha\}$$

เป็นเซตเมเชอร์ได้

สังเกตว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A และ B เป็นเซตย่อยของ A ที่เมเชอร์ได้ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน B ด้วย เพราะว่า

$$\{x \in B : f(x) > \alpha\} = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \cap B$$

เป็นเซตเมเชอร์ได้สำหรับทุก $\alpha \in \mathbb{R}$

นอกจากบทนิยามนี้แล้ว เราสามารถนิยามการเมเชอร์ได้ของฟังก์ชันได้อีกหลายแบบที่คล้ายคลึงกัน และสมมูลกันกับบทนิยาม 3.4.1 ดังทฤษฎีบท 3.4.2 จะแสดงให้เห็น

ทฤษฎีบท 3.4.2. *ให้ $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ โดยที่ A เป็นเซตเมเชอร์ได้ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน*

1. $\{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$ *สำหรับทุก* $\alpha \in \mathbb{R}$

2. $\{x \in A : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{M}$ *สำหรับทุก* $\alpha \in \mathbb{R}$

3. $\{x \in A : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{M}$ *สำหรับทุก* $\alpha \in \mathbb{R}$

4. $\{x \in A : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{M}$ *สำหรับทุก* $\alpha \in \mathbb{R}$

บทพิสูจน์ ในที่นี้จะแสดงว่า (1) $\Rightarrow$ (2) และขอละส่วนที่เหลือไว้เป็นแบบฝึกหัด

สมมติให้ $\{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$ สำหรับทุก $\alpha \in \mathbb{R}$ ให้ α เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\{x \in A : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in A : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\}$$

ซึ่งเป็นอินเตอร์เซกชันนับได้ของเซตเมเชอร์ได้ ดังนั้น $\{x \in A : f(x) \geq \alpha\}$ จึงเป็นเซตเมเชอร์ได้ $\square$

จากทฤษฎีบท 3.4.2 เราสามารถสรุปได้ว่า ถ้า $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ แล้ว $f^{-1}[\alpha]$ เป็นเซตเมเชอร์ได้สำหรับทุก $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$

บทแทรก 3.4.3. *ถ้า* $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ *เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ และ* $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ *แล้ว* $\{x \in A : f(x) = \alpha\}$ *เป็นเซตเมเชอร์ได้*

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบท 3.4.2 จะได้ว่า

$$f^{-1}[\alpha] = \{x \in A : f(x) \leq \alpha\} \cap \{x \in A : f(x) \geq \alpha\}$$

เป็นอินเตอร์เซกชันของสองเซตที่เมเชอร์ได้ ดังนั้น $f^{-1}[\alpha]$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ $\square$

สังเกตว่า ถ้า D เป็นเซตย่อยที่หนาแน่นใน $\mathbb{R}$ และ f เป็นฟังก์ชันบนเซตเมเชอร์ได้ A แล้ว สำหรับแต่ละ $\alpha \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\{x \in A : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{\beta \in D, \beta \geq \alpha} \{x \in A : f(x) > \beta\}$$

โดยเฉพาะกรณี $D = \mathbb{Q}$ เราจะได้ว่า

$$\{x \in A : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{\beta \in \mathbb{Q}, \beta \geq \alpha} \{x \in A : f(x) > \beta\}$$

เป็นยูเนียนนับได้ ดังนั้นในการแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้นั้น เราเพียงพอที่จะแสดงว่า $\{x \in A : f(x) > \alpha\}$ เป็นเซตเมเชอร์ได้สำหรับทุก $\alpha \in \mathbb{Q}$

จากบทนิยามเราจะได้ว่า ในกรณี f เป็นฟังก์ชันค่าจริง f จะเป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}[(\alpha, \infty)]$ เป็นเซตเมเชอร์ได้สำหรับทุก $\alpha \in \mathbb{R}$ จากข้อสังเกตนี้และทฤษฎีบท 3.4.2 เราจะได้ความจริงต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.4.4. *ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนเซตเมเชอร์ได้ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}[I]$ เป็นเซตเมเชอร์ได้สำหรับทุกช่วงเปิด I*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด $\square$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ และ $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตเปิด จะได้ว่า มีลำดับของช่วงเปิด $\langle I_n \rangle$ ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน (บาง I_n อาจเป็นเซตว่าง) และ $\mathcal{O} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ โดยทฤษฎีบท 3.4.4 จะได้ว่า

$$f^{-1}[\mathcal{O}] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}[I_n] \in \mathcal{M}$$

ซึ่งทำให้สรุปได้ว่า ฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตเมเชอร์ได้เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

ทฤษฎีบท 3.4.5. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ ถ้า $f : A \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้*

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน A เราเพียงพอที่จะแสดงว่า $f^{-1}[I]$ เป็นเซตเมเชอร์ได้สำหรับทุกช่วงเปิด I

ให้ I เป็นช่วงเปิด จะได้ว่า $f^{-1}[I]$ เป็นเซตเปิดใน A ดังนั้นจะมีเซตเปิด $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ ที่ $\mathcal{O} \cap A = f^{-1}[I]$ เนื่องจากเซตเปิดเป็นเซตเมเชอร์ได้ จึงได้ว่า $f^{-1}[I]$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ และโดยทฤษฎีบท 3.4.4 สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A $\square$

นอกจากฟังก์ชันต่อเนื่องจะเป็นตัวอย่างของฟังก์ชันเมเชอร์ได้แล้ว เราสามารถพิสูจน์ได้ไม่ยากว่า ฟังก์ชันขั้นบันไดก็เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้เช่นกัน

บทนิยาม 3.4.6. *ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากโดเมน A ไปยัง $\overline{\mathbb{R}}$ เรานิยามฟังก์ชัน $f \vee g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ และ $f \wedge g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ โดยให้*

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{และ} \quad (f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 3.4.7. *ให้ $f : A \to \mathbb{R}$ และ $g : A \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ และให้ $c \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $cf, f \pm g, fg, f \vee g$ และ $f \wedge g$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A*

บทพิสูจน์ (1) จะแสดงว่า cf เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

ถ้า $c = 0$ จะได้ว่า cf เป็นฟังก์ชันคงตัวศูนย์ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

ถ้า $c > 0$ จะได้ว่า

$$\{x \in A : cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in A : f(x) > \frac{\alpha}{c}\right\}$$

ถ้า $c < 0$ จะได้ว่า

$$\{x \in A : cf(x) > \alpha\} = \left\{x \in A : f(x) < \frac{\alpha}{c}\right\}$$

ซึ่งทั้งสองเซตทางขวามือเป็นเซตเมเชอร์ได้สำหรับทุก $\alpha \in \mathbb{R}$ จึงได้ว่า cf เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ตามต้องการ

(2) จะแสดงว่า $f + g$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

ให้ $\alpha \in \mathbb{R}$ สังเกตว่า $(f+g)(x) = f(x) + g(x) < \alpha$ ก็ต่อเมื่อ มี $r \in \mathbb{Q}$ ที่

$$f(x) < r < \alpha - g(x)$$

ดังนั้น x จะเป็นคำตอบของอสมการ $(f+g)(x) < \alpha$ ก็ต่อเมื่อ x เป็นคำตอบของอสมการ

$$f(x) < r \quad \text{และ} \quad g(x) < \alpha - r$$

สำหรับบาง $r \in \mathbb{Q}$ ทำให้ได้ว่า

$$\{x \in A : (f+g)(x) < \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [\{x \in A : f(x) < r\} \cap \{x \in A : g(x) < \alpha - r\}]$$

ซึ่งเป็นยูเนียนนับได้ของเซตเมเชอร์ได้ จึงเป็นเซตเมเชอร์ได้ ดังนั้น $f + g$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

กรณี $f - g$ ให้พิจารณา $f - g = f + (-g)$ ซึ่งจาก (1) จะได้ว่า $f - g$ เป็นผลบวกของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ ดังนั้น $f - g$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

(3) จะแสดงว่า fg เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

ก่อนอื่นจะแสดงว่า f^2 เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ เนื่องจาก $f^2(x) \geq 0$ สำหรับทุก x จึงเพียงพอที่จะแสดงว่า $\{x \in A : f^2(x) > \alpha\}$ เป็นเซตเมเชอร์ได้สำหรับทุก $\alpha \geq 0$

ให้ $\alpha \geq 0$ เราจะได้ว่า

$$\{x \in A : f^2(x) > \alpha\} = \{x \in A : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in A : f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$$

ซึ่งเป็นเซตเมเชอร์ได้ ดังนั้น f^2 เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

จาก $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$ จะได้ว่า

$$fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$$

ซึ่งเป็นผลบวกของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ จึงได้ว่า fg เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ตามต้องการ

(4) จะแสดงว่า $f \vee g$ และ $f \wedge g$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

ให้ $\alpha \in \mathbb{R}$ จากบทนิยามจะได้ว่า

$$\{x \in A : (f \vee g)(x) > \alpha\} = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in A : g(x) > \alpha\}$$

และ

$$\{x \in A : (f \wedge g)(x) > \alpha\} = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \cap \{x \in A : g(x) > \alpha\}$$

ซึ่งทั้งสองเซตทางขวามือเป็นเซตเมเชอร์ได้ ดังนั้น $f \vee g$ และ $f \wedge g$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ตามต้องการ $\square$

ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันบนเซต A เรานิยามฟังก์ชัน $\sup\limits_{1\le n\le N} f_n, \inf\limits_{1\le n\le N} f_n, \sup\limits_{n\ge N} f_n, \inf\limits_{n\ge N} f_n, \sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n$ และ $\liminf f_n$ บน A ดังนี้

$$\sup_{1\le n\le N} f_n(x) = (f_1 \vee f_2 \vee \cdots \vee f_N)(x), \qquad \inf_{1\le n\le N} f_n(x) = (f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_N)(x)$$

$$\sup_{n\ge N} f_n(x) = \sup\{f_n(x) : n \ge N\}, \qquad \inf_{n\ge N} f_n(x) = \inf\{f_n(x) : n \ge N\}$$

$$\sup f_n(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}, \qquad \inf f_n(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\limsup f_n(x) = \lim_{N\to\infty} \sup_{n\ge N} f_n(x), \qquad \liminf f_n(x) = \lim_{N\to\infty} \inf_{n\ge N} f_n(x)$$

โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราจะได้ว่า ถ้า $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ แล้ว $\sup\limits_{1\le n\le N} f_n$ และ $\inf\limits_{1\le n\le N} f_n$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

ทฤษฎีบท 3.4.8. *ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A จะได้ว่า $\sup\limits_{n\ge N} f_n, \inf\limits_{n\ge N} f_n, \sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n$ และ $\liminf f_n$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A*

บทพิสูจน์ ให้ $\alpha \in \mathbb{R}$ เนื่องจาก

$$\left\{x \in A : \sup_{n \geq N} f_n(x) > \alpha\right\} = \bigcup_{n \geq N} \{x \in A : f_n(x) > \alpha\}$$

$$\left\{x \in A : \inf_{n \geq N} f_n(x) < \alpha\right\} = \bigcup_{n \geq N} \{x \in A : f_n(x) < \alpha\}$$

$$\{x \in A : \sup f_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in A : f_n(x) > \alpha\}$$

และ

$$\{x \in A : \inf f_n(x) < \alpha\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in A : f_n(x) < \alpha\}$$

ซึ่งเซตทางขวามือทั้งหมดเป็นยูเนียนนับได้ของเซตเมเชอร์ได้ ดังนั้นผลลัพธ์จึงเป็นเซตเมเชอร์ได้ จึงได้ว่า $\sup\limits_{n \geq N} f_n$, $\inf\limits_{n \geq N} f_n$, $\sup f_n$ และ $\inf f_n$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $g_n = \sup\limits_{k \geq n} f_k$ และ $h_n = \inf\limits_{k \geq n} f_k$ จากการพิสูจน์ส่วนแรกเราได้ว่า $\langle g_n \rangle$ และ $\langle h_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ เนื่องจาก $\langle g_n \rangle$ และ $\langle h_n \rangle$ เป็นลำดับลดและลำดับเพิ่มตามลำดับ จึงได้ว่า

$$\limsup f_n = \inf g_n \text{ และ } \liminf f_n = \sup h_n$$

และผลจากการพิสูจน์ส่วนแรกเราได้ว่า $\limsup f_n$ และ $\liminf f_n$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ตามต้องการ $\square$

บทแทรก 3.4.9. *ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A ถ้า $\langle f_n \rangle$ ลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน f บน A แล้ว f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A*

เราจะกล่าวว่า สมบัติหนึ่งเป็นจริง***เกือบทุกแห่ง*** (*almost everywhere* หรือ *a.e.*) บนเซต A ถ้าเซตของจุดใน A ที่สมบัตินั้นไม่เป็นจริงมีเมเชอร์เป็นศูนย์ เช่น เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f และฟังก์ชัน g เท่ากันเกือบทุกแห่งบน A ก็ต่อเมื่อ

$$m(\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

และเราจะกล่าวว่า ลำดับของฟังก์ชัน $\langle f_n \rangle$ ลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน f เกือบทุกแห่งบน A หรือ $f_n \to f$

เกือบทุกแห่งบน A ถ้า $m(\{x \in A : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}) = 0$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 3.4.10. *ให้ f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A และ g เป็นฟังก์ชันบน A ถ้า $f = g$ เกือบทุกแห่งบน A แล้ว g เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A*

บทพิสูจน์ ให้ $f = g$ เกือบทุกแห่งบน A และให้ $E = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ จะได้ว่า $m(E) = 0$ และ $f = g$ บน $A - E$

ให้ $\alpha \in \mathbb{R}$ เนื่องจากทุกเซตย่อยของเซตเมเชอร์ศูนย์เป็นเซตเมเชอร์ได้ จึงได้ว่า $\{x \in E : g(x) > \alpha\}$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ และ

$$\{x \in A - E : g(x) > \alpha\} = \{x \in A : f(x) > \alpha\} - E$$

เป็นเซตเมเชอร์ได้ ทำให้ได้ว่า

$$\{x \in A : g(x) > \alpha\} = \{x \in E : g(x) > \alpha\} \cup \{x \in A - E : g(x) > \alpha\}$$

เป็นเซตเมเชอร์ได้ ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A ตามต้องการ $\square$

บทแทรก 3.4.11. *ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A ถ้า $\langle f_n \rangle$ ลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน f เกือบทุกแห่งบน A แล้ว f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด $\square$

จากบทนิยามของฟังก์ชันแคแรกเทอริสติก χ_A เราได้ว่า χ_A เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตเมเชอร์ได้

บทนิยาม 3.4.12. *ให้ A เป็นเซตเมเชอร์ได้ เราเรียกฟังก์ชัน $\varphi : A \to \mathbb{R}$ ว่า* ***ฟังก์ชันเชิงเดียว*** (***simple function***) *ถ้า φ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ที่มี $\varphi[A]$ เป็นเซตจำกัด*

ตัวอย่างของฟังก์ชันเชิงเดียว เช่น χ_A เมื่อ A เป็นเซตเมเชอร์ได้ และฟังก์ชันขั้นบันได เป็นต้น จากบทนิยาม เราสามารถแสดงได้ไม่ยากว่า $\vee, \wedge$ และ ***ผลรวมเชิงเส้น*** (***linear combination***) ของฟังก์ชันเชิงเดียวยังคงเป็นฟังก์ชันเชิงเดียว นั่นคือ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันเชิงเดียว และ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ แล้ว $f \vee g, f \wedge g$ และ $\alpha f + \beta g$ เป็นฟังก์ชันเชิงเดียว สังเกตว่า ฟังก์ชันเชิงเดียวฟังก์ชันหนึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกเชิงเส้นของฟังก์ชันเชิงเดียวได้หลายรูปแบบ แต่มีอยู่รูปแบบหนึ่งที่ทุกฟังก์ชันเชิงเดียวจะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบนี้ได้เพียงอย่างเดียวเท่านั้น โดยฟังก์ชันที่เขียนในรูปแบบนี้มีชื่อเรียกว่า ตัวแทนบัญญัติของฟังก์ชันเชิงเดียว

บทนิยาม 3.4.13. *ให้ $\varphi : A \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเชิงเดียว และ $\varphi[A] = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ถ้า $E_k = \varphi^{-1}[a_k]$ สำหรับแต่ละ $k = 1, 2, \ldots, n$ แล้วเราเรียกผลรวมเชิงเส้น*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x)$$

*ว่า **ตัวแทนบัญญัติ** (canonical representation) ของ φ*

ทฤษฎีบท 3.4.14. *ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนเซตเมเชอร์จำกัด E จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ ก็ต่อเมื่อ มีลำดับเพิ่มของฟังก์ชันเชิงเดียว $\langle \varphi_n \rangle$ และลำดับลดของฟังก์ชันเชิงเดียว $\langle \psi_n \rangle$ ที่ลู่เข้าสู่ f แบบเอกรูปบน E*

บทพิสูจน์ สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ และ M เป็นจำนวนจริงบวกที่ $|f(x)| \leq M$ สำหรับทุก $x \in E$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ และ $-n \leq k \leq n$ ให้

$$E_{n,k} = \left\{ x \in E : \frac{(k-1)M}{n} < f(x) \leq \frac{kM}{n} \right\}$$

ซึ่งจะได้ว่า $E_{n,-n}, \ldots E_{n,n}$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ $E = \bigcup_{k=-n}^{n} E_{n,k}$ นิยามให้

$$\varphi'_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1)\chi_{E_{n,k}} \quad \text{และ} \quad \psi'_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k\chi_{E_{n,k}}$$

ซึ่งจะได้ว่า φ'_n และ ψ'_n เป็นฟังก์ชันเชิงเดียวที่ $\varphi'_n(x) \leq f(x) \leq \psi'_n(x)$ สำหรับทุก $x \in E$ และทุก $n \in \mathbb{N}$ สังเกตว่า $\psi'_n(x) - \varphi'_n(x) = \frac{M}{n}$ บน E

ให้ $\varphi_n = \varphi'_1 \vee \varphi'_2 \vee \cdots \vee \varphi'_n$ และ $\psi_n = \psi'_1 \wedge \psi'_2 \wedge \cdots \wedge \psi'_n$ เราจะได้ว่า φ_n และ ψ_n เป็นฟังก์ชันเชิงเดียวที่ $\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x), \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ และ $\psi_{n+1}(x) \leq \psi_n(x)$ สำหรับทุก $x \in E$ และทุก $n \in \mathbb{N}$ นอกจากนี้

$$0 \leq \psi_n(x) - \varphi_n(x) \leq \frac{M}{n}$$

บน E ซึ่งจะได้ว่า $\varphi_n \to f$ และ $\psi_n \to f$ แบบเอกรูปบน E ดังนั้น $\langle \varphi_n \rangle$ และ $\langle \psi_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเชิงเดียวที่มีสมบัติตามต้องการ

ขากลับของทฤษฎีบทเป็นจริงตามผลของบทแทรก 3.4.9 $\square$

ทฤษฎีบท 3.4.15. *ให้ f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บนช่วงปิด $[a,b]$ และ $|f(x)| < \infty$ เกือบทุกแห่งบน $[a,b]$ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ และ $\delta > 0$ จะมีเซต $A \subset [a,b]$ ที่ $m(A) < \delta$ และมีฟังก์ชันเชิงเดียว φ บน $[a,b]$ ที่มีสมบัติว่า*

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $x \in [a,b] - A$

บทพิสูจน์ ให้ $E_\infty = \{x \in [a,b] : |f(x)| = \infty\}$ ซึ่งโดยเงื่อนไขของทฤษฎีบทจะได้ว่า $m(E_\infty) = 0$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $E_n = \{x \in [a,b] : n-1 \leq |f(x)| < n\}$ ซึ่งจะได้ว่า $\langle E_n \rangle$ เป็นลำดับของเซตเมเชอร์ได้ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = [a,b] - E_\infty$

ให้ $\delta > 0$ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = m([a,b]) - m\left(E_\infty\right) < +\infty$ จึงได้ว่ามี $N \in \mathbb{N}$ ที่

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} m(E_n) < \delta$$

ให้ $A = \left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} E_n\right) \cup E_\infty$ จะได้ว่า $|f(x)| \geq N$ สำหรับทุก $x \in A$ และ $|f(x)| < N$ เมื่อ $x \in [a,b] - A$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $M \in \mathbb{N}$ ที่ $M > \frac{2N}{\varepsilon}$ และให้

$$B_k = \left\{x \in [a,b] : -N + \frac{2(k-1)N}{M} \leq f(x) < -N + \frac{2kN}{M}\right\}$$

เมื่อ $k = 1, 2, \ldots, M$ จะเห็นได้ว่า $B_1, B_2, \ldots, B_M$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน นิยามฟังก์ชันเชิงเดียว φ โดยให้

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{M} \left(-N + \frac{2(k-1)N}{M}\right) \chi_{B_k}(x)$$

ซึ่งจะได้ว่า ถ้า $x \in [a,b] - A$ แล้ว $x \in B_k$ สำหรับบาง k และ

$$\begin{aligned} |f(x) - \varphi(x)| &= \left| f(x) - \left(-N + \frac{2(k-1)N}{M}\right) \right| \\ &< \left| -N + \frac{2kN}{M} + N - \frac{2(k-1)N}{M} \right| = \frac{2N}{M} < \varepsilon \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ สำหรับทุก $x \in [a,b] - A$ ตามต้องการ $\square$

ทฤษฎีบท 3.4.16. *ให้ φ เป็นฟังก์ชันเชิงเดียวบนช่วงปิด $[a,b]$ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีเซต $E \subset [a,b]$ ที่ $m(E) < \varepsilon$ และมีฟังก์ชันขั้นบันได ψ บน $[a,b]$ ที่มีสมบัติว่า $\psi(x) = \varphi(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b] - E$*

บทพิสูจน์ เราจะพิสูจน์ด้วยวิธีการอุปนัยบน n เมื่อฟังก์ชันเชิงเดียว φ บน $[a,b]$ มี $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$ เป็นตัวแทนบัญญัติ

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

> "ถ้า $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$ เป็นตัวแทนบัญญัติของฟังก์ชันเชิงเดียว φ บน $[a,b]$ แล้วสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีเซต $E \subset [a,b]$ ที่ $m(E) < \varepsilon$ และมีฟังก์ชันขั้นบันได ψ บน $[a,b]$ ที่ $\psi(x) = \varphi(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b] - E$"

ขั้นฐาน ให้ $\varphi = \alpha\chi_A$ โดยที่ $\alpha \in \mathbb{R}$ และ $A \subset [a,b]$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ และให้ $\varepsilon > 0$ โดยทฤษฎีบท 3.3.11 จะได้ว่า มีเซตจำกัด B ซึ่งประกอบด้วยช่วงเปิดที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ

$$m\left(A \triangle \bigcup_{I \in B} I\right) < \varepsilon$$

ให้ $E = A \triangle \bigcup\limits_{I \in B} I$ และให้

$$\psi(x) = \begin{cases} \alpha & \text{เมื่อ } x \in [a,b] \cap \bigcup\limits_{I \in B} I \\ 0 & \text{เมื่อ } x \in [a,b] - \bigcup\limits_{I \in B} I \end{cases}$$

จะได้ว่า $m(E) < \varepsilon$ และ ψ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบน $[a,b]$ เราสามารถแสดงได้ไม่ยากว่า $\varphi(x) = \psi(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b] - E$ จึงขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $n \in \mathbb{N}$ ที่ $P(n)$ เป็นจริง ให้ $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \chi_{A_k}$ เป็นตัวแทนบัญญัติของฟังก์ชันเชิงเดียว φ บน $[a,b]$ และให้ $\varphi_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$ และ $\varphi_2 = \alpha_{n+1}\chi_{A_{n+1}}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเดียวบน $[a,b]$ และเขียนอยู่ในรูปตัวแทนบัญญัติ สังเกตว่า $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

ให้ $\varepsilon > 0$ จากสมมติฐานของการอุปนัยที่ว่า $P(n)$ เป็นจริง จะได้ว่า มี $E_1 \subset [a,b]$ ที่ $m(E_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ และมีฟังก์ชันขั้นบันได ψ_1 บน $[a,b]$ ที่ $\psi_1(x) = \varphi_1(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]-E_1$ และจากขั้นฐานจะได้ว่า มี $E_2 \subset [a,b]$ ที่ $m(E_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ และมีฟังก์ชันขั้นบันได ψ_2 บน $[a,b]$ ที่ $\psi_2(x) = \varphi_2(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b] - E_2$

ให้ $E = E_1 \cup E_2$ และให้ $\psi = \psi_1 + \psi_2$ เราจะได้ว่า $m(E) < \varepsilon$ และ ψ เป็นฟังก์ชันขั้น

บันไดบน $[a,b]$ โดยที่ ถ้า $x \in [a,b] - E$ เราจะได้ว่า

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) = \psi(x)$$

อันเป็นการแสดงว่า $P(n+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ n □

ทฤษฎีบท 3.4.17. *ให้ ψ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบนช่วงปิด $[a,b]$ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีเซต $A \subset [a,b]$ ที่ $m(A) < \varepsilon$ และมีฟังก์ชันต่อเนื่อง f บน $[a,b]$ ที่มีสมบัติว่า $f(x) = \psi(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b] - A$*

บทพิสูจน์ เราจะพิสูจน์ด้วยวิธีการอุปนัยบน n เมื่อฟังก์ชันขั้นบันได ψ บน $[a,b]$ เขียนอยู่รูป $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{I_k}$ โดยที่ $I_1, I_2, \ldots, I_n$ เป็นช่วงที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ $\bigcup_{k=1}^{n} I_k \subset [a,b]$

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

> "ถ้า ψ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบน $[a,b]$ ที่เขียนได้ในรูป $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{I_k}$ โดยที่ $I_1, I_2, \ldots, I_n$ เป็นช่วงที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ $\bigcup_{k=1}^{n} I_k \subset [a,b]$ แล้วสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีเซต $E \subset [a,b]$ ที่ $m(E) < \varepsilon$ และมีฟังก์ชันต่อเนื่อง f บน $[a,b]$ ที่ $f(x) = \psi(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b] - E$"

ขั้นฐาน ให้ $\psi = \alpha \chi_I$ โดยที่ $\alpha \in \mathbb{R}$ และ $I \subset [a,b]$ เป็นช่วงที่มี c และ d เป็นจุดปลายซ้ายและขวาตามลำดับ และให้ $\varepsilon > 0$ ถ้า I เป็นเซตโทน (นั่นคือ กรณี $c = d$) เราให้ f เป็นฟังก์ชันคงตัวศูนย์บน $[a,b]$ และให้ $E = I$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า เซต E และฟังก์ชัน f มีสมบัติตามต้องการ

ต่อไปพิจารณากรณี $c < d$ ให้ $\delta = \frac{1}{3} \cdot \min\{d-c, \varepsilon\}$ และนิยาม $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ โดยให้

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } a \le x \le c \\ \alpha \cdot \frac{x-c}{\delta} & \text{เมื่อ } c < x \le c+\delta \\ \alpha & \text{เมื่อ } c+\delta < x < d-\delta \\ \alpha \cdot \frac{d-x}{\delta} & \text{เมื่อ } d-\delta \le x < d \\ 0 & \text{เมื่อ } d \le x \le b \end{cases}$$

เห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $f(x) = \psi(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b] - E$ เมื่อ $E = [c, c+\delta] \cup [d-\delta, d]$ โดยที่ $m(E) = 2\delta < \varepsilon$

ดังนั้น ไม่ว่ากรณีใดก็ตาม เราได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ $n \in \mathbb{N}$ ที่ $P(n)$ เป็นจริง ให้ ψ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบน $[a,b]$ ที่เขียนได้ในรูป $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \chi_{I_k}$ โดยที่ $I_1, I_2, \ldots, I_{n+1}$ เป็นช่วงที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ $\bigcup_{k=1}^{n+1} I_k \subset [a,b]$ และให้ $\psi_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{I_k}$ และ $\psi_2 = \alpha_{n+1}\chi_{I_{n+1}}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบน $[a,b]$ และ $\psi = \psi_1 + \psi_2$

ให้ $\varepsilon > 0$ จากสมมติฐานของการอุปนัยที่ว่า $P(n)$ เป็นจริง จะได้ว่า มี $E_1 \subset [a,b]$ ที่ $m(E_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ และมีฟังก์ชัน f_1 ที่ต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $f_1(x) = \psi_1(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b] - E_1$ และจากขั้นฐานจะได้ว่า มี $E_2 \subset [a,b]$ ที่ $m(E_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ และมีฟังก์ชัน f_2 ที่ต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $f_2(x) = \psi_2(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b] - E_2$

ให้ $E = E_1 \cup E_2$ และให้ $f = f_1 + f_2$ เราจะได้ว่า $m(E) < \varepsilon$ และ ψ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ โดยที่ ถ้า $x \in [a,b] - E$ เราจะได้ว่า

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) = \psi(x)$$

อันเป็นการแสดงว่า $P(n+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ n $\square$

ผลจากทฤษฎีบท 3.4.15-3.4.17 เราจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.4.18. *ให้ f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บนช่วงปิด $[a,b]$ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีเซต $A \subset [a,b]$ ที่ $m(A) < \varepsilon$ และมีฟังก์ชันขั้นบันได ψ และฟังก์ชันต่อเนื่อง g บน $[a,b]$ ที่มีสมบัติว่า*

$$|f(x) - \psi(x)| < \varepsilon \quad \text{และ} \quad |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $x \in [a,b] - A$

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด $\square$

จากทฤษฎีบท 3.4.18 เราอาจกล่าวได้ว่า ฟังก์ชันเมเชอร์ได้บนช่วงปิดเป็นฟังก์ชันที่*เกือบต่อเนื่อง* (nearly continuous) แต่อาจจะไม่ต่อเนื่องที่จุดใดเลยก็ได้ เช่นฟังก์ชัน χ_A เมื่อ $A = \mathbb{Q}$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 3.4.19. *ให้ E เป็นเซตเมเชอร์จำกัด และให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน E ที่ลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน f เกือบทุกแห่งบน E โดยที่ $|f(x)| < \infty$ เกือบทุกแห่งบน E สำหรับแต่ละ*

$\varepsilon > 0$ จะมีเซต $A \subset E$ ที่ $m(A) < \varepsilon$ และมี $N \in \mathbb{N}$ ที่มีสมบัติว่า ถ้า $n \geq N$ แล้ว

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $x \in E - A$

บทพิสูจน์ ให้ $B = \{x \in E : f_n(x) \nrightarrow f(x)\} \cup \{x \in E : |f(x)| = \infty\}$ ซึ่งจากเงื่อนไขของทฤษฎีบท จะได้ว่า $m(B) = 0$ โดยบทแทรก 3.4.11 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน E

ให้ $\varepsilon > 0$ และ $E_0 = E - B$ จะได้ว่า $f_n \to f$ บน E_0 สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้

$$E_n = \bigcup_{k \geq n} \{x \in E_0 : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

ซึ่งจะได้ว่า ถ้า $x \in E_0 - E_n$ แล้ว $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ สำหรับทุก $k \geq n$ สังเกตว่า $E_{n+1} \subset E_n$ และ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$ เพราะว่าถ้า $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ แล้ว $f_n(x) \nrightarrow f(x)$ ซึ่งขัดแย้งกับความจริงที่ว่า $f_n \to f$ บน E_0

จาก $E_{n+1} \subset E_n$ และ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$ โดยทฤษฎีบท 3.3.12 จะได้ว่า $m(E_n) \to 0$ ดังนั้นจึงมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ $m(E_N) < \varepsilon$ ให้ $A = B \cup E_N$ ซึ่งจะได้ว่า $m(A) < \varepsilon$ และถ้า $n \geq N$ แล้ว

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $x \in E - A$ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 3.4.20 (Egoroff's theorem)**.** *ให้ E เป็นเซตเมเชอร์จำกัด และให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน E ที่ลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน f เกือบทุกแห่งบน E โดยที่ $|f(x)| < \infty$ เกือบทุกแห่งบน E สำหรับแต่ละ $\delta > 0$ จะมีเซต $A \subset E$ ที่ $m(A) < \delta$ และ $f_n \to f$ แบบเอกรูปบน $E - A$*

บทพิสูจน์ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติให้ $0 < \delta < 1$ โดยทฤษฎีบท 3.4.19 จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ จะมี $A_k \subset E$ ที่ $m(A_k) < \frac{\delta}{2^k}$ และมี $N_k \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ ถ้า $n \geq N_k$ แล้ว

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\delta}{2^k} < \frac{1}{2^k}$$

บน $E - A_k$ ให้ $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ซึ่งจะได้ว่า $m(A) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) < \delta$

เราจะแสดงว่า $f_n \to f$ แบบเอกรูปบน $E - A$ ให้ $\varepsilon > 0$ และให้ $k \in \mathbb{N}$ ที่ $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$ เนื่องจาก $E - A \subset E - A_k$ จึงได้ว่า ถ้า $x \in E - A$ แล้ว

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n \geq N_k$ ซึ่งเป็นการแสดงว่า $f_n \to f$ แบบเอกรูปบน $E - A$ ตามต้องการ □

จากทฤษฎีบท 3.4.20 เราอาจกล่าวได้ว่า ถ้าลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้เป็นลำดับลู่เข้า แล้วการลู่เข้านั้นจะเป็น*การลู่เข้าแบบเกือบเอกรูป* (nearly uniform convergence)

ทฤษฎีบท 3.4.21 (Lusin's theorem)**.** *ให้ E เป็นเซตเมเชอร์จำกัด และให้ $f : E \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีเซตกระชับ $K \subset E$ ที่ $m(E - K) < \varepsilon$ และ f ต่อเนื่องบน K*

บทพิสูจน์ ให้ $\mathcal{F} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ เป็นเซตของช่วงเปิดที่มีจุดปลายเป็นจำนวนตรรกยะ ซึ่งจะได้ว่า $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ โดยทฤษฎีบท 3.3.14 จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ จะมีเซตกระชับ K_n และ L_n ที่มีสมบัติว่า $K_n \subset f^{-1}[V_n]$, $L_n \subset E - f^{-1}[V_n]$ และ

$$m\left(E - [K_n \cup L_n]\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

ให้ $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (K_n \cup L_n)$ ซึ่งจะได้ว่า K เป็นเซตกระชับ และ

$$\begin{aligned} m(E - K) &= m\left(E \cap \left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (K_n \cup L_n)^c\right]\right) \\ &= m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [E - (K_n \cup L_n)]\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m\left(E - [K_n \cup L_n]\right) < \varepsilon \end{aligned}$$

ต่อไปเราจะแสดงว่า f ต่อเนื่องบน K
ให้ $x_0 \in K$ และให้ $\varepsilon_0 > 0$ จะได้ว่า มีจำนวนนับ n ที่ $f(x_0) \in V_n$ และ $V_n \subset B(f(x_0), \varepsilon_0)$ ให้ $\mathcal{O}_n = (L_n)^c$ และ $U_n = \mathcal{O}_n \cap K$ จาก $f(x_0) \in V_n$ และ $L_n \subset E - f^{-1}[V_n]$ จะได้ว่า $x_0 \in \mathcal{O}_n$ ซึ่งเป็นเซตเปิดและ $U_n \subset K_n$ ดังนั้น $f(U_n) \subset V_n$ ให้ $\delta > 0$ ที่ทำให้ $B(x_0, \delta) \subset \mathcal{O}_n$ ซึ่งจะได้ว่า $\big(K \cap B(x_0, \delta)\big) \subset U_n$ ดังนั้น ถ้า $x \in K \cap B(x_0, \delta)$ แล้ว $f(x) \in V_n$ หรือ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0$ ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.4.2
2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.4.4
3. จงแสดงว่า ฟังก์ชันขั้นบันไดเป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้
4. จงแสดงว่า ถ้า f และ g ฟังก์ชันขั้นบันไดบน $[a, b]$ แล้ว $f \vee g, f \wedge g$ และ $\alpha f + \beta g$ ฟังก์ชันขั้นบันไดบน $[a, b]$ เมื่อ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
5. จงพิสูจน์บทแทรก 3.4.11
6. ให้ $\varphi : A \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเชิงเดียว โดยที่ $\varphi[A] = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ และให้ $E_k = \varphi^{-1}[a_k]$ สำหรับแต่ละ $k = 1, 2, \ldots, n$ จงแสดงว่า
$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x) \quad \text{สำหรับทุก } x \in A$$
7. ให้ φ_1 และ φ_2 เป็นฟังก์ชันเชิงเดียวบนเซตเมเชอร์ได้ A จงแสดงว่า $\varphi_1 \vee \varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2$ และ $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$ เป็นฟังก์ชันเชิงเดียวบน A เมื่อ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
8. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.4.18
9. ให้ $f : A \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ และ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จงพิสูจน์ว่า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A
10. ให้ f เป็นฟังก์ชันคันเตอร์ และให้ $g : [0, 1] \to [0, 2]$ นิยามโดย $g(x) = f(x) + x$
    (i) จงแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง
    (ii) จงพิสูจน์ว่า $m(g[C]) = 1$ เมื่อ C เป็นเซตคันเตอร์
    (iii) จงแสดงว่า มีเซตเมเชอร์ได้ $A \subset [0, 1]$ ที่ $g[A]$ ไม่เป็นเซตเมเชอร์ได้
11. จงหาตัวอย่างฟังก์ชันต่อเนื่อง f_1 และฟังก์ชันเมเชอร์ได้ f_2 ที่ทำให้ $f_2 \circ f_1$ ไม่เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้
12. จงแสดงว่า มีเซตเมเชอร์ได้ที่ไม่ใช่เซตโบเรล
13. ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\sum f_n$ ลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน f เกือบทุกแห่งบน A แล้ว f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A

บทที่ 4

ปริพันธ์เลอเบก

ในการศึกษาวิชาแคลคูลัสและวิชาคณิตวิเคราะห์ซึ่งเป็นพื้นฐานของการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่าง ๆ นั้น เราได้ศึกษาเกี่ยวกับการหาปริพันธ์รีมันน์ของฟังก์ชันค่าจริงที่มีโดเมนเป็นช่วง ซึ่งการหาปริพันธ์ด้วยวิธีนี้มีข้อจำกัดและจุดอ่อนอยู่ เช่น ถ้าโดเมนไม่ใช่ช่วงหรือยูเนียนของช่วง การหาปริพันธ์ก็ไม่สามารถทำได้ หรือฟังก์ชัน f ที่นิยามบนช่วงปิด $[0, 1]$ โดย

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x \in [0,1] - \mathbb{Q} \\ 0 & \text{เมื่อ } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ไม่ได้ แต่เมื่อเราพิจารณาถึงเซต $A = [0, 1] - \mathbb{Q}$ ซึ่งประกอบด้วยจุดที่ฟังก์ชันมีค่าเป็น 1 กับเซต $B = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ซึ่งประกอบด้วยจุดที่ฟังก์ชันมีค่าเป็น 0 แล้วเราจะเห็นว่า A เป็นเซตนับไม่ได้ แต่ B เป็นเซตนับได้ ซึ่งการเปรียบเทียบเชิงปริมาณแบบนี้ยังเห็นได้ไม่ชัดว่า A และ B มีขนาดต่างกันเพียงใด แต่เมื่อเราใช้เมเชอร์เลอเบกมาเป็นเครื่องมือวัด เราจะได้ว่า $m(A) = 1$ และ $m(B) = 0$ ดังนั้นฟังก์ชัน f นี้มีค่าเป็น 1 บนเซตที่มีค่าเมเชอร์เป็น 1 และมีค่าเป็น 0 บนเซตที่มีค่าเมเชอร์เป็น 0 หากแนวคิดพื้นฐานของการหาปริพันธ์ คือ การหาผลรวมของผลคูณของค่าของฟังก์ชันกับขนาดของเซตที่ฟังก์ชันมีค่านั้น ๆ ฟังก์ชัน f นี้ก็ควรที่จะหาปริพันธ์ได้และปริพันธ์ควรจะมีค่าเท่ากับ

$$1 \cdot m(A) + 0 \cdot m(B) = 1$$

จากตัวอย่างนี้เราจะเห็นได้ว่า ถ้าเราแทนการวัดขนาดของเซตด้วยความยาวของช่วงมาเป็นการวัดด้วยเมเชอร์เลอเบก แล้วเราจะสามารถขยายขอบเขตของการหาปริพันธ์ให้ครอบคลุมฟังก์ชัน

ที่มีความซับซ้อนมากขึ้นได้ การหาปริพันธ์ด้วยวิธีนี้มีชื่อว่า ***ปริพันธ์เลอเบก*** (***Lebesgue integral***)

ในบทนี้เราจะมาศึกษาการหาปริพันธ์เลอเบก โดยเริ่มต้นด้วยการทบทวนความจริงเกี่ยวกับปริพันธ์รีมันน์ก่อน แล้วจึงนำเข้าสู่การพัฒนาการหาปริพันธ์เลอเบกของฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนน้อย ซึ่งก็คือฟังก์ชันเชิงเดียว แล้วเพิ่มความซับซ้อนของฟังก์ชันไปเรื่อย ๆ จนในที่สุดเราจะได้การหาปริพันธ์เลอเบกของฟังก์ชันทั่วไป

4.1 ปริพันธ์รีมันน์

ในหัวข้อนี้เราจะทบทวนความรู้เกี่ยวกับปริพันธ์รีมันน์ของฟังก์ชันมีขอบเขตที่มีโดเมนเป็นช่วงจำกัด

บทนิยาม 4.1.1. *ให้ $-\infty < a < b < \infty$ เราเรียกเซตจำกัด $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ว่า **ผลแบ่งกั้น** (**partition**) ของช่วง $[a, b]$ ถ้า*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

และให้ $\mathcal{P}[a, b]$ แทนเซตของผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$ ทั้งหมดที่เป็นไปได้

สังเกตว่าถ้า P_1 และ P_2 เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$ แล้ว $P_1 \cup P_2$ และ $P_1 \cap P_2$ จะเป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$ ด้วย

บทนิยาม 4.1.2. *ให้ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต และ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ เราจะกำหนดให้*

$$s(P, f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k \quad \text{และ} \quad S(P, f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k$$

*เมื่อ $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ และ $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ โดยเราจะเรียก $s(P, f)$ และ $S(P, f)$ ว่า **ผลบวกล่าง** (**lower sum**) และ **ผลบวกบน** (**upper sum**) ของ f ที่สอดคล้องกับ P ตามลำดับ*

หมายเหตุ : เราสามารถแทนช่วงปิด $[a, b]$ ในบทนิยาม 4.1.2 ด้วยช่วงจำกัด I ที่มี a และ b เป็นจุดปลาย โดยถ้า $a \notin I$ เราจะให้ $m_1 = \inf\{f(x) : x \in (a, x_1]\}$ และ $M_1 = \sup\{f(x) : x \in (a, x_1]\}$ และในกรณี $b \notin I$ เราจะให้ $m_n = \inf\{f(x) : x \in [x_{n-1}, b)\}$ และ $M_n = \sup\{f(x) : x \in [x_{n-1}, b)\}$ ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชัน f จึงไม่จำเป็นที่จะต้องเป็นช่วงปิด $[a, b]$

เราก็สามารถหา $s(P,f)$ และ $S(P,f)$ ได้ แต่เพื่อความสะดวก ในที่นี้เราจะกล่าวถึงเฉพาะกรณีโดเมนเป็นช่วงปิด $[a,b]$ เท่านั้น

จากบทนิยามจะเห็นได้ไม่ยากว่า ถ้า $P_1, P_2 \in \mathcal{P}[a,b]$ แล้ว

$$s(P_1,f) \le s(P_1 \cup P_2, f) \le S(P_1 \cup P_2, f) \le S(P_2, f)$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $s(P_1,f) \le S(P_2,f)$ เสมอไม่ว่า P_1 และ P_2 จะเป็นผลแบ่งกั้นใดก็ตามใน $\mathcal{P}[a,b]$ หรือกล่าวสั้น ๆ ว่า ผลบวกล่างมีค่าไม่เกินผลบวกบนเสมอ นอกจากนี้เรายังได้ว่า ถ้า $P, Q \in \mathcal{P}[a,b]$ และ $P \subset Q$ แล้ว

$$s(P,f) \le s(Q,f) \le S(Q,f) \le S(P,f)$$

ในกรณีที่ $P \subset Q$ นี้ เราจะกล่าวว่า Q เป็น***ผลแบ่งกั้นละเอียดของ*** P (***refinement of the partition*** P)

บทนิยาม 4.1.3. *ให้ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต เราจะเรียก*

$$R\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} s(P,f) \quad \text{และ} \quad R\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} S(P,f)$$

ว่า ***ปริพันธ์รีมันน์ล่าง*** (***lower Riemann integral***) *และ* ***ปริพันธ์รีมันน์บน*** (***upper Riemann integral***) *ของ f บน $[a,b]$ ตามลำดับ และเขียนแทนโดยย่อด้วย $R\underline{\int_a^b} f$ และ $R\overline{\int_a^b} f$ ตามลำดับ นอกจากนี้ถ้า*

$$R\underline{\int_a^b} f(x)dx = R\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

แล้วเราจะกล่าวว่า f ***หาปริพันธ์รีมันน์ได้*** (***Riemann integrable***) *และให้*

$$R\int_a^b f(x)dx = R\underline{\int_a^b} f(x)dx = R\overline{\int_a^b} f(x)dx$$

ซึ่งจะเขียนแทนโดยย่อด้วย $R\int_a^b f$ หรือ $R\int_{[a,b]} f$

จากข้อสังเกตก่อนหน้านี้ เราจะได้ว่า

$$\sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} s(P,f) \le \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} S(P,f)$$

ดังนั้นในการตรวจสอบการหาปริพันธ์รีมันน์ได้ของฟังก์ชัน f เราเพียงพอที่จะตรวจสอบว่า

$$\sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} s(P,f) \ge \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} S(P,f)$$

หรือไม่ นอกจากนี้สังเกตว่า ถ้า $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}[a,b]$ แล้วจะได้ว่า

$$\sup_{P\in\mathcal{Q}} s(P,f) \le \sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} s(P,f) \quad \text{และ} \quad \inf_{P\in\mathcal{Q}} S(P,f) \ge \inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} S(P,f)$$

ดังนั้น ถ้ามีเซตย่อย $\mathcal{Q}$ ของ $\mathcal{P}[a,b]$ ที่ทำให้

$$\sup_{P\in\mathcal{Q}} s(P,f) = \inf_{P\in\mathcal{Q}} S(P,f)$$

เราจะได้ว่า f หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[a,b]$

ทฤษฎีบท 4.1.4. *ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[a,b]$ จะได้ว่า*

1. $R\int_a^b cf = cR\int_a^b f$ *สำหรับทุกจำนวนจริง* c
2. $R\int_a^b (f+g) = R\int_a^b f + R\int_a^b g$
3. *ถ้า* $f(x) \le g(x)$ *สำหรับทุก* $x \in [a,b]$ *แล้ว* $R\int_a^b f \le R\int_a^b g$
4. *ถ้า* $c \in (a,b)$ *แล้ว* $R\int_a^b f = R\int_a^c f + R\int_c^b f$

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

บทแทรก 4.1.5. *ถ้า f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[a,b]$ และ $I_1, I_2, \ldots, I_n$ เป็นช่วงที่แต่ละคู่ไม่มีจุดภายในร่วมกันโดยที่ $[a,b] = \bigcup_{k=1}^n I_k$ แล้ว $R\int_a^b f = \sum_{k=1}^n R\int_{I_k} f$*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 4.1.6. *ฟังก์ชันขั้นบันได φ บน $[a,b]$ เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์รีมันน์ได้ และถ้า $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}(x)$ โดยที่ A_k เป็นช่วงที่แต่ละคู่ไม่มีจุดภายในร่วมกันและ $[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ แล้ว*

$$R\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k \ell(A_k)$$

เมื่อ $\ell(I)$ คือความยาวของช่วง I

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

เนื่องจาก $\ell(I) = m(I)$ เมื่อ I เป็นช่วง เราจึงเขียนผลของปริพันธ์รีมันน์ของฟังก์ชันขั้นบันได φ ในทฤษฎีบท 4.1.6 ได้ด้วย

$$R\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k m(A_k)$$

เราจึงนิยามปริพันธ์ของฟังก์ชันขั้นบันไดดังนี้

บทนิยาม 4.1.7. *ให้ $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}(x)$ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบน $[a,b]$ โดยที่ A_k เป็นช่วงที่แต่ละคู่ไม่มีจุดภายในร่วมกันและ $[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ เรานิยามให้*

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k m(A_k)$$

และเขียนแทนโดยย่อด้วย $\int_a^b \varphi$

จากบทนิยามจะได้ว่า $\int_a^b \varphi = R\int_a^b \varphi$ เมื่อ φ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบน $[a,b]$ ซึ่งบทนิยามนี้จะสอดคล้องกับบทนิยามของปริพันธ์เลอเบกที่จะกล่าวถึงในหัวถัดไป

ถ้า φ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบน $[a,b]$ และ $I \subset [a,b]$ เป็นช่วงปิด เราจะได้ว่า $\varphi \cdot \chi_I$ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบน I และ

$$\int_I \varphi = \int_a^b \varphi \cdot \chi_I$$

บทนิยาม 4.1.8. *ให้ φ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบน $[a,b]$ และ $I_1, I_2, \ldots, I_n$ เป็นช่วงปิดที่แต่ละคู่ไม่มีจุดภายในร่วมกันโดยที่ $\bigcup_{k=1}^{n} I_k \subset [a,b]$ นิยามให้*

$$\int_{\bigcup_{k=1}^{n} I_k} \varphi = \sum_{k=1}^{n} \int_{I_k} \varphi$$

ทฤษฎีบท 4.1.9. *ให้ φ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบน $[a,b]$ และ $I_1, I_2, \dots, I_n$ เป็นช่วงปิดที่แต่ละคู่ไม่มีจุดภายในร่วมกันโดยที่ $\bigcup_{k=1}^{n} I_k = [a,b]$ จะได้ว่า*

$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=1}^{n} \int_{I_k} \varphi$$

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด $\square$

บทนิยาม 4.1.10. *ให้ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต สำหรับแต่ละ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a,b]$ และ $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ให้*

$$E_k = [x_{k-1}, x_k) \quad \text{และ} \quad E_n = [x_{n-1}, x_n] \tag{4.1}$$

นิยามฟังก์ชันขั้นบันได φ_P และ ψ_P บน $[a,b]$ โดยให้

$$\varphi_P(x) = \sum_{k=1}^{n} m_k \chi_{E_k}(x) \quad \text{และ} \quad \psi_P(x) = \sum_{k=1}^{n} M_k \chi_{E_k}(x)$$

เมื่อ $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ และ $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

จากบทนิยามจะเห็นได้ว่า $\varphi_P(x) \le f(x) \le \psi_P(x)$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ และ

$$\int_a^b \varphi_P = \sum_{k=1}^{n} m_k \ell(E_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) = s(P,f)$$

และ

$$\int_a^b \psi_P = \sum_{k=1}^{n} M_k \ell(E_k) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) = S(P,f)$$

ดังนั้น

$$R\underline{\int_a^b} f = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \int_a^b \varphi_P \tag{4.2}$$

และ

$$R\overline{\int_a^b} f = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \int_a^b \psi_P \tag{4.3}$$

สัญลักษณ์ 4.1.11. *ให้* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต เราให้* $\Phi(f)$ *และ* $\Psi(f)$ *แทนเซตของฟังก์ชันขั้นบันได* φ *และ* ψ *ตามลำดับ ที่มีสมบัติว่า* $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ *สำหรับทุก* $x \in [a, b]$

ทฤษฎีบท 4.1.12. *ให้* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต เราจะได้ว่า*

$$\sup_{\varphi \in \Phi(f)} \int_a^b \varphi = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \int_a^b \varphi_P \tag{4.4}$$

และ

$$\inf_{\psi \in \Psi(f)} \int_a^b \psi = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \int_a^b \psi_P \tag{4.5}$$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $\{\varphi_P : P \in \mathcal{P}[a, b]\} \subset \Phi(f)$ และ $\{\psi_P : P \in \mathcal{P}[a, b]\} \subset \Psi(f)$ ทำให้ได้ว่า

$$\sup_{\varphi \in \Phi(f)} \int_a^b \varphi \ge \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \int_a^b \varphi_P$$

และ

$$\inf_{\psi \in \Psi(f)} \int_a^b \psi \le \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \int_a^b \psi_P$$

ต่อไปจะแสดงว่า

$$\sup_{\varphi \in \Phi(f)} \int_a^b \varphi \le \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \int_a^b \varphi_p$$

ซึ่งจะทำให้ได้ว่าสมการ (4.4) เป็นจริง โดยเราจะแสดงว่า สำหรับแต่ละ $\varphi \in \Phi(f)$ จะมีผลแบ่งกั้น P ของ $[a, b]$ ที่

$$\int_a^b \varphi \le \int_a^b \varphi_P$$

ให้ $\varphi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k} \in \Phi(f)$ โดยที่ A_k เป็นช่วงที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ $\bigcup_{k=1}^n A_k = [a, b]$ เนื่องจาก $m(I) = m(\overline{I})$ เมื่อ I เป็นช่วง จึงได้ว่า

$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=1}^n c_k m(A_k) = \sum_{k=1}^n c_k m(\overline{A}_k)$$

และเนื่องจาก $m(I) = 0$ เมื่อ I เป็นเซตโทน จึงไม่เสียนัยทั่วไปที่จะสมมติว่า ทุกช่วง A_k เป็นช่วงปิดที่ไม่ใช่เซตโทน

ให้ P เป็นเซตของจุดปลายของช่วง $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ซึ่งจะได้ว่า $P \in \mathcal{P}[a,b]$ จากนิยามของ E_k ใน (4.1) จะได้ว่า $E_k \subset A_k$ สำหรับแต่ละ $k = 1, 2, \ldots, n$ ดังนั้น

$$c_k = \varphi(x) = \inf_{y \in A_k} f(y) \leq \inf_{y \in E_k} f(y) = m_k = \varphi_P(x)$$

สำหรับทุก $x \in E_k$ ทำให้ได้ว่า $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \varphi_P(x)dx$ ตามต้องการ

โดยใช้หลักการพิสูจน์เดียวกันนี้ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าสมการ (4.5) เป็นจริงเช่นกัน จึงขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

จากสมการ (4.2) สมการ (4.3) และทฤษฎีบท 4.1.12 สรุปได้ว่า

บทแทรก 4.1.13. *เราได้ว่า*

$$R\underline{\int_a^b} f = \sup_{\varphi \in \Phi(f)} \int_a^b \varphi \quad \text{และ} \quad R\overline{\int_a^b} f = \inf_{\psi \in \Psi(f)} \int_a^b \psi$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า f หาปริพันธ์รีมันน์ได้ ก็ต่อเมื่อ

$$\sup_{\varphi \in \Phi(f)} \int_a^b \varphi = \inf_{\psi \in \Psi(f)} \int_a^b \psi$$

เราจบหัวข้อนี้ด้วยทฤษฎีบทที่ให้เงื่อนไขของฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้

ทฤษฎีบท 4.1.14. *ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบน $[a,b]$ จะได้ว่า f หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องเกือบทุกแห่งบน $[a,b]$*

บทพิสูจน์ ให้ $A = \{x \in [a,b] : f \text{ ไม่ต่อเนื่องที่ } x\}$

$(\Rightarrow)$ ให้ f หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[a,b]$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ A_n เป็นเซตของ $x \in [a,b]$ ที่มีสมบัติว่า

$$\text{สำหรับทุก } \delta > 0 \text{ จะมี } y \in [a,b] \cap B(x,\delta) \text{ ที่ } |f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{n}$$

สังเกตว่า $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ดังนั้นถ้าเราสามารถแสดงได้ว่า $m(A_n) = 0$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ เราจะได้ว่า $m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = 0$ ซึ่งจะได้ $m(A) = 0$ ดังนั้น f ต่อเนื่องทุกแห่งบน $[a,b]$

ยกเว้นบนเซตเมเชอร์ศูนย์ A ตามต้องการ

ต่อไปเราจะแสดงว่า $m(A_n) = 0$ ให้ $\varepsilon > 0$ จากบทแทรก 4.1.13 จะได้ว่ามีฟังก์ชันขั้นบันได $\varphi \in \Phi(f)$ และ $\psi \in \Psi(f)$ ที่

$$\int_a^b (\psi - \varphi) < \varepsilon$$

สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $B_n = \{x \in [a,b] : (\psi-\varphi)(x) \geq \frac{1}{n}\}$ เนื่องจาก $(\psi-\varphi)$ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบน $[a,b]$ จึงได้ว่า $(\psi - \varphi) = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{I_j}$ เมื่อ $I_1, I_2, \ldots, I_k$ เป็นช่วงที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกันและ $[a,b] = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ และยังได้ว่า B_n เป็นยูเนียนของช่วง I_j เหล่านี้ที่มี $c_j \geq \frac{1}{n}$

ให้ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x \in [a,b] - B_n \\ \frac{1}{n} & \text{ถ้า } x \in B_n \end{cases}$$

ซึ่งจะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดและ $g(x) \leq (\psi - \varphi)(x)$ บน $[a,b]$ จึงได้ว่า

$$\frac{1}{n} \cdot m(B_n) = \int_a^b g \leq \int_a^b (\psi - \varphi) < \varepsilon$$

ดังนั้น $m(B_n) < n\varepsilon$ ให้ P เป็นเซตของจุดปลายของช่วง $I_1, I_2, \ldots, I_k$ จะได้ว่า P เป็นเซตจำกัด ถ้า $x \in A_n - P$ แล้ว $x \in I_j^o$ สำหรับบาง $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ และจะมี $y \in I_j^o$ ที่ $|f(x) - f(y)| \geq \frac{1}{n}$ เนื่องจาก

$$(\psi - \varphi)(x) \geq |f(x) - f(y)|$$

จึงได้ว่า $(\psi - \varphi)(x) \geq \frac{1}{n}$ บน I_j ดังนั้น $x \in B_n$ และ $A_n \subset (B_n \cup P)$ จึงได้ว่า

$$m(A_n) \leq m(B_n) + m(P) < n\varepsilon$$

เนื่องจาก A_n และ ε เป็นอิสระต่อกัน และ $m(A_n) < n\varepsilon$ เมื่อ ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จึงได้ว่า $m(A_n) = 0$ ตามต้องการ

$(\Leftarrow)$ สมมติให้ $m(A) = 0$ และให้ $\varepsilon > 0$ เราต้องการแสดงว่า มี $\varphi \in \Phi(f)$ และ $\psi \in \Psi(f)$ ที่

ทำให้

$$\int_a^b (\psi - \varphi) < \varepsilon$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต จึงมี $M > 0$ ที่ $|f(x)| \leq M$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ และเนื่องจาก $m(A) = 0$ จึงมีเซตของช่วงเปิด $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ ที่ $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ และ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน $[a,b] - A$ จึงได้ว่า สำหรับแต่ละ $x \in [a,b] - A$ จะมี $\delta_x > 0$ ที่

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

สำหรับทุก $y \in B(x, \delta_x) \cap [a,b]$ ซึ่งทำให้ได้ว่า ถ้า $y, z \in B(x, \delta_x) \cap [a,b]$ แล้ว

$$|f(z) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

สังเกตว่า $\{I_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{B(x, \delta_x) : x \in [a,b] - A\}$ เป็นเซตปกเปิดของ $[a,b]$ ซึ่งเป็นเซตกระชับ ดังนั้นจึงมี $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \subset \mathbb{N}$ และ $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset [a,b] - A$ ที่ทำให้

$$[a,b] \subset \left(\bigcup_{j=1}^{k} I_{n_j}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \delta_{x_j})\right)$$

ให้ $B_1 = [a,b] \cap B(x_1, \delta_{x_1})$ และสำหรับ $j = 2, \ldots, m$ ให้

$$B_j = [a,b] \cap \left(B(x_j, \delta_{x_j}) - \bigcup_{k=1}^{j-1} B_k\right)$$

ซึ่งจะได้ว่าแต่ละ B_j เป็นยูเนียนจำกัดของช่วงที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ $B_j \cap B_k = \emptyset$ สำหรับทุกคู่ $j \neq k$ นอกจากนี้

$$\bigcup_{j=1}^{m} B_j = [a,b] \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \delta_{x_j})\right)$$

ให้ $E = [a,b] - \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ สังเกตว่า E เป็นยูเนียนจำกัดของช่วงปิดที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน

และ $E \subset \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$m(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

สำหรับแต่ละ $x \in [a,b]$ นิยามให้

$$\varphi(x) = \begin{cases} \inf_{y\in B_j} f(y) & \text{เมื่อ } x \in B_j - E \\ -M & \text{เมื่อ } x \in E \end{cases}$$

และ

$$\psi(x) = \begin{cases} \sup_{y\in B_j} f(y) & \text{เมื่อ } x \in B_j - E \\ M & \text{เมื่อ } x \in E \end{cases}$$

สังเกตว่า $\varphi \in \Phi(f)$ และ $\psi \in \Psi(f)$ นอกจากนี้ถ้า $x \in B_j$ สำหรับบาง j แล้ว $x \in B(x_j, \delta_{x_j})$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}(\psi - \varphi)(x) &\leq \sup\{|f(z) - f(y)| : y, z \in B(x_j, \delta_{x_j}) \cap [a,b]\} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\end{aligned}$$

เนื่องจาก E เป็นยูเนียนจำกัดของช่วงปิดที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน จึงได้ว่า $[a,b] - E^o$ เป็นยูเนียนจำกัดของช่วงปิดที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ $\left([a,b] - E^o\right) \cup E = [a,b]$
ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.9 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_a^b (\psi - \varphi) &= \int_E (\psi - \varphi) + \int_{[a,b]-E^o} (\psi - \varphi) \\ &\leq 2M \cdot m(E) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot m([a,b]) \\ &< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon\end{aligned}$$

ดังนั้นโดยบทแทรก 4.1.13 จะได้ว่า f หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[a,b]$ ตามต้องการ $\square$

แบบฝึกหัด 4.1

1. ให้ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต และ $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$ จงแสดงว่า

$$s(P, f) \leq s(P \cup Q, f) \leq S(P \cup Q, f) \leq S(Q, f)$$

   และถ้า $P \subset Q$ แล้ว

$$s(P, f) \leq s(Q, f) \leq S(Q, f) \leq S(P, f)$$

2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.1.4

3. จงพิสูจน์บทแทรก 4.1.5

4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.1.6

5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.1.9

6. ให้ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต จงพิสูจน์ว่า

$$\inf_{\psi \in \Psi(f)} \int_a^b \psi = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \int_a^b \psi_P$$

7. ให้ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต จงพิสูจน์ว่า f หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $P \in \mathcal{P}[a, b]$ ที่

$$S(P, f) - s(P, f) < \varepsilon$$

8. ให้ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต จงพิสูจน์ว่า ถ้า f หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[a, b]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

9. **บทนิยาม** ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ นิยามให้

$$||P|| = \min\{x_k - x_{k-1} : k = 1, 2, \ldots, n\}$$

ให้ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต และให้

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

เมื่อ $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (สังเกตว่า ค่าของ $S(f, P)$ ขึ้นอยู่กับการเลือกของ c_k)
เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์รีมันน์ได้ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง r ที่ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|S(f, P) - r| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $P \in \mathcal{P}[a, b]$ ที่ $||P|| < \delta$ โดยจะกำหนดให้ $R \int_a^b f(x)dx = r$
จงแสดงว่า บทนิยามนี้สมมูลกับบทนิยาม 4.1.3

4.2 ปริพันธ์ของฟังก์ชันเชิงเดียว

ในหัวข้อ 4.1 เราได้นิยามปริพันธ์ของฟังก์ชันขั้นบันไดโดยอาศัยเมเชอร์เลอเบกแทนความยาวของช่วง ในหัวข้อนี้เราจะขยายแนวคิดดังกล่าวไปสู่การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่มีความคล้ายคลึงกับฟังก์ชันขั้นบันได แต่มีความซับซ้อนมากกว่า ซึ่งฟังก์ชันดังกล่าวก็คือ ฟังก์ชันเชิงเดียว นั่นเอง

ในที่นี้เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f มีค่าไม่เป็นศูนย์บนเซตเมเชอร์จำกัด ก็ต่อเมื่อ

$$m(\{x : f(x) \neq 0\}) < \infty$$

และเราให้ $0 \cdot (\pm\infty)$ มีค่าเท่ากับ 0 เสมอ

บทนิยาม 4.2.1. *ให้ φ เป็นฟังก์ชันเชิงเดียวที่มีค่าไม่เป็นศูนย์บนเซตเมเชอร์จำกัด และให้ $\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ เป็นตัวแทนบัญญัติของ φ เรานิยามปริพันธ์ของ φ โดยให้*

$$\int \varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot m(A_k)$$

และเขียนแทนโดยย่อด้วย $\int \varphi$

ตัวอย่างเช่น ให้ $\varphi(x) = 1$ เมื่อ $x \in \mathbb{Q}$ และให้ $\varphi(x) = 0$ เมื่อ x เป็นจำนวนอตรรกยะ

แล้วจะได้ว่า

$$\int \varphi = 1 \cdot m(\mathbb{Q}) + 0 \cdot m(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = 0 + 0 = 0$$

เป็นต้น สังเกตว่า φ ไม่เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์รีมันน์ได้บนช่วงปิดใด ๆ แต่สามารถหาปริพันธ์ได้เมื่อใช้บทนิยาม 4.2.1

ทฤษฎีบท 4.2.2. *ให้ $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$ เป็นผลบวกเชิงเส้นของฟังก์ชันแคแรกเทอริสติกของเซตเมเชอร์จำกัด โดยที่ $E_j \cap E_k = \emptyset$ เมื่อ $j \neq k$ จะได้ว่า φ เป็นฟังก์ชันเชิงเดียว และ*

$$\int \varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot m(E_k)$$

บทพิสูจน์ ให้ $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\} = \varphi[\mathbb{R}]$ ซึ่งเป็นเซตจำกัด และสำหรับแต่ละ $\alpha_j \in B$ ให้ $A_j = \varphi^{-1}[\alpha_j]$ จะได้ว่า A_j เท่ากับยูเนียนของ E_k ที่มี $a_k = \alpha_j$ นั่นคือ

$$A_j = \bigcup_{a_k = \alpha_j} E_k$$

เนื่องจากแต่ละคู่ของ $E_1, \dots, E_n$ ไม่มีส่วนร่วมกัน จึงได้ว่า

$$m(A_j) = \sum_{a_k = \alpha_j} m(E_k) \quad \text{และ} \quad \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{a_k = \alpha_j} a_k \cdot m(E_k)$$

นอกจากนี้ $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \chi_{A_j}$ เป็นตัวแทนบัญญัติของ φ ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันเชิงเดียว และ

$$\begin{aligned} \int \varphi &= \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cdot m(A_j) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{a_k = \alpha_j} a_k \cdot m(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot m(E_k) \end{aligned}$$

ตามต้องการ □

จากทฤษฎีบท 4.2.2 จะได้ว่า ถ้า φ เป็นฟังก์ชันขั้นบันได แล้วปริพันธ์ของ φ ที่ได้จากบทนิยาม 4.1.7 และบทนิยาม 4.2.1 นั้นมีค่าเท่ากัน

ทฤษฎีบท 4.2.3. *ให้ φ และ ψ เป็นฟังก์ชันเชิงเดียวที่มีค่าไม่เป็นศูนย์บนเซตเมเชอร์จำกัด และ*

ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ *จะได้ว่า*

$$\int (a\varphi + b\psi) = a \int \varphi + b \int \psi$$

และถ้า $\varphi(x) \le \psi(x)$ *เกือบทุกแห่ง แล้ว* $\int \varphi \le \int \psi$

บทพิสูจน์ ให้ $\sum_{k=1}^{n_1} a_k \chi_{A_k}$ และ $\sum_{k=1}^{n_2} b_k \chi_{B_k}$ เป็นตัวแทนบัญญัติของ φ และ ψ ตามลำดับ และ $\bigcup_{k=1}^{n_1} A_k = \mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{n_2} B_k$ ให้ $\mathcal{C} = \{A_j \cap B_k : 1 \le j \le n_1 \text{ และ } 1 \le k \le n_2\}$ สังเกตว่า $\mathcal{C}$ เป็นเซตจำกัดที่ประกอบเซตเมเชอร์ได้ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน ให้ $\mathcal{C} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ เราสามารถเขียน φ และ ψ ใหม่ได้เป็น

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k} \quad \text{และ} \quad \psi = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \chi_{E_k}$$

และจะได้ว่า $a\varphi + b\psi = \sum_{k=1}^{n} (a\alpha_k + b\beta_k)\chi_{E_k}$ โดยทฤษฎีบท 4.2.2 ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int (a\varphi + b\psi) &= \sum_{k=1}^{n} (a\alpha_k + b\beta_k) \cdot m(E_k) \\
&= a \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot m(E_k) + b \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot m(E_k) \\
&= a \int \varphi + b \int \psi
\end{aligned}$$

ตามต้องการ

ต่อไปสมมติให้ $\varphi(x) \le \psi(x)$ เกือบทุกแห่ง ให้ $E = \bigcup_{\alpha_k > \beta_k} E_k$ ซึ่งจากสมมติฐานจะได้ว่า $m(E) = 0$ และ

$$\begin{aligned}
\int (\psi - \varphi) &= \sum_{\beta_k \ge \alpha_k} (\beta_k - \alpha_k) \cdot m(E_k) + \sum_{\beta_k < \alpha_k} (\beta_k - \alpha_k) \cdot m(E_k) \\
&= \sum_{\beta_k \ge \alpha_k} (\beta_k - \alpha_k) \cdot m(E_k) \ge 0
\end{aligned}$$

จากการพิสูจน์ส่วนแรกจะได้ว่า

$$\int \psi - \int \varphi = \int (\psi - \varphi) \ge 0$$

นั่นคือ $\int \varphi \le \int \psi$ ตามต้องการ $\square$

ทฤษฎีบท 4.2.3 แสดงให้เห็นว่า เงื่อนไขที่แต่ละคู่ของเซต E_k ต้องไม่มีส่วนร่วมกันในทฤษฎีบท 4.2.2 นั้น ที่จริงแล้วสามารถตัดออกได้ กล่าวคือ ถ้า $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$ เป็นผลบวกเชิงเส้นของฟังก์ชันแคแรกเทอริสติกของเซตเมเชอร์จำกัด แล้ว $\int \varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k m(E_k)$ นอกจากนี้เรายังได้ความจริงต่อไปนี้

บทแทรก 4.2.4. *ให้ φ เป็นฟังก์ชันเชิงดียวที่มีค่าไม่เป็นศูนย์บนเซตเมเชอร์จำกัด E ถ้า $a \leq \varphi(x) \leq b$ สำหรับทุก $x \in E$ แล้ว*

$$a \cdot m(E) \leq \int \varphi \leq b \cdot m(E)$$

สัญลักษณ์ 4.2.5. *ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนเซตเมเชอร์จำกัด E และ $f(x) = 0$ เมื่อ $x \notin E$ เราให้ $\mathcal{L}(f)$ แทนเซตของฟังก์ชันเชิงเดียว φ ที่มีสมบัติว่า $\varphi(x) \leq f(x)$ บน E และ $\varphi(x) = 0$ เมื่อ $x \notin E$ และให้ $\mathcal{U}(f)$ แทนเซตของฟังก์ชันเชิงเดียว ψ ที่มีสมบัติว่า $\psi(x) \geq f(x)$ บน E และ $\psi(x) = 0$ เมื่อ $x \notin E$*

ทฤษฎีบท 4.2.6. *ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนเซตเมเชอร์จำกัด E จะได้ว่า*

$$\inf_{\psi \in \mathcal{U}(f)} \int \psi = \sup_{\varphi \in \mathcal{L}(f)} \int \varphi$$

ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

บทพิสูจน์ ก่อนอื่นสมมติให้ f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ และ M เป็นจำนวนจริงบวกที่ $|f(x)| \leq M$ สำหรับทุก $x \in E$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้

$$E_{n,k} = \left\{ x \in E : (k-1) \cdot \frac{M}{n} < f(x) \leq k \cdot \frac{M}{n} \right\}$$

เมื่อ $-n \leq k \leq n$ ซึ่งจะได้ว่า $E_{n,-n}, \ldots, E_{n,n}$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ $E = \bigcup_{k=-n}^{n} E_{n,k}$ นิยามให้

$$\varphi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} (k-1) \chi_{E_{n,k}} \quad \text{และ} \quad \psi_n = \frac{M}{n} \sum_{k=-n}^{n} k \chi_{E_{n,k}}$$

ซึ่งจะได้ว่า $\varphi_n \in \mathcal{L}(f)$ และ $\psi_n \in \mathcal{U}(f)$ สังเกตว่า $\psi_n(x) - \varphi_n(x) = \frac{M}{n}$ บน E

ดังนั้น

$$\inf_{\psi\in\mathcal{U}(f)}\int\psi \le \int\psi_n = \frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n} k\cdot m(E_{n,k})$$

และ

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{L}(f)}\int\varphi \ge \int\varphi_n = \frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n} (k-1)\cdot m(E_{n,k})$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\inf_{\psi\in\mathcal{U}(f)}\int\psi - \sup_{\varphi\in\mathcal{L}(f)}\int\varphi &\le \int\psi_n - \int\varphi_n \\ &= \frac{M}{n}\sum_{k=-n}^{n} m\cdot(E_{n,k}) \\ &= \frac{M}{n}\cdot m(E)\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\int\varphi \le \int\psi$ สำหรับทุก $\varphi\in\mathcal{L}(f)$ และ $\psi\in\mathcal{U}(f)$ จึงได้ว่า

$$0 \le \inf_{\psi\in\mathcal{U}(f)}\int\psi - \sup_{\varphi\in\mathcal{L}(f)}\int\varphi \le \frac{M}{n}\cdot m(E)$$

ซึ่งเป็นจริงสำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$ ทำให้ได้ว่า

$$\inf_{\psi\in\mathcal{U}(f)}\int\psi - \sup_{\varphi\in\mathcal{L}(f)}\int\varphi = 0$$

ต่อไปสมมติให้ $\inf_{\psi\in\mathcal{U}(f)}\int\psi = \sup_{\varphi\in\mathcal{L}(f)}\int\varphi$ เราจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ จาก $\inf_{\psi\in\mathcal{U}(f)}\int\psi = \sup_{\varphi\in\mathcal{L}(f)}\int\varphi$ จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $n\in\mathbb{N}$ จะมี $\varphi_n\in\mathcal{L}(f)$ และ $\psi_n\in\mathcal{U}(f)$ ที่

$$0 \le \int\psi_n - \int\varphi_n < \frac{1}{n} \tag{4.6}$$

ให้ $\varphi = \sup\varphi_n$ และ $\psi = \inf\psi_n$ จะได้ว่า $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ บน E และโดยทฤษฎีบท 3.4.8 จะได้ว่า φ และ ψ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

สำหรับแต่ละ $k, n \in \mathbb{N}$ ให้

$$A_n = \left\{x : (\psi_n - \varphi_n)(x) \geq \frac{1}{k}\right\}$$

และ

$$B_k = \left\{x : (\psi - \varphi)(x) \geq \frac{1}{k}\right\}$$

จะได้ว่า $B_k \subset A_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และ

$$\int (\psi_n - \varphi_n) \geq \frac{1}{k} \cdot m(A_n)$$

จาก (4.6) เราได้ว่า $\int(\psi_n - \varphi_n) < \frac{1}{n}$ จึงได้ว่า $\frac{1}{k} \cdot m(A_n) < \frac{1}{n}$ ดังนั้น $m(A_n) \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ เนื่องจาก $m(B_k) \leq m(A_n)$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จึงได้ว่า $m(B_k) = 0$

ให้ $A = \{x : \psi(x) > \varphi(x)\}$ จะได้ว่า $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ และ $m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) = 0$ จึงได้ว่า $\varphi(x) = f(x) = \psi(x)$ สำหรับทุก $x \in E - A$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.4.10 เราจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ตามต้องการ $\square$

แบบฝึกหัด 4.2

1. ให้ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต จงใช้ผลของทฤษฎีบท 4.2.6 ในการพิสูจน์ว่า ถ้า f หาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[a, b]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

2. ให้ φ เป็นฟังก์ชันเชิงเดียวที่มีค่าไม่เป็นศูนย์บนเซตเมเชอร์จำกัด

   (i) จงแสดงว่า ถ้า $E \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ แล้ว $\varphi \cdot \chi_E$ เป็นฟังก์ชันเชิงเดียว

   (ii) ถ้า $E \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ นิยามให้ $\int_E \varphi = \int \varphi \cdot \chi_E$ จงแสดงว่า ถ้า $A, B \subset \mathbb{R}$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ และ $m(A \cap B) = 0$ แล้ว

   $$\int_{A \cup B} \varphi = \int_A \varphi + \int_B \varphi$$

   (iii) ให้ $\langle E_n \rangle$ เป็นลำดับของเซตเมเชอร์ได้ซึ่ง $E_k \subset E_{k+1}$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$ และให้ $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ จงแสดงว่า

   $$\int_E \varphi = \lim_{n \to \infty} \int_{E_n} \varphi$$

4.3 ปริพันธ์เลอเบกของฟังก์ชันมีขอบเขต

ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนเซตเมเชอร์จำกัด A และให้ φ และ ψ เป็นฟังก์ชันเชิงเดียวที่ $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ บน A และ $\varphi(x) = 0 = \psi(x)$ เมื่อ $x \in A^c$ ถ้าเราจะนิยามปริพันธ์สำหรับ f บน A ปริพันธ์นั้นควรจะมีสมบัติว่า

$$\int \varphi \leq \int_A f \leq \int \psi$$

จากทฤษฎีบท 4.2.6 เราทราบแล้วว่า f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ ก็ต่อเมื่อ

$$\inf_{\psi \in \mathcal{U}(f)} \int \psi = \sup_{\varphi \in \mathcal{L}(f)} \int \varphi$$

เมื่อ $\mathcal{L}(f)$ และ $\mathcal{U}(f)$ เป็นเซตของฟังก์ชันเชิงเดียวที่นิยามในสัญลักษณ์ 4.2.5 ด้วยเหตุผลดังกล่าว เราจึงนิยามปริพันธ์เลอเบกสำหรับฟังก์ชันเมเชอร์ได้ที่มีขอบเขตดังต่อไปนี้

บทนิยาม 4.3.1. *ให้ f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขตบนเซตเมเชอร์จำกัด A* ***ปริพันธ์เลอเบก*** *(**Lebesgue integral**) ของ f บน A นิยามโดย*

$$\int_A f(x)dx = \inf_{\psi \in \mathcal{U}(f)} \int \psi$$

และเขียนแทนโดยย่อด้วย $\int_A f$ หรือ $\int f$ เมื่อ A เป็นที่ประจักษ์ หรือ $\int_a^b f$ เมื่อ A เป็นช่วงที่มี a และ b เป็นจุดปลายซ้ายและขวาตามลำดับ ถ้า $B \subset A$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ เราให้

$$\int_B f = \int_A f \cdot \chi_B$$

เนื่องจากถ้า f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ แล้ว $\inf_{\psi \in \mathcal{U}(f)} \int \psi = \sup_{\varphi \in \mathcal{L}(f)} \int \varphi$ เราจึงสามารถเลือกใช้

$$\int f = \sup_{\varphi \in \mathcal{L}(f)} \int \varphi$$

ก็ได้ตามแต่ความเหมาะสม

ทฤษฎีบท 4.3.2. *ถ้า f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตและหาปริพันธ์รีมันน์ได้บน $[a, b]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ และ*

$$R\int_a^b f = \int_a^b f$$

บทพิสูจน์ ก่อนอื่นสังเกตว่า $\Phi(f) \subset \mathcal{L}(f)$ และ $\Psi(f) \subset \mathcal{U}(f)$ ดังนั้น

$$\sup_{\varphi\in\Phi(f)} \int \varphi \le \sup_{\varphi\in\mathcal{L}(f)} \int \varphi \le \inf_{\psi\in\mathcal{U}(f)} \int \psi \le \inf_{\psi\in\Psi(f)} \int \psi$$

เนื่องจาก f หาปริพันธ์รีมันน์ได้ จึงได้ว่า $\sup_{\varphi\in\Phi(f)} \int \varphi = \inf_{\psi\in\Psi(f)} \int \psi$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{L}(f)} \int \varphi = \inf_{\psi\in\mathcal{U}(f)} \int \psi$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ และ

$$R\int_a^b f = \int_a^b f$$

ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 4.3.3. *ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขตบนเซตเมเชอร์จำกัด A แล้ว*

1. $\int_A (cf+g) = c\int_A f + \int_A g$ *เมื่อ* $c \in \mathbb{R}$
2. *ถ้า* $B \subset A$ *มีเมเชอร์เป็นศูนย์ แล้ว* $\int_B f = 0$
3. *ถ้า* $B \subset A$ *และ* $C \subset A$ *เป็นเซตเมเชอร์ได้และ* $B \cap C = \emptyset$ *แล้ว*

$$\int_{B\cup C} f = \int_B f + \int_C f$$

4. *ถ้า* $f = g$ *เกือบทุกแห่งบน* A *แล้ว* $\int_A f = \int_A g$
5. *ถ้า* $f \le g$ *เกือบทุกแห่งบน* A *แล้ว* $\int_A f \le \int_A g$
6. $\left|\int_A f\right| \le \int_A |f|$
7. *ถ้า* $a \le f(x) \le b$ *บน* A *แล้ว* $a \cdot m(A) \le \int_A f \le b \cdot m(A)$

บทพิสูจน์ (1) ถ้า $c \ge 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} c\int f &= c\inf_{\psi\in\mathcal{U}(f)} \int \psi = \inf_{\psi\in\mathcal{U}(f)} c\int \psi = \inf_{\psi\in\mathcal{U}(f)} \int c\psi \\ &= \inf_{c\psi\in\mathcal{U}(cf)} \int c\psi = \inf_{\psi\in\mathcal{U}(cf)} \int \psi = \int cf \end{aligned}$$

ถ้า $c < 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int cf &= \int (-c)(-f) = -c\int(-f) = -c\inf_{\psi\in\mathcal{U}(-f)}\int\psi \\ &= -c\inf_{-\psi\in\mathcal{L}(f)}\int\psi = -c\inf_{\varphi\in\mathcal{L}(f)}\int(-\varphi) \\ &= (-c)\left(-\sup_{\varphi\in\mathcal{L}(f)}\int\varphi\right) = c\sup_{\varphi\in\mathcal{L}(f)}\int\varphi \\ &= c\int f\end{aligned}$$

จากทั้งสองกรณีจะได้ว่า $\int cf = c\int f$ สำหรับทุกจำนวนจริง c

ต่อไปจะแสดงว่า $\int(f+g) = \int f + \int g$ ให้ $\psi_1 \in \mathcal{U}(f)$ และ $\psi_2 \in \mathcal{U}(g)$ จะได้ว่า $(\psi_1+\psi_2) \in \mathcal{U}(f+g)$ และ

$$\int(f+g) \le \int(\psi_1+\psi_2) = \int\psi_1 + \int\psi_2$$

ทำให้ได้ว่า

$$\int(f+g) \le \inf_{\psi_1\in\mathcal{U}(f)}\int\psi_1 + \inf_{\psi_2\in\mathcal{U}(g)}\int\psi_2 = \int f + \int g \tag{4.7}$$

ต่อไปให้ $\varphi_1 \in \mathcal{L}(f)$ และ $\varphi_2 \in \mathcal{L}(g)$ จะได้ว่า $(\varphi_1+\varphi_2) \in \mathcal{L}(f+g)$ และ

$$\int\varphi_1 + \int\varphi_2 = \int(\varphi_1+\varphi_2) \le \int(f+g)$$

ทำให้ได้ว่า

$$\int f + \int g = \sup_{\varphi_1\in\mathcal{L}(f)}\int\varphi_1 + \sup_{\varphi_2\in\mathcal{L}(g)}\int\varphi_2 \le \int(f+g) \tag{4.8}$$

จาก (4.7) และ (4.8) สรุปได้ว่า $\int(f+g) = \int f + \int g$ ตามต้องการ และเมื่อสรุปรวมกับส่วนแรกจะได้ว่า (1) เป็นจริง

(2) เนื่องจาก $\int_B f = \int_A f\cdot\chi_B$ และโดยบทแทรก 4.2.4 จะได้ว่า $\int\psi\cdot\chi_B = 0$ สำหรับทุก $\psi\in\mathcal{U}(f)$ จึงได้ว่า $\int f\cdot\chi_B = 0$

(3) ถ้า $B \cap C = \emptyset$ แล้วจะได้ว่า $\chi_{B \cup C} = \chi_B + \chi_C$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_{B \cup C} f = \int_A f \cdot \chi_{B \cup C} &= \int_A f \cdot (\chi_B + \chi_C) \\ &= \int_A f \cdot \chi_B + \int_A f \cdot \chi_C \\ &= \int_B f + \int_C f\end{aligned}$$

(4) ให้ $B = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ และ $C = A - B$ จะได้ว่า $m(B) = 0$ และ $m(C) = m(A)$ จาก (2) และ (3) จะได้ว่า $\int_B f = 0 = \int_B g$ ดังนั้น

$$\int_A f = \int_B f + \int_C f = \int_C f = \int_C g = \int_C g + \int_B g = \int_A g$$

(5) ผลจาก (4) เราสามารถสมมติให้ $f(x) \leq g(x)$ บน A โดยไม่ทำให้ค่าปริพันธ์เปลี่ยนไป ให้ $\varphi \in \mathcal{L}(f)$ จะได้ว่า $\varphi \in \mathcal{L}(g)$ และ $\int_A \varphi \leq \int_A g$ ดังนั้น

$$\int_A f = \sup_{\varphi \in \mathcal{L}(f)} \int_A \varphi \leq \int_a g$$

(6) เนื่องจาก $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ จึงได้ว่า

$$-\int_A |f| = \int_A -|f| \leq \int_A f \leq \int_A |f|$$

นั่นคือ $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$ ตามต้องการ

(7) ถ้า $a \leq f(x) \leq b$ บน A แล้ว $a \cdot \chi_A(x) \leq f(x) \leq b \cdot \chi_A(x)$ บน A ดังนั้นจาก (5) จะได้ว่า

$$a \cdot m(A) = a \int_A \chi_A \leq \int_A f \leq b \int_A \chi_A = b \cdot m(A)$$

ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 4.3.4 (Bounded Convergence Theorem)**.** *ให้ f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนเซตเมเชอร์จำกัด A และ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A ถ้ามี $M > 0$ ที่ $|f_n(x)| \leq M$ บน A สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $f_n \to f$ เกือบทุกแห่งบน A แล้ว*

$$\int_A f = \lim_{n \to \infty} \int_A f_n$$

บทพิสูจน์ ก่อนอื่นสังเกตว่า f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A โดยไม่ทำให้ค่าปริพันธ์เปลี่ยนไป เราสามารถสมมติให้ $f_n \to f$ บน A และ $m(A) > 0$

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยทฤษฎีบท 3.4.20 (Egoroff's Theorem) จะมี $B \subset A$ ที่ $m(B) < \frac{\varepsilon}{4M}$ และ $f_n \to f$ แบบเอกรูปบน $A - B$ นั่นคือ มี $N \in \mathbb{N}$ ที่ถ้า $n \geq N$ แล้ว

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(A)}$$

สำหรับทุก $x \in A - B$ เนื่องจาก $|f(x) - f_n(x)| \leq 2M$ บน B จึงได้ว่า ถ้า $n \geq N$ แล้ว

$$\begin{aligned}\left|\int_A f - \int_A f_n\right| = \left|\int_A (f - f_n)\right| &\leq \int_A |f - f_n| \\ &= \int_{A-B} |f - f_n| + \int_B |f - f_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(A)} \cdot m(A) + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\int_A f = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n$$

ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 4.3

1. ให้ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขต จงแสดงว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีฟังก์ชันต่อเนื่อง g บน $[a, b]$ ที่ $\int_a^b |f - g| < \varepsilon$

2. ให้ f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขตบนเซตเมเชอร์จำกัด A จงพิสูจน์ว่า ถ้า $f(x) > 0$ สำหรับทุก $x \in A$ และ $m(A) > 0$ แล้ว $\int_A f > 0$

3. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขตบนเซตเมเชอร์จำกัด A จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\int_A |f - g| = 0$ แล้ว $f = g$ เกือบทุกแห่งบน A

4. ให้ f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขตบนเซตเมเชอร์จำกัด A จงพิสูจน์ว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ $\int_B |f| < \varepsilon$ สำหรับทุก $B \subset A$ ที่ $m(B) < \delta$

4.4 ปริพันธ์เลอเบกของฟังก์ชันที่มีค่าไม่เป็นลบ

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาปริพันธ์สำหรับฟังก์ชัน f บนโดเมน A ซึ่งในที่นี้ f ไม่จำเป็นต้องมีขอบเขตและ A ไม่จำเป็นต้องมีเมเชอร์จำกัด แต่ f ต้องมีค่าไม่เป็นลบบน A

สัญลักษณ์ 4.4.1. *สำหรับฟังก์ชันเมเชอร์ได้ $f : A \to [0, \infty]$ ให้ $\mathcal{B}(f)$ แทนเซตของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ h ที่มีสมบัติต่อไปนี้*

1. *h เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต*
2. *$0 \leq h(x) \leq f(x)$ บน A*
3. *$m(\{x \in A : h(x) > 0\}) < \infty$*

บทนิยาม 4.4.2. *ให้ $f : A \to [0, \infty]$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ นิยาม**ปริพันธ์เลอเบก** (**Lebesgue integral**) หรือกล่าวโดยย่อว่า **ปริพันธ์** (**integral**) ของ f บน A โดยให้*

$$\int_A f = \sup_{h \in \mathcal{B}(f)} \int_A h$$

*และเราจะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันหาปริพันธ์เลอเบกได้** (**Lebesgue integrable function**) บน A หรือกล่าวโดยย่อว่า **ฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้** (**integrable function**) บน A ถ้า*

$$\int_A f < \infty$$

ทฤษฎีบท 4.4.3. *ให้ $f : A \to [0, \infty]$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ จะได้ว่า*

$$\int_A f = \sup_n \int_{A \cap [-n,n]} (f \wedge n) = \lim_{n \to \infty} \int_A (f \wedge n) \cdot \chi_{[-n,n]}$$

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดว่า $\{(f \wedge n) \cdot \chi_{A \cap [-n,n]} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}(f)$ จึงได้ว่า

$$S \leq \sup_{h \in \mathcal{B}(f)} \int_A h$$

เมื่อ $S = \sup\limits_n \displaystyle\int_{A \cap [-n,n]} (f \wedge n)$

สมมติว่า $S < \sup\limits_{h \in \mathcal{B}(f)} \displaystyle\int_A h$ และให้ $0 < \varepsilon < \sup\limits_{h \in \mathcal{B}(f)} \displaystyle\int_A h - S$

จะได้ว่า มี $h \in \mathcal{B}(f)$ ที่

$$\int_A h > S + \varepsilon$$

ให้ $B = \{x \in A : h(x) > 0\}$ ซึ่งจะได้ว่า $m(B) < \infty$ ให้ N และ M เป็นจำนวนนับที่ทำให้ $|h(x)| \leq N$ บน B และ $m(B - [-M, M]) < \frac{\varepsilon}{N}$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_A h = \int_B h = \int_{B-[-M,M]} h + \int_{B\cap[-M,M]} h \\
&< N \cdot \frac{\varepsilon}{N} + \int_{B\cap[-M,M]} (f \wedge N) \\
&\leq \varepsilon + \int_{A\cap[-k,k]} (f \wedge k) \\
&\leq \varepsilon + S
\end{aligned}$$

เมื่อ $k = \max\{M, N\}$ ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไขของ h ที่ว่า $\int_A h > S + \varepsilon$
ดังนั้น $S = \sup_{h\in\mathcal{B}(f)} \int_A h$ และ $\int_A f = \sup_n \int_{A\cap[-n,n]}(f \wedge n)$ ตามต้องการ

เนื่องจาก $\langle \int_{A\cap[-n,n]}(f \wedge n)\rangle$ เป็นลำดับเพิ่ม จึงได้ว่า

$$\sup_n \int_{A\cap[-n,n]} (f \wedge n) = \lim_{n\to\infty} \int_{A\cap[-n,n]} (f \wedge n)$$

และเนื่องจาก $\int_{A\cap[-n,n]}(f \wedge n) = \int_A (f \wedge n) \cdot \chi_{[-n,n]}$ จึงได้ว่า

$$\sup_n \int_{A\cap[-n,n]} (f \wedge n) = \lim_{n\to\infty} \int_A (f \wedge n) \cdot \chi_{[-n,n]}$$

ตามต้องการ $\square$

ทฤษฎีบท 4.4.4. *ให้ $f : A \to [0, \infty]$ และ $g : A \to [0, \infty]$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ และ $c \geq 0$ จะได้ว่า*

1. $\int_A cf = c \int_A f$

2. $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$

3. *ถ้า $f(x) \leq g(x)$ เกือบทุกแห่งบน A แล้ว $\int_A f \leq \int_A g$ และถ้า g หาปริพันธ์ได้บน A*

แล้ว f หาปริพันธ์ได้บน A และ

$$\int_A (g-f) = \int_A g - \int_A f$$

บทพิสูจน์ (1) เนื่องจาก $\mathcal{B}(cf) = \{ch : h \in \mathcal{B}(f)\}$ จึงได้ว่า

$$\int cf = \sup_{H\in\mathcal{B}(cf)} \int H = \sup_{h\in\mathcal{B}(f)} \int ch = c \sup_{h\in\mathcal{B}(f)} \int h = c\int f$$

(2) ก่อนอื่นสังเกตว่า ถ้า $h_1 \in \mathcal{B}(f)$ และ $h_2 \in \mathcal{B}(g)$ แล้ว $h_1 + h_2 \in \mathcal{B}(f+g)$ จึงได้ว่า

$$\int h_1 + \int h_2 = \int (h_1+h_2) \le \sup_{h\in\mathcal{B}(f+g)} \int h = \int (f+g)$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int f + \int g \le \int (f+g) \tag{4.9}$$

สำหรับแต่ละ $h \in \mathcal{B}(f+g)$ ให้ $h_1 = f \wedge h$ และให้ $h_2 = h - h_1$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $h_1 \in \mathcal{B}(f)$ นอกจากนั้นสังเกตว่า สำหรับแต่ละ $x \in A$

ถ้า $h(x) \le f(x)$ แล้ว $h_1(x) = h(x)$ และ $h_2(x) = 0 \le g(x)$

ถ้า $h(x) > f(x)$ แล้ว $h_1(x) = f(x)$ และ

$$h_2(x) = h(x) - h_1(x) \le (f+g)(x) - f(x) = g(x)$$

จากทั้งสองกรณีจะได้ว่า $h_2(x) \le g(x)$ สำหรับทุก $x \in A$ นั่นคือ $h_2 \in \mathcal{B}(g)$ ทำให้ได้ว่า

$$\int h = \int h_1 + \int h_2 \le \int f + \int g$$

ดังนั้น

$$\int (f+g) = \sup_{h\in\mathcal{B}(f+g)} \int h \le \int f + \int g \tag{4.10}$$

จาก (4.9) และ (4.10) จะได้ว่า (2) เป็นจริง

(3) โดยไม่ทำให้ค่าปริพันธ์เปลี่ยนไป เราสามารถสมมติให้ $f(x) \leq g(x)$ บน A สังเกตว่า $\mathcal{B}(f) \subset \mathcal{B}(g)$ ดังนั้น

$$\int f = \sup_{h \in \mathcal{B}(f)} \int h \leq \sup_{h \in \mathcal{B}(g)} \int h = \int g \tag{4.11}$$

ต่อไปสมมติว่า g หาปริพันธ์ได้บน A นั่นคือ $\int_A g < \infty$ จาก (4.11) จะได้ว่า $\int_A f < \infty$ ทำให้ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน A

เนื่องจาก $0 \leq (g-f)(x) \leq g(x)$ บน A และจากข้อ (2) จะได้ว่า

$$\int g = \int [(g-f)+f] = \int (g-f) + \int f$$

นั่นคือ $\int_A (g-f) = \int_A g - \int_A f$ ตามต้องการ □

บทแทรก 4.4.5. *ให้ $f : A \to [0, \infty]$ และ $g : A \to [0, \infty]$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ และ $c \geq 0$ จะได้ว่า ถ้า f และ g หาปริพันธ์ได้บน A แล้ว cf และ $f + g$ หาปริพันธ์ได้บน A*

ทฤษฎีบท 4.4.6 (Fatou's Lemma)**.** *ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้และมีค่าไม่เป็นลบบน A จะได้ว่า*

$$\int_A \liminf f_n \leq \liminf \int_A f_n$$

บทพิสูจน์ ให้ $f = \liminf f_n$ และ $h \in \mathcal{B}(f)$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $h_n = h \wedge f_n$ ซึ่งจะได้ว่า $h_n \in \mathcal{B}(f_n)$ และ $h_n \to h$ โดยทฤษฎีบท 4.3.4 จะได้ว่า

$$\int h = \lim_{n \to \infty} \int h_n \tag{4.12}$$

เนื่องจาก $h_n(x) \leq f_n(x)$ บน A จึงได้ว่า $\int h_n \leq \int f_n$ สำหรับแต่ละ n ดังนั้น

$$\liminf \int h_n \leq \liminf \int f_n$$

เมื่อผนวกรวมกับ (4.12) จะได้ว่า

$$\int h \leq \liminf \int f_n$$

ดังนั้น

$$\int f = \sup_{h \in \mathcal{B}(f)} \int h \leq \liminf \int f_n$$

ตามต้องการ □

ตัวอย่างของลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ที่ทำให้อสมการในทฤษฎีบท 4.4.6 เป็น*อสมการแท้* เช่น ให้ $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน $\mathbb{R}$ และ $f_n(x) \to 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ เมื่อ $n \to \infty$ เราจะได้ว่า

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf f_n = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$$

แต่

$$\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_n^{\infty} 1 = \infty$$

ดังนั้น $\int_{\mathbb{R}} \liminf f_n \neq \liminf \int_{\mathbb{R}} f_n$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 4.4.7 (The Monotone Convergence Theorem). *ถ้า $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับเพิ่มของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ที่มีค่าไม่เป็นลบบน A แล้ว*

$$\int_A \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n$$

บทพิสูจน์ ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับเพิ่มของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ที่มีค่าไม่เป็นลบบน A จะได้ว่า $\langle f_n(x) \rangle$ เป็นลำดับเพิ่มสำหรับแต่ละ $x \in A$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in [0,\infty]$

ให้ $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ เนื่องจาก $f_n(x) \leq f(x)$ บน A จึงได้ว่า $\int f_n \leq \int f$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ทำให้ได้ว่า

$$\limsup \int f_n \leq \int f$$

จากทฤษฎีบท 4.4.6 จะได้ว่า $\int f \leq \liminf \int f_n$ ดังนั้น

$$\limsup \int f_n \leq \int f \leq \liminf \int f_n$$

เนื่องจาก $\liminf \int f_n \leq \limsup \int f_n$ จึงได้ว่า $\lim \int f_n$ หาค่าได้ใน $\overline{\mathbb{R}}$ และ $\int f = \lim \int f_n$ ตามต้องการ □

จากทฤษฎีบท 4.4.3 และทฤษฎีบท 4.4.7 เราจะได้ความจริงต่อไปนี้

บทแทรก 4.4.8. *ถ้า* $f : A \to [0, \infty]$ *เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ แล้ว*

$$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_{A\cap[-n,n]} (f \wedge n)$$

บทแทรก 4.4.9. *ถ้า* $\langle f_n \rangle$ *เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ที่มีค่าไม่เป็นลบบน* A *แล้ว*

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n$$

บทพิสูจน์ ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ที่มีค่าไม่เป็นลบบน A สำหรับแต่ละ $N \in \mathbb{N}$ ให้ $S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ จะได้ว่า $\langle S_N \rangle$ เป็นลำดับเพิ่มของฟังก์ชันเมเชอร์ได้
โดยทฤษฎีบท 4.4.7 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n &= \int \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \int S_N \\ &= \lim_{N\to\infty} \int \sum_{n=1}^{N} f_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int f_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\end{aligned}$$

ตามต้องการ □

บทแทรก 4.4.10. *ให้* $f : A \to [0, \infty]$ *เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ ถ้า* $\langle A_n \rangle$ *เป็นลำดับของเซตเมเชอร์ได้ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกันและ* $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *แล้ว*

$$\int_A f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f$$

บทพิสูจน์ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $f_n = f \cdot \chi_{A_n}$ แล้วจะได้ว่า $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ และ $\int_{A_n} f = \int_A f_n$ โดยบทแทรก 4.4.9 จะได้ว่า

$$\int_A f = \int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f$$

ตามต้องการ □

บทแทรก 4.4.11. *ให้ $f : A \to [0, \infty]$ เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่*

$$\int_B f < \varepsilon$$

สำหรับทุก $B \subset A$ ที่ $m(B) < \delta$

บทพิสูจน์ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $f_n = f \wedge n$ ซึ่งจะได้ว่า $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับเพิ่มของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ที่มีค่าไม่เป็นลบบน A โดยทฤษฎีบท 4.4.7 จะได้ว่า

$$\int_A f = \lim \int_A f_n$$

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่

$$\left| \int_A f - \int_A f_N \right| = \left| \int_A (f - f_N) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

สังเกตว่า $\int_A (f - f_N) = \left| \int_A (f - f_N) \right|$ และ $\int_E (f - f_N) \leq \left| \int_A (f - f_N) \right|$ สำหรับทุก $E \subset A$ ที่เป็นเซตเมเชอร์ได้

เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{2N}$ และให้ $B \subset A$ ที่มี $m(B) < \delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\int_B f = \int_B (f - f_N) + \int_B f_N \leq \frac{\varepsilon}{2} + N \cdot m(B) < \varepsilon$$

ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 4.4

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ที่มีค่าไม่เป็นลบและ $\int f = 0$ จงแสดงว่า $f = 0$ เกือบทุกแห่ง

2. ให้ f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน $[a, b]$ และมีค่าไม่เป็นลบ ให้ $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

   $$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

   จงพิสูจน์ว่า F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$

3. ให้ f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน $\mathbb{R}$ และ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้และมีค่า

ไม่เป็นลบบน $\mathbb{R}$ โดย $f_n \to f$ เกือบทุกแห่งบน $\mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\int f_n \to \int f$ แล้ว

$$\int_A f_n \to \int_A f$$

สำหรับทุกเซตเมเชอร์ได้ A

4.5 ปริพันธ์เลอเบกของฟังก์ชันทั่วไป

ตอนนี้เรามีเครื่องมือเพียงพอแล้วที่จะนิยามปริพันธ์เลอเบกสำหรับฟังก์ชันทั่วไป โดยจะใช้แนวคิดที่ว่า ทุกฟังก์ชันสามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลต่างของฟังก์ชันที่มีค่าไม่เป็นลบได้ ดังต่อไปนี้

สำหรับฟังก์ชัน $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ให้ f^+ และ f^- เป็นฟังก์ชันบน A ที่นิยามโดย

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ถ้า } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{ถ้า } f(x) < 0 \end{cases}$$

และ

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{ถ้า } f(x) < 0 \\ 0 & \text{ถ้า } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

ซึ่งจะได้ว่า $f = f^+ - f^-$ และ $|f| = f^+ + f^-$ และถ้า f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ แล้วทั้ง f^+ และ f^- จะเป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้

บทนิยาม 4.5.1. *ให้ $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ เรากล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันหาปริพันธ์เลอเบกได้** (**Lebesgue integrable function**) หรือเรียกโดยย่อว่า **ฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้** (**integrable function**) บน A ถ้า f^+ และ f^- หาปริพันธ์ได้บน A และกำหนดให้*

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-$$

และเขียนแทนโดยย่อด้วย $\int f$ เมื่อ A เป็นที่ประจักษ์ ถ้า $B \subset A$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ แล้วเราให้

$$\int_B f = \int_A f \cdot \chi_B$$

จากบทนิยามเราจะแสดงได้ไม่ยากว่าทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นจริง

ทฤษฎีบท 4.5.2. *ให้ $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ จะได้ว่า*

1. *f หาปริพันธ์ได้ ก็ต่อเมื่อ $|f|$ หาปริพันธ์ได้*

2. *ถ้า f หาปริพันธ์ได้บน A แล้ว $|f(x)| < \infty$ เกือบทุกแห่งบน A*

3. *ถ้า $B \subset A$ และ $m(B) = 0$ แล้ว $\int_B f = 0$*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 4.5.3. *ให้ f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน A ถ้า $B, C \subset A$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ที่ไม่มีส่วนร่วมกัน แล้ว*

$$\int_{B\cup C} f = \int_B f + \int_C f$$

บทพิสูจน์ ก่อนอื่นสังเกตว่า $(f \cdot \chi_E)^+ = f^+ \cdot \chi_E$ และ $(f \cdot \chi_E)^- = f^- \cdot \chi_E$ สำหรับทุก $E \subset A$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_A f \cdot \chi_{B\cup C} &= \int f^+ \cdot \chi_{B\cup C} - \int f^- \cdot \chi_{B\cup C} \\
&= \int f^+ \cdot (\chi_B + \chi_C) - \int f^- \cdot (\chi_B + \chi_C) \\
&= \left[\int f^+ \cdot \chi_B + \int f^+ \cdot \chi_C\right] - \left[\int f^- \cdot \chi_B + \int f^- \cdot \chi_C\right] \\
&= \left[\int f^+ \cdot \chi_B - \int f^- \cdot \chi_B\right] + \left[\int f^+ \cdot \chi_C - \int f^- \cdot \chi_C\right] \\
&= \int_B f + \int_C f
\end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่าทฤษฎีบทเป็นจริง □

ถ้า g และ h เป็นฟังก์ชันที่มีค่าไม่เป็นลบและหาปริพันธ์ได้บน A แล้ว g และ h มีค่าเป็นจำนวนจริงเกือบทุกแห่งบน A ดังนั้นฟังก์ชัน $g-h$ จะหาค่าได้เกือบทุกแห่งบน A ยกเว้นบนเซต $B = \{x \in A : g(x) = \infty$ หรือ $h(x) = \infty\}$ ซึ่งมี $m(B) = 0$ โดยทฤษฎีบท 4.5.3 จะได้ว่าไม่ว่าจะกำหนดให้ $(g-h)(x)$ เมื่อ $x \in B$ มีค่าเป็นเท่าใดก็ตามก็ไม่ทำให้ค่าปริพันธ์ของ $g-h$ เปลี่ยนไป ดังนั้นในการหาปริพันธ์ของ $g-h$ นั้น เราจึงสามารถสมมติให้ $g-h$ จะหาค่าได้ทุกแห่งบน A โดยไม่ต้องสนใจว่าจะนิยามให้ $g-h$ มีค่าเป็นอะไรบน B

ทฤษฎีบท 4.5.4. *ให้ g และ h เป็นฟังก์ชันที่มีค่าไม่เป็นลบและหาปริพันธ์ได้บน A ถ้า $f(x) = (g-h)(x)$ เกือบทุกแห่งบน A แล้ว f หาปริพันธ์ได้บน A และ*

$$\int_A f = \int_A g - \int_A h$$

บทพิสูจน์ ให้ $B = \{x \in A : g(x) = \infty$ หรือ $h(x) = \infty\}$ เนื่องจาก g และ h เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้ จึงได้ว่า $m(B) = 0$ และ $\int_B f = 0$ โดยไม่ทำให้ค่าปริพันธ์เปลี่ยนไป เราสามารถสมมติให้ $f(x) = (g-h)(x)$ บน A สังเกตว่า

$$f^+ = g - (g \wedge h) \quad \text{และ} \quad f^- = h - (g \wedge h)$$

ซึ่งจะได้ว่า f^+ และ f^- หาปริพันธ์ได้บน A เพราะว่า $g - (g \wedge h)$ และ $h - (g \wedge h)$ หาปริพันธ์ได้บน A เนื่องจาก $f^+ - f^- = f = g - h$ บน A จึงได้ว่า $f^+ + h = f^- + g$ บน A โดยทฤษฎีบท 4.4.4 จะได้ว่า

$$\int_A f^+ + \int_A h = \int_A f^- + \int_A g$$

ดังนั้น

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^- = \int_A g - \int_A h$$

ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 4.5.5. *ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน A จะได้ว่า*

1. *cf หาปริพันธ์ได้บน A สำหรับทุก $c \in \mathbb{R}$ และ $\int cf = c\int f$*

2. *$\int (f+g) = \int f + \int g$*

3. *ถ้า $f(x) \le g(x)$ เกือบทุกแห่งบน A แล้ว $\int f \le \int g$*

4. *$\left|\int f\right| \le \int |f|$*

5. *สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $\left|\int_B f\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก $B \subset A$ ที่ $m(B) < \delta$*

บทพิสูจน์ (1) ถ้า $c \geq 0$ จะได้ว่า $(cf)^+ = c(f^+)$ และ $(cf)^- = c(f^-)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int cf &= \int (cf)^+ - \int (cf)^- \\ &= c\int f^+ - c\int f^- \\ &= c\left(\int f^+ - \int f^-\right) = c\int f\end{aligned}$$

และถ้า $c < 0$ จะได้ว่า $(cf)^+ = |c|(f^-)$ และ $(cf)^- = |c|(f^+)$ การพิสูจน์ที่เหลือสามารถทำได้เช่นเดียวกับกรณีแรก จึงขอละรายละเอียดไว้

(2) เนื่องจาก

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

และ $f^+ + g^+$ และ $f^- + g^-$ หาปริพันธ์ได้ โดยทฤษฎีบท 4.5.4 จึงได้ว่า $f + g$ หาปริพันธ์ได้บน A และ

$$\begin{aligned}\int (f+g) &= \int (f^+ + g^+) - \int (f^- + g^-) \\ &= \int f^+ + \int g^+ - \int f^- - \int g^- \\ &= \int f + \int g\end{aligned}$$

(3) โดยไม่ทำให้ค่าปริพันธ์เปลี่ยนไป เราสามารถสมมติให้ $f(x) \leq g(x)$ บน A แล้วจะได้ว่า $g - f$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าไม่เป็นลบและหาปริพันธ์ได้บน A ดังนั้น $\int (g - f) \geq 0$ และจาก (2) จะได้ว่า

$$\int g = \int [(g-f) + f] = \int (g-f) + \int f$$

เนื่องจาก $\int (g - f) \geq 0$ จึงสรุปได้ว่า $\int g \geq \int f$ ตามต้องการ

(4) เนื่องจาก $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ สำหรับทุก $x \in A$ จาก (1) และ (3) จะได้ว่า

$$-\int |f| \leq \int f \leq \int |f|$$

ดังนั้น $\left|\int f\right| \leq \int |f|$ ตามต้องการ

(5) เนื่องจาก $|f|$ หาปริพันธ์ได้บน A โดยบทแทรก 4.4.11 จะได้ว่า สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$\int_B |f| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $B \subset A$ ที่ $m(B) < \delta$ ดังนั้น จาก (4) จะได้ว่า

$$\left|\int_B f\right| \leq \int_B |f| < \varepsilon$$

ตามต้องการ $\square$

ทฤษฎีบท 4.5.6. *ให้ g เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน A ถ้า f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้ และ $|f(x)| \leq g(x)$ เกือบทุกแห่งบน A แล้ว f หาปริพันธ์ได้บน A*

บทพิสูจน์ โดยไม่ทำให้ค่าปริพันธ์เปลี่ยนไป เราสมมติให้ $|f(x)| \leq g(x)$ บน A โดยทฤษฎีบท 4.5.4 จะได้ว่า $|f|$ หาปริพันธ์ได้บน A และโดยทฤษฎีบท 4.5.5 ข้อ 4 จะได้ว่า f หาปริพันธ์ได้บน A $\square$

ทฤษฎีบท 4.5.7 (General Fatou Lemma)**.** *ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A และ g เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน A โดยที่ $|f_n(x)| \leq g(x)$ เกือบทุกแห่งบน A จะได้ว่า*

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n \leq \limsup \int f_n \leq \int \limsup f_n$$

บทพิสูจน์ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $A_n = \{x \in A : |f_n(x)| > g(x)\}$ จะได้ว่า $m(A_n) = 0$ และเซต $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ มีเมเชอร์เป็นศูนย์ ทำให้ได้ว่า $|\liminf f_n| \leq g$ และ $|\limsup f_n| \leq g$ เกือบทุกแห่งบน A ดังนั้น $\liminf f_n$ และ $\limsup f_n$ หาปริพันธ์ได้บน A

โดยไม่ทำให้ค่าปริพันธ์เปลี่ยนไป เราสามารถสมมติให้ $|f_n(x)| \leq g(x)$ บน A สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ โดยทฤษฎีบท 4.5.6 จะได้ว่า f_n หาปริพันธ์ได้บน A สังเกตว่า $(g + f_n)(x) \geq 0$ บน A โดยทฤษฎีบท 4.4.6 (Fatou's lemma) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \liminf(g + f_n) &\leq \liminf \int (g + f_n)\\ &= \liminf \left(\int g + \int f_n\right)\\ &= \int g + \liminf \int f_n \qquad (4.13)\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\int \liminf(g+f_n) = \int (g+\liminf f_n) = \int g + \int \liminf f_n$$

และจาก (4.13) จึงสรุปได้ว่า

$$\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$$

สำหรับอสมการที่สองเป็นผลโดยตรงจากบทนิยามของ $\liminf$ และ $\limsup$

ต่อไปพิจารณาฟังก์ชัน $h_n = -f_n$ ซึ่งจะได้ว่า $\langle h_n \rangle$ เป็นลำดับที่มีสมบัติสอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทนี้ จากผลของการพิสูจน์ข้างต้นจะได้ว่า

$$\int \liminf h_n \leq \liminf \int h_n \tag{4.14}$$

เนื่องจาก

$$\int \liminf h_n = \int \liminf -f_n = -\int \limsup f_n$$

และ

$$\liminf \int h_n = \liminf -\int f_n = -\limsup \int f_n$$

เมื่อแทนลงในอสมการ (4.14) จะได้

$$-\int \limsup f_n \leq -\limsup \int f_n$$

ซึ่งแสดงว่า อสมการสุดท้ายเป็นจริง □

จากทฤษฎีบท 4.5.7 ถ้า $\lim f_n$ หาค่าได้เกือบทุกแห่งบน A แล้วเราจะได้ว่าอสมการในทฤษฎีบทจะเป็นสมการ และจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.5.8 (Lebesgue Convergence Theorem)**.** *ให้ g เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน A และ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A ถ้า $|f_n(x)| \leq g(x)$ เกือบทุกแห่งบน A และ $\lim f_n(x)$ หาค่าได้เกือบทุกแห่งบน A แล้ว*

$$\int \lim f_n = \lim \int f_n$$

บทแทรก 4.5.9. *ให้ f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน A ถ้า $\langle A_n \rangle$ เป็นลำดับของเซตเมเชอร์ได้ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกันและ $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ แล้ว*

$$\int_A f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f$$

บทพิสูจน์ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $f_n = f \cdot \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}$ ซึ่งจะได้ว่า $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ บน A และ $f = \lim f_n$ โดยทฤษฎีบท 4.5.8 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_A f &= \lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \lim_{n\to\infty} \int_A \sum_{k=1}^{n} f \cdot \chi_{A_k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_A f \cdot \chi_{A_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f \end{aligned}$$

ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 4.5

1. ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน A และ g เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน A จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|f_n| \leq g$ เกือบทุกแห่งบน A และ $\lim f_n$ หาค่าได้เกือบทุกแห่งบน A แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| = 0$$

2. ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน A และ f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน A โดยที่ $f_n \to f$ เกือบทุกแห่งบน A จงพิสูจน์ว่า

$$\lim \int |f_n - f| = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim \int |f_n| = \int |f|$$

3. ให้ f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน A และ $\varepsilon > 0$ จงพิสูจน์ว่า

    (i) มีฟังก์ชันเชิงเดียว φ ที่

    $$\int_A |f - \varphi| < \varepsilon$$

    (ii) มีฟังก์ชันขั้นบันได ϕ ที่

    $$\int_A |f - \phi| < \varepsilon$$

(iii) มีฟังก์ชันต่อเนื่อง g ที่มีค่าเป็นศูนย์นอกช่วงจำกัด และ

$$\int_A |f - g| < \varepsilon$$

4. จงแสดงว่า

(i) ถ้า f เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบน $\mathbb{R}$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(nx)dx = 0 \tag{4.15}$$

(ii) สมการ (4.15) ยังคงเป็นจริงเมื่อแทนฟังก์ชันขั้นบันได f ด้วยฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน $\mathbb{R}$

5. จงยกตัวอย่างลำดับของฟังก์ชัน $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ ที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ และ $\lim f_n$ หาค่าได้บน $[a, b]$ ที่ทำให้

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

แต่

$$\lim_{n\to\infty} R\int_a^b f_n \neq R\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

บทที่ 5

การหาอนุพันธ์ของปริพันธ์

อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่จะศึกษาในบทนี้ มีบทนิยามเหมือนกันกับบทนิยามที่พบเห็นทั่วไปในวิชาแคลคูลัส นั่นคือ ถ้า $f : A \to \mathbb{R}$ และ c เป็นจุดภายในของ A แล้วเราจะกล่าวว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ c ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \text{ หาค่าได้}$$

และเรียกค่าของลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ของ f ที่ c ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $f'(c)$ ดังนั้นในที่นี้เราจะไม่กล่าวถึงสมบัติพื้นฐานต่าง ๆ ของอนุพันธ์อีก แต่มีสมบัติหนึ่งที่เราจะต้องศึกษาใหม่ นั่นคือ สมบัติที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (fundamental theorems of calculus) เพราะในการศึกษาวิชาแคลคูลัสและวิชาคณิตวิเคราะห์นั้น ปริพันธ์ที่ศึกษาในวิชาเหล่านั้น คือ ปริพันธ์รีมันน์ แต่ในที่นี้เราได้มีการนิยามปริพันธ์เลอเบก ซึ่งเกิดจากการขยายแนวคิดของปริพันธ์รีมันน์ให้สามารถหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนมากขึ้นได้ คำถามที่เกิดขึ้นก็คือ ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสยังคงเป็นจริงหรือไม่เมื่อเราแทนปริพันธ์รีมันน์ด้วยปริพันธ์เลอเบก หรือกล่าวคือ ถ้าฟังก์ชันอนุพันธ์ f' ของ f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์เลอเบกได้ แล้ว

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

หรือไม่ และถ้า f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์เลอเบกได้ แล้วฟังก์ชัน $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ หาอนุพันธ์ได้หรือไม่ และถ้าหาได้ แล้ว

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

หรือไม่ ในบทนี้เราจะมาหาคำตอบของคำถามเหล่านี้ โดยฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้ที่จะกล่าวถึงในบทนี้ จะหมายถึงฟังก์ชันหาปริพันธ์เลอเบกได้เท่านั้น

5.1 ทฤษฎีบทการปกคลุมวิตาลี

ในการศึกษาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในหัวข้อถัดไปนั้น เราต้องใช้ความจริงเกี่ยวกับการปกคลุมเซตย่อยของจำนวนจริงในรูปแบบพิเศษ ดังจะกล่าวถึงต่อไปนี้

บทนิยาม 5.1.1. *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ และ $\mathcal{C}$ เป็นเซตของช่วงที่ไม่ใช่เซตโทน เราจะกล่าวว่า $\mathcal{C}$ **ปกคลุม** A **แบบวีตาลี** (**Vitali covering**) ถ้าสำหรับแต่ละ $x \in A$ และแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $I \in \mathcal{C}$ ที่ $x \in I$ และ $\ell(I) < \varepsilon$*

ทฤษฎีบท 5.1.2. *ให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตของช่วงที่ไม่ใช่เซตโทน โดยที่ $m\left(\bigcup_{I\in\mathcal{C}} I\right) < \infty$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $I_1, I_2, \ldots, I_n \in \mathcal{C}$ ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ*

$$(2+\varepsilon)\cdot\sum_{k=1}^{n} m(I_k) \geq m\left(\bigcup_{I\in\mathcal{C}} I\right)$$

บทพิสูจน์ โดยบทแทรก 2.3.29 เราสามารถสมมติให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตอนันต์นับได้ นั่นคือ $\mathcal{C} = \{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ เมื่อ I_n เป็นช่วงที่ไม่ใช่เซตโทน ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = \lim_{N\to\infty} m\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \infty$$

จึงมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot m\left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) \geq m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right) = m\left(\bigcup_{I\in\mathcal{C}} I\right)$$

พิจารณาแต่ละ j จาก 1 ถึง N ถ้า

$$I_j \subset \left(\bigcup_{n=1}^{j-1} I_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=j+1}^{N} I_n\right)$$

ให้ตัดช่วง I_j ออกจาก $\{I_1, I_2, \ldots, I_N\}$ ไม่เช่นนั้นเก็บ I_j ไว้ แล้วพิจารณา I_{j+1} ในทำนองเดียวกัน นั่นคือ ถ้า $I_1 \subset \bigcup_{n=2}^{N} I_n$ ให้ตัด I_1 ออกจาก $\{I_1, I_2, \ldots, I_N\}$ และพิจารณาต่อไปว่า

$I_2 \subset \bigcup_{n=3}^N I_n$ หรือไม่ ถ้าใช่ให้ตัด I_2 ออกจาก $\{I_2, I_3, \ldots, I_N\}$ แต่ถ้า $I_2 \not\subset \bigcup_{n=3}^N I_n$ ให้เก็บ I_2 ไว้ ส่วนในกรณีที่ $I_1 \not\subset \bigcup_{n=2}^N I_n$ ให้เก็บ I_1 ไว้ แล้วพิจารณาต่อไปว่า $I_2 \subset I_1 \cup \left[\bigcup_{n=3}^N I_n\right]$ หรือไม่ ถ้าใช่ให้ตัด I_2 ออกจาก $\{I_1, I_2, I_3, \ldots, I_N\}$ ไม่เช่นนั้นเก็บ I_2 ไว้ ทำเช่นนี้ต่อไปจนครบถึง I_N

เพื่อความสะดวกเราให้ $I_1, I_2, \ldots, I_M$ เป็นช่วงที่เหลืออยู่ สังเกตว่า

$$m\left(\bigcup_{n=1}^N I_n\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^M I_n\right)$$

สำหรับแต่ละ $1 \le n \le M$ จะมีจุด x_n ใน I_n ที่ไม่อยู่ในช่วง I_j สำหรับทุก $j = 1, \ldots, M$ ที่ $j \neq n$ เราจะจัดเรียงลำดับของดัชนีใหม่เพื่อเรียงลำดับของช่วงให้มีสมบัติว่า ถ้าดัชนี $i < j < k$ แล้วจะได้ว่า $x_i < x_j < x_k$ ซึ่งจะทำให้ได้ว่า $I_i \subset (-\infty, x_j)$ และ $I_k \subset (x_j, \infty)$ สังเกตว่า หลังจากจัดลำดับดัชนีใหม่แล้ว ช่วงที่มีดัชนีเป็นเลขคู่จะไม่มีส่วนร่วมกันเลย และในทำนองเดียวกันช่วงที่มีดัชนีเป็นเลขคี่จะไม่มีส่วนร่วมกันเช่นกัน ถ้า

$$\sum_{1 \le n \text{ เป็นคี่} \le M} m(I_n) \ge \sum_{1 \le n \text{ เป็นคู่} \le M} m(I_n)$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(2+\varepsilon)\cdot\left(\sum_{1 \le n \text{ เป็นคี่} \le M} m(I_n)\right) &\ge (2+\varepsilon)\cdot\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^M m(I_n) \\ &= \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot m\left(\bigcup_{n=1}^N I_n\right) \\ &\ge m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right)\end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่า $\{I_n : n \text{ เป็นจำนวนนับคี่ที่ไม่เกิน } M\}$ เป็นเซตย่อยของ $\mathcal{C}$ ที่มีสมบัติตามต้องการ ในทำนองเดียวกัน ถ้า

$$\sum_{1 \le n \text{ เป็นคี่} \le M} m(I_n) < \sum_{1 \le n \text{ เป็นคู่} \le M} m(I_n)$$

แล้ว $\{I_n : n \text{ เป็นจำนวนนับคู่ที่ไม่เกิน } M\}$ เป็นเซตย่อยของ $\mathcal{C}$ ที่มีสมบัติตามต้องการ $\square$

ทฤษฎีบท 5.1.3 (The Vitali covering theorem). *ให้ $A \subset \mathbb{R}$ โดยที่ $m^*(A) < \infty$ และ $\mathcal{C}$ เป็นเซตของช่วงที่ไม่ใช่เซตโทนและปกคลุม A แบบวีตาลี จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $I_1, I_2, \ldots, I_n \in \mathcal{C}$ ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ*

$$m^*\left(A - \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) < \varepsilon$$

และจะมี $\{I_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$ โดยที่สมาชิกแต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ

$$m^*\left(A - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right) = 0$$

บทพิสูจน์ เนื่องจากเราสนใจในเมเชอร์ภายนอก และเซตนับได้มีเมเชอร์ภายนอกเป็นศูนย์ จึงไม่เสียนัยทั่วไปที่จะสมมติให้ทุกช่วงใน $\mathcal{C}$ เป็นช่วงปิดและ $m^*(A) > 0$

ให้ $\mathcal{O}$ เป็นเซตเปิดที่ $A \subset \mathcal{O}$ และ $m(\mathcal{O}) < \frac{4}{3}m^*(A)$ เนื่องจาก $\mathcal{C}$ ปกคลุม A แบบวีตาลี จึงไม่เสียนัยทั่วไปถ้าจะสมมติว่าทุกสมาชิกใน $\mathcal{C}$ เป็นเซตย่อยของ $\mathcal{O}$ (นั่นคือ เราสามารถตัดสมาชิกใน $\mathcal{C}$ ที่ไม่เป็นเซตย่อยของ $\mathcal{O}$ ออกไป โดยที่เซตที่เหลืออยู่ยังคงปกคลุม A แบบวีตาลี) จึงได้ว่า $A \subset \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I \subset \mathcal{O}$ และจากทฤษฎีบท 5.1.2 จะได้ว่ามี $I_1, I_2, \ldots, I_n \in \mathcal{C}$ ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ

$$m^*(A) \leq m\left(\bigcup_{I \in \mathcal{C}} I\right) \leq 3 \cdot [m(I_1) + m(I_2) + \cdots + m(I_n)]$$

ให้ $A_1 = A - \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ และ $\mathcal{U}_1$ เป็นเซตเปิดที่บรรจุ A_1 และ $m(\mathcal{U}_1) < \frac{4}{3} \cdot m^*(A_1)$ และให้

$$\mathcal{O}_1 = \mathcal{U}_1 \cap \left[\mathcal{O} - \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right]$$

จะได้ว่า $\mathcal{O}_1$ เป็นเซตเปิดที่บรรจุ A_1 และ $m(\mathcal{O}_1) < \frac{4}{3} \cdot m^*(A_1)$ นอกจากนี้ยังได้ว่า

$$\begin{aligned} m(\mathcal{O}_1) &\leq m(\mathcal{O}) - [m(I_1) + m(I_2) + \cdots + m(I_n)] \\ &\leq m(\mathcal{O}) - \frac{1}{3} \cdot m^*(A) \\ &\leq m(\mathcal{O}) - \frac{1}{4} \cdot m(\mathcal{O}) = \frac{3}{4} \cdot m(\mathcal{O}) \end{aligned}$$

ให้ $\mathcal{C}_1 = \{I \in \mathcal{C} : I \cap \bigcup_{k=1}^{n} I_k = \emptyset$ และ $I \subset \mathcal{O}_1\}$ จะได้ว่า $\mathcal{C}_1$ ปกคลุม A_1 แบบวีตาลี โดยใช้กระบวนการข้างต้นจะได้ว่ามี $J_1, J_2, \ldots, J_{n_1} \in \mathcal{C}_1$ ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ

$$m^*(A_1) \leq m^* \left(\bigcup_{I \in \mathcal{C}_1} I \right) \leq 3 \cdot [m(J_1) + m(J_2) + \cdots + m(J_{n_1})]$$

ให้ $A_2 = A_1 - \bigcup_{k=1}^{n_1} J_k$ จะได้ว่ามีเซตเปิด $\mathcal{O}_2$ โดยที่ $A_2 \subset \mathcal{O}_2$ และ

$$m(\mathcal{O}_2) \leq \frac{3}{4} \cdot m(\mathcal{O}_1) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot m(\mathcal{O})$$

(โดยพิจารณา A_1 แทน A และพิจารณา A_2 แทน A_1) ดำเนินดังกล่าวนี้ต่อไปจนถึงขั้นตอนที่ k ที่ทำให้

$$m(\mathcal{O}_k) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot m(\mathcal{O}) < \varepsilon$$

แล้วจะได้ว่า ยูเนียนของช่วงที่ได้ในแต่ละขั้นตอนเป็นเซตย่อยจำกัดของ $\mathcal{C}$ ที่มีสมบัติตามต้องการ

นอกจากนี้ถ้าดำเนินการดังกล่าวข้างต้นต่อไปเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด แล้วนำเซตของช่วงปิดที่ได้ในแต่ละขั้นตอนมายูเนียนกัน จะได้เซตย่อยนับได้ $\{I_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$ โดยที่สมาชิกแต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ

$$m^* \left(A - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right) = 0$$

ตามต้องการ □

5.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันทางเดียว

ให้ x เป็นจำนวนจริงและ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนช่วง $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ สำหรับบางจำนวนจริงบวก ε เพื่อความสะดวกในการเขียน เราให้

$$Df(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

เมื่อ $0 < |h| < \varepsilon$ ซึ่งจะได้ว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x ก็ต่อเมื่อ $\lim_{h \to 0} Df(x, h)$ หาค่าได้ เนื่องจากในการหาลิมิตของฟังก์ชันโดยทั่วไปนั้น เราต้องแสดงว่า ลิมิตทางซ้ายเท่ากับลิมิตทาง

ขวา จึงกำหนดสัญลักษณ์ D^+, D_+, D^- และ D_- ให้มีความหมายดังนี้

$$D^+f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \sup_{0<h<\delta} Df(x,h), \qquad D_+f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \inf_{0<h<\delta} Df(x,h)$$

$$D^-f(x) = \lim_{\delta\to 0^-} \sup_{\delta<h<0} Df(x,h), \qquad D^-f(x) = \lim_{\delta\to 0^-} \inf_{\delta<h<0} Df(x,h)$$

จากสัญลักษณ์ดังกล่าวจะได้ว่า $\lim_{h\to 0^+} Df(x,h)$ หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $D^+f(x) = D_+f(x)$ และมีค่าเป็นจำนวนจริง และ $\lim_{h\to 0^-} Df(x,h)$ หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $D^-f(x) = D_-f(x)$ และมีค่าเป็นจำนวนจริง ดังนั้น f หาอนุพันธ์ได้ที่ x ก็ต่อเมื่อ

$$D^+f(x) = D_-f(x) = D^-f(x) = D_-f(x)$$

ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x แล้วเราให้ $f'(x) = D^+f(x)$ และเรียก $f'(x)$ ว่าอนุพันธ์ของ f ที่ x

สังเกตว่า $D^+f(x) \geq D_+f(x)$ และ $D^-f(x) \geq D_-f(x)$ เสมอ และถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม แล้ว D^+, D_+, D^- และ D_- มีค่าไม่เป็นลบ นอกจากนี้บทกลับของข้อความนี้ยังเป็นจริงถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 5.2.1. *ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ ถ้า $D^+f(x), D_+f(x), D^-f(x)$ หรือ $D_-f(x)$ อย่างใดอย่างหนึ่งมีค่าไม่เป็นลบบน (a,b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a,b]$*

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $D^+f(x) \geq D_+f(x)$ และ $D^-f(x) \geq D_-f(x)$ เสมอ ดังนั้นถ้าเราแสดงได้ว่าทฤษฎีบทเป็นจริงในกรณีที่ $D^+f(x) \geq 0$ และ $D^-f(x) \geq 0$ บน (a,b) แล้วจะได้ว่าทฤษฎีบทเป็นจริงทุกกรณี ในที่นี้เราจะพิสูจน์เฉพาะกรณี $D^+f(x) \geq 0$ และขอละการพิสูจน์กรณี $D^-f(x) \geq 0$ ไว้เป็นแบบฝึกหัด

สมมติให้ $D^+f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in (a,b)$ และสมมติว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน (a,b) นั่นคือ มี $x_0 \in (a,b)$ ที่สำหรับทุก $\delta > 0$ จะมี $y \in (x_0, x_0+\delta)$ ที่ $f(x_0) > f(y)$

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก และนิยามฟังก์ชัน g_ε บน (a,b) โดยให้ $g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\frac{g_\varepsilon(x+h) - g_\varepsilon(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \varepsilon$$

ดังนั้น

$$D^+g_\varepsilon(x) = D^+f(x) + \varepsilon$$

เนื่องจาก $D^+f(x) \geq 0$ และ g_ε เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน (a,b) จึงได้ว่า สำหรับแต่ละ $x \in (a,b)$ จะมี $\delta_x > 0$ ที่ทำให้

$$\frac{g_\varepsilon(x+h) - g_\varepsilon(x)}{h} > \frac{\varepsilon}{2}$$

สำหรับทุก $h \in (0, \delta_x)$ ซึ่งแสดงว่า g_ε เป็นฟังก์ชันเพิ่มแท้บน (a,b) กล่าวคือ $g_\varepsilon(x) < g_\varepsilon(y)$ สำหรับทุก $x, y \in (a,b)$ ที่ $x < y$

ให้ $\delta = \min\{b - x_0, 0.5\}$ และ y เป็นจำนวนจริงใน $(x_0, x_0 + \delta)$ ที่ทำให้ $f(x_0) > f(y)$ และให้ $\varepsilon = f(x_0) - f(y)$ แล้วจะได้ว่า $g_\varepsilon(x_0) < g_\varepsilon(y)$ และ

$$g_\varepsilon(x_0) - f(x_0) < g_\varepsilon(y) - f(y) - \varepsilon$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $\varepsilon x_0 < \varepsilon y - \varepsilon$ หรือ $y - x_0 > 1$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งเพราะว่า $y - x_0 < \delta \leq 0.5$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน (a,b) และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a,b]$ ตามต้องการ $\square$

ต่อจากนี้ไป เพื่อให้ f' เป็นฟังก์ชันที่นิยามทุกจุดบนโดเมนของ f เราจะกำหนดให้ $f'(x) = \infty$ เมื่อ x เป็นจุดในโดเมนที่ f หาอนุพันธ์ไม่ได้

ทฤษฎีบท 5.2.2. *ถ้า $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม แล้ว f หาอนุพันธ์ได้เกือบทุกแห่งบน $[a,b]$ และ f' เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน $[a,b]$ นอกจากนี้*

$$\int_a^b f' \leq f(b) - f(a)$$

บทพิสูจน์ เราจะพิสูจน์ว่า f หาอนุพันธ์ได้เกือบทุกแห่งบน $[a,b]$ ด้วยการแสดงว่า เซต A, B และ C มีเมเชอร์ภายนอกเป็นศูนย์ เมื่อ

$$A = \{x \in [a,b] : D^+f(x) > D_+f(x)\}$$
$$B = \{x \in [a,b] : D^-f(x) > D_-f(x)\}$$
$$C = \{x \in [a,b] : D^+f(x) \neq D^-f(x)\}$$

โดยในที่นี้จะแสดงเพียงว่า $m^*(A) = 0$ และจะขอละการพิสูจน์ที่เหลือไว้เป็นแบบฝึกหัด

สำหรับแต่ละคู่ $p, r \in \mathbb{Q}$ โดยที่ $r > p$ เราให้

$$A_{p,r} = \{x \in [a,b] : D^+ f(x) > r > p > D_+ f(x)\}$$

จะได้ว่า

$$A = \bigcup_{p,r \in \mathbb{Q}} A_{p,r}$$

ซึ่งเป็นยูเนียนนับได้ ดังนั้นถ้าเราสามารถแสดงได้ว่า $m^*(A_{p,r}) = 0$ สำหรับทุกคู่ $p, r \in \mathbb{Q}$ เราจะได้ว่า $m^*(A) = 0$ ตามต้องการ

ให้ $\varepsilon > 0$ และ $\mathcal{O}$ เป็นเซตเปิดที่ $A_{p,r} \subset \mathcal{O}$ และ $m(\mathcal{O}) < m^*(A_{p,r}) + \varepsilon$ ให้ $x \in A_{p,r}$ เนื่องจาก

$$\lim_{\delta \to 0^+} \inf_{0<h<\delta} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = D_+ f(x) < p$$

จึงได้ว่า สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ จะมี $0 < h_{x_n} < n^{-1}$ ที่ทำให้ $[x, x + h_{x_n}] \subset \mathcal{O}$ และ

$$f(x + h_{x_n}) - f(x) \leq p h_{x_n} \tag{5.1}$$

ให้ $\mathcal{C} = \{[x, x + h_{x_n}] : x \in A_{p,r}$ และ $n \in \mathbb{N}\}$ จะได้ว่า $\mathcal{C}$ ปกคลุม $A_{p,r}$ แบบวีตาลี โดยทฤษฎีบท 5.1.3 จะได้ว่า มี $\{I_1, I_2, \ldots, I_N\} \subset \mathcal{C}$ ที่สมาชิกแต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ

$$m^*\left(A_{p,r} - \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \varepsilon$$

เพื่อความสะดวกเราให้ $I_n = [x_n, x_n + h_n]$ สำหรับแต่ละ $n = 1, 2, \ldots, N$ และให้ $E = \left(\bigcup_{n=1}^{N} I_n^o\right) \cap A_{p,r}$ ซึ่งจะได้ว่า

$$m^*\left(A_{p,r} - E\right) = m^*\left(A_{p,r} - \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \varepsilon$$

ดังนั้น

$$m^*(E) > m^*(A_{p,r}) - \varepsilon \tag{5.2}$$

เนื่องจาก $\bigcup_{n=1}^{N} I_n \subset \mathcal{O}$ และจากอสมการ (5.1) จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{N} f(x_n + h_n) - f(x_n) \leq p \cdot \sum_{n=1}^{N} h_n < p \cdot m^*(\mathcal{O}) < p \cdot (m^*(A_{p,r}) + \varepsilon) \tag{5.3}$$

ให้ $y \in E$ เนื่องจาก $y \in I_n^o$ สำหรับบาง $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ และ $D^+ f(y) > r$ จึงได้ว่า สำหรับแต่ละ $m \in \mathbb{N}$ จะมี $0 < k_{y_m} < m^{-1}$ ที่ทำให้ $[y, y + k_{y_m}] \subset I_n$ และ

$$f(y + k_{y_m}) - f(y) \geq r k_{y_m}$$

ให้ $\mathcal{C}_0 = \{[y, y + k_{y_m}] : y \in E \ \text{ และ } \ m \in \mathbb{N}\}$ ซึ่งจะได้ว่า $\mathcal{C}_0$ ปกคลุม E แบบวีตาลี จึงมี $\{J_1, J_2, \ldots, J_M\} \subset \mathcal{C}_0$ ที่สมาชิกแต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ

$$m^*\left(E - \bigcup_{m=1}^{M} J_m\right) < \varepsilon$$

สำหรับแต่ละ $m = 1, 2, \ldots, M$ ให้ $J_m = [y_m, y_m + k_m]$ เนื่องจาก

$$m^*(E) - m\left(\bigcup_{m=1}^{M} J_m\right) \leq m^*\left(E - \bigcup_{m=1}^{M} J_m\right) < \varepsilon$$

และจากอสมการ (5.2) จะได้ว่า

$$\sum_{m=1}^{M} k_m > m^*(E) - \varepsilon > m^*(A_{p,r}) - 2\varepsilon$$

และ

$$\sum_{m=1}^{M} f(y_m + k_m) - f(y_m) \geq r \cdot \sum_{m=1}^{M} k_m > r \cdot (m^*(A_{p,r}) - 2\varepsilon) \tag{5.4}$$

เนื่องจากแต่ละ J_m เป็นเซตย่อยของ I_n สำหรับบาง $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จึงได้ว่า

$$\sum_{m=1}^{M} [f(y_m + k_m) - f(y_m)] \leq \sum_{n=1}^{N} [f(x_n + h_n) - f(x_n)]$$

จาก (5.3) และ (5.4) ทำให้ได้ว่า

$$r \cdot (m^*(A_{p,r}) - 2\varepsilon) < p \cdot (m^*(A_{p,r}) + \varepsilon) \tag{5.5}$$

เนื่องจาก (5.5) เป็นจริงสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จึงสรุปได้ว่า $r \cdot m^*(A_{p,r}) \leq p \cdot m^*(A_{p,r})$ แต่ $p < r$ ดังนั้น $m^*(A_{p,r})$ ต้องเท่ากับ 0 ตามต้องการ

เรานิยามให้ $f(x) = f(b)$ เมื่อ $x > b$ และนิยามฟังก์ชัน g_n โดยให้

$$g_n(x) = \frac{f(x+n^{-1}) - f(x)}{n^{-1}}$$

จะได้ว่า g_n เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน $[a,b]$ และ $f'(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ เกือบทุกแห่งบน $[a,b]$ ดังนั้น f' เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้และมีค่าไม่เป็นลบบน $[a,b]$ โดยทฤษฎีบท 4.4.6 (Fatou's Lemma) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_a^b f' \leq \liminf \int_a^b g_n &= \liminf n \int_a^b [f(x+n^{-1}) - f(x)]dx \\
&= \liminf n \left(\int_{a+n^{-1}}^{b+n^{-1}} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right) \\
&= \liminf n \left(\int_b^{b+n^{-1}} f(x)dx - \int_a^{a+n^{-1}} f(x)dx \right) \\
&= \liminf \left(f(b) - n \int_a^{a+n^{-1}} f(x)dx \right) \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จึงได้ว่า

$$f(a) = n \int_a^{a+n^{-1}} f(a)dx \leq n \int_a^{a+n^{-1}} f(x)dx$$

ดังนั้น จากอสมการ (5.6) จะได้

$$\int_a^b f' \leq \liminf \left(f(b) - n \int_a^{a+n^{-1}} f(x)dx \right) \leq f(b) - f(a)$$

ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงแสดงว่า $\lim_{h\to 0^+} Df(x,h)$ และ $\lim_{h\to 0^-} Df(x,h)$ หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ
$$D_+f(x) = \lim_{h\to 0^+} Df(x,h) = D^+f(x)$$
และ
$$D_-f(x) = \lim_{h\to 0^-} Df(x,h) = D^-f(x)$$
ตามลำดับ

2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.2.1 สำหรับกรณี $D^-f(x) \geq 0$ บน (a,b)

3. ให้ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ และให้ $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ ซึ่งต่อเนื่องบน $[c,d]$ ให้ $w \in (c,d)$ และสมมติว่า g หาอนุพันธ์ได้ที่ w และ $g(w) = u \in (a,b)$ จงพิสูจน์ว่า

   3.1 ถ้า $g'(w) > 0$ แล้ว $D^+(f\circ g)(w) = D^+(f(u)) \cdot g'(w)$

   3.2 ถ้า $g'(w) < 0$ แล้ว $D^+(f\circ g)(w) = D_-(f(u)) \cdot g'(w)$

   3.3 ถ้า $g'(w) = 0$ และ $D^+f(u), D_-f(u), D^-f(u)$ และ $D_-f(u)$ มีค่าเป็นจำนวนจริง แล้ว $D^+(f\circ g)(w) = 0$

4. ให้ B และ C เป็นเซตที่นิยามในบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 5.2.2 จงแสดงว่า $m^*(B) = 0$ และ $m^*(C) = 0$

5. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันลด แล้ว f หาอนุพันธ์ได้เกือบทุกแห่งบน $[a,b]$ และ f' เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน $[a,b]$ นอกจากนี้
$$\int_a^b f' \geq f(b) - f(a)$$

6. ให้ C คือเซตคันเตอร์ และ $f : [0,1] \to [0,1]$ คือฟังก์ชันคันเตอร์ซึ่งเป็นฟังก์ชันทางเดียว จงแสดงว่า $f'(x) = 0$ บน $[0,1] - C$ และ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $x \in C$

5.3 ฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขตและความต่อเนื่องสัมบูรณ์

ให้ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ และ $p = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ นิยามให้

$$\begin{aligned} t_p f &= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ v_p^+ f &= \sum_{k=1}^{n} \big([f(x_k) - f(x_{k-1})] \vee 0\big) \\ v_p^- f &= -\sum_{k=1}^{n} \big([f(x_k) - f(x_{k-1})] \wedge 0\big) \\ T_a^b f &= \sup_{p \in \mathcal{P}[a,b]} t_P f \\ P_a^b f &= \sup_{p \in \mathcal{P}[a,b]} v_P^+ f \\ \text{และ} \quad N_a^b f &= \sup_{p \in \mathcal{P}[a,b]} v_P^- f \end{aligned}$$

ในกรณีที่ f และ $[a, b]$ เป็นที่ประจักษ์ เราอาจเขียนแทน $t_p f, v_p^+ f, v_p^- f, T_a^b f, P_a^b f$ และ $N_a^b f$ โดยย่อด้วย t_p, v_p^+, v_p^-, T, P และ N ตามลำดับ

จากนิยามจะเห็นได้ว่า $t_p = v_p^+ + v_p^-$ และ

$$v_p^+ - v_p^- = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a)$$

สำหรับทุก $p \in \mathcal{P}[a, b]$ และ $P \le T \le P + N$

บทนิยาม 5.3.1. *เราจะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขต** (**function of bounded variation**) บน $[a, b]$ ถ้า $T < \infty$ และเรียก T ว่า **ค่าแปรผันทั้งหมด** (**total variation**) ของ f บน $[a, b]$*

ทฤษฎีบท 5.3.2. *ถ้า f เป็นฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขตบน $[a, b]$ แล้ว*

$$P - N = f(b) - f(a) \quad \text{และ} \quad T = P + N$$

บทพิสูจน์ ให้ $p \in \mathcal{P}[a, b]$ เนื่องจาก

$$v_p^+ = v_p^- + f(b) - f(a) \le N + f(b) - f(a)$$

จึงได้ว่า

$$P \leq N + f(b) - f(a) \tag{5.7}$$

ในทำนองเดียวกัน เราได้ว่า

$$v_p^- = v_p^+ - f(b) + f(a) \leq P - f(b) + f(a)$$

ซึ่งจะได้ว่า $N \leq P - f(b) + f(a)$ หรือ

$$P \geq N + f(b) - f(a) \tag{5.8}$$

จากอสมการ (5.7) และ (5.8) ทำให้ได้ว่า $P - N = f(b) - f(a)$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} t_p = v_p^+ + v_p^- &= 2v_p^+ + f(a) - f(b) \\ &\leq 2P + f(a) - f(b) \end{aligned} \tag{5.9}$$

จึงได้ว่า

$$T \leq 2P + f(a) - f(b) \tag{5.10}$$

และจากสมการ (5.9) จะได้ว่า

$$2v_p^+ = t_p - f(a) + f(b) \leq T - f(a) + f(b)$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $2P \leq T - f(a) + f(b)$ หรือ

$$T \geq 2P + f(a) - f(b) \tag{5.11}$$

จากอสมการ (5.10) และ (5.11) จะได้ว่า $2P = T - f(a) + f(b)$ และจากที่เราพิสูจน์แล้วว่า $P - N = f(b) - f(a)$ ทำให้ได้ว่า $T = P + N$ ตามต้องการ $\square$

ทฤษฎีบท 5.3.3. *ให้ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขตบน $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชัน g และ h ที่เป็นฟังก์ชันเพิ่มและ $f = g - h$ บน $[a, b]$*

บทพิสูจน์ ก่อนอื่นให้ f เป็นฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขตบน $[a,b]$ นิยามฟังก์ชัน g และ h บน $[a,b]$ โดย

$$g(x) = f(a) + P_a^x f \quad \text{และ} \quad h(x) = N_a^x f$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a,b]$ เพราะว่า $P_a^x f$ และ $N_a^x f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มตามตัวแปร x จากทฤษฎีบท 5.3.2 เราได้ว่า $P_a^x f - N_a^x f = f(x) - f(a)$ ทำให้ได้ว่า

$$g(x) - h(x) = f(a) + P_a^x f - N_a^x f = f(x)$$

สำหรับทุก $x \in [a,b]$

ต่อไปสมมติว่า g และ h เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a,b]$ และ $f = g - h$ บน $[a,b]$ ให้ $x, y \in [a,b]$ โดยที่ $x < y$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |g(y) - h(y) - g(x) + h(x)| \\ &= |[g(y) - g(x)] - [h(y) - h(x)]| \\ &\leq [g(y) - g(x)] + [h(y) - h(x)] \end{aligned}$$

ให้ $p \in \mathcal{P}[a,b]$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} t_p f &= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} [g(x_k) - g(x_{k-1})] + \sum_{k=1}^{n} [h(x_k) - h(x_{k-1})] \\ &= g(b) - g(a) + h(b) - h(a) \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $T_a^b f \leq g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขตบน $[a,b]$ □

จากบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 5.3.3 เราจะได้ว่าฟังก์ชัน g และ h คู่หนึ่งที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบท คือ $g(x) = f(a) + P_a^x f$ และ $h(x) = N_a^x f$ นั่นเอง

บทแทรก 5.3.4. *ให้ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขตบน $[a,b]$ และ $x \in [a,b]$ จะได้ว่า*

$$f(x) = f(a) + P_a^x f - N_a^x f$$

ทฤษฎีบท 5.3.5. *ถ้า $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขตบน $[a, b]$ แล้ว f หาอนุพันธ์ได้เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$ และ*

$$\int_a^b |f'| \leq T_a^b f$$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $g(x) = f(a) + P_a^x f$ และ $h(x) = N_a^x f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a, b]$ โดยทฤษฎีบท 5.2.2 จะได้ว่า g' และ h' หาค่าได้เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$ และ

$$\int_a^b g' \leq g(b) - g(a) = P_a^b f$$

และ

$$\int_a^b h' \leq h(b) - h(a) = N_a^b f$$

ดังนั้น $f' = g' - h'$ หาค่าได้เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$ และเนื่องจาก $g'(x) \geq 0$ และ $h'(x) \geq 0$ สำหรับทุก x ที่ g' และ h' หาค่าได้ จึงได้ว่า

$$\int_a^b |f'| = \int_a^b |g' - h'| \leq \int_a^b g' + \int_a^b h' \leq P_a^b f + N_a^b f = T_a^b f$$

ตามต้องการ □

บทนิยาม 5.3.6. *เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f* ***ต่อเนื่องสัมบูรณ์*** (*absolutely continuous*) *บน $[a, b]$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k') - f(x_k)| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $a \leq x_1 < x_1' \leq x_2 < x_2' \leq \cdots \leq x_n < x_n' \leq b$ ที่ $\sum_{k=1}^{n} (x_k' - x_k) < \delta$

จะเห็นได้ชัดว่า ฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเอกรูป แต่ขากลับไม่จริง เช่น ฟังก์ชันคันเตอร์ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0, 1]$ แต่ไม่ต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[0, 1]$ เป็นต้น ซึ่งการแสดงโดยตรงจากบทนิยามนั้นไม่ง่าย แต่เราจะได้ข้อสรุปนี้จากผลของทฤษฎีบท 5.3.10 ที่จะกล่าวถึงในอันดับต่อไป

บทนิยาม 5.3.7. *เรากล่าวว่า ฟังก์ชัน f สอดคล้องกับ***เงื่อนไขลิพชิทซ์** (*Lipschitz condition*) *ถ้ามีจำนวนจริงบวก M ที่สำหรับทุก x และ y ในโดเมนของ f จะได้ว่า*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

ทฤษฎีบท 5.3.8. *ถ้าฟังก์ชัน f สอดคล้องกับเงื่อนไขลิพชิทซ์บนช่วง I แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บน I*

บทพิสูจน์ ให้ M เป็นจำนวนจริงบวกที่ทำให้ $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ สำหรับทุก $x, y \in I$ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ กำหนดให้ $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ และให้ $\langle [x_k, x'_k] \rangle_{k=1}^n$ เป็นลำดับจำกัดของช่วงที่บรรจุใน I โดยที่แต่ละคู่ไม่มีจุดภายในร่วมกัน และ $\sum_{k=1}^n (x'_k - x_k) < \delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\sum_{k=1}^n |f(x'_k) - f(x_k)| \leq M \sum_{k=1}^n (x'_k - x_k) < M\delta = \varepsilon$$

ซึ่งแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 5.3.9. *ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[a, b]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขตบน $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$ นอกจากนี้ f' เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน $[a, b]$*

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[a, b]$ พิจารณา $\varepsilon = 1$ และให้ δ เป็นจำนวนจริงบวกที่

$$\sum_{k=1}^n |f(x'_k) - f(x_k)| < \varepsilon = 1 \tag{5.12}$$

สำหรับทุก $a \leq x_1 < x'_1 \leq x_2 < x'_2 \leq \cdots \leq x_n < x'_n \leq b$ ที่ $\sum_{k=1}^n (x'_k - x_k) < \delta$

ให้ N เป็นจำนวนนับที่ $\frac{b-a}{N} < \delta$ และให้ $y_k = a + \frac{k(b-a)}{N}$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots, N$ ถ้า $p_k \in \mathcal{P}[y_{k-1}, y_k]$ จาก (5.12) จะได้ว่า

$$t_{p_k} \leq 1 \quad \text{สำหรับแต่ละ } k = 1, 2, \ldots, N$$

ดังนั้น $T_{y_{k-1}}^{y_k} \leq 1$ สำหรับแต่ละ $k = 1, 2, \ldots, N$ เนื่องจาก $T_a^b = \sum_{k=1}^N T_{y_{k-1}}^{y_k}$ (จากแบบฝึกหัด 5.3 ข้อ 2) ทำให้ได้ว่า

$$T_a^b = \sum_{k=1}^N T_{y_{k-1}}^{y_k} \leq N$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขต และโดยทฤษฎีบท 5.3.5 จะได้ว่า f หาอนุพันธ์ได้เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$ และ $\int_a^b |f'| \leq T_a^b f$ จึงได้ว่า f' เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน $[a, b]$ □

ทฤษฎีบท 5.3.10. *ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์และ $f'(x) = 0$ เกือบทุกแห่งบน $[a,b]$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันคงตัวบน $[a,b]$*

บทพิสูจน์ ให้ $c \in (a,b]$ เราจะแสดงว่า $f(c) = f(a)$
ให้ $\varepsilon > 0$ และ $E = \{x \in (a,c) : f'(x) = 0\}$ และให้ δ เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ ε ในการเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์ของ f บน $[a,b]$

สำหรับแต่ละ $x \in E$ และ $\eta > 0$ จะมี $h_x > 0$ ที่ทำให้ $[x, x+h_x] \subset (a,c)$ และ

$$\frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} < \eta$$

สำหรับทุก $0 < h < h_x$ เพราะว่า $f'(x) = 0$

ให้ $\mathcal{C} = \{[x, x+h] : x \in E \text{ และ } h \in (0, h_x)\}$ เนื่องจาก $m(E) = m((a,c))$ จึงได้ว่า E หนาแน่นใน (a,c) ทำให้ได้ว่า $\mathcal{C}$ ปกคลุม (a,c) ในแบบวีตาลี โดยทฤษฎีบท 5.1.3 จะมี

$$[x_1, x_1'], [x_2, x_2'], \ldots, [x_n, x_n']$$

ซึ่งเป็นสมาชิกใน $\mathcal{C}$ ที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกัน และ

$$m\left((a,c) - \bigcup_{k=1}^{n} [x_k, x_k']\right) < \delta \tag{5.13}$$

โดยที่ $a < x_1 < x_1' < x_2 < x_2' < \cdots < x_n < x_n' < c$ จาก (5.13) เราได้ว่า

$$(x_1 - a) + \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k') + (c - x_n') < \delta$$

เนื่องจาก $|f(x_k) - f(x_k')| < \eta(x_k' - x_k)$ สำหรับแต่ละ $k = 1, 2, \ldots, n$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} |f(c) - f(a)| \le |f(x_1) - f(a)| + \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_k')| + \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k')| \\ + |f(c) - f(x_n')| \\ < \varepsilon + \eta \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k') \le \varepsilon + \eta(c - a) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$|f(c) - f(a)| < \varepsilon + \eta(c - a)$$

เนื่องจาก ε และ η เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จึงได้ว่า $f(c) = f(a)$ ตามต้องการ □

เนื่องจากฟังก์ชันคันเตอร์เป็นฟังก์ชันเพิ่มจาก $[0, 1]$ ไปทั่วถึง $[0, 1]$ และมีอนุพันธ์เป็นศูนย์เกือบทุกแห่งบน $[0, 1]$ โดยทฤษฎีบท 5.3.10 แสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันคันเตอร์ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์

แบบฝึกหัด 5.3

1. ให้ f เป็นฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขตบน $[a, b]$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบน $[a, b]$

2. ให้ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ และ $a < c < b$ จงแสดงว่า

$$T_a^b f = T_a^c f + T_c^b f$$

3. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขตบน $[a, b]$ จงแสดงว่า $f + g$ เป็นฟังก์ชันแปรผันมีขอบเขตบน $[a, b]$ และ

$$T_a^b(f + g) \leq T_a^b f + T_a^b g$$

4. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชัน f ต่อไปนี้ต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[0, 1]$ หรือไม่ เมื่อ $f(0) = 0$ และ

   (i) $f(x) = x \sin(1/x)$ สำหรับ $x \in (0, 1]$

   (ii) $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ สำหรับ $x \in (0, 1]$

   (iii) $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ สำหรับ $x \in (0, 1]$

5. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[a, b]$ จงแสดงว่า

$$T_a^b f = \int_a^b |f'|$$

6. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[a, b]$ จงแสดงว่า

   (i) $f + g$ และ fg เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[a, b]$

(ii) $1/f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[a, b]$ ถ้า $f(x) \neq 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$

7. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[a, b]$ และ $f' = g'$ เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$ จงแสดงว่า ถ้ามี $c \in [a, b]$ ที่ $f(c) = g(c)$ แล้ว $f = g$ บน$[a, b]$

8. ให้ f เป็นฟังก์ชันทางเดียวและต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[a, b]$ จงแสดงว่า ถ้า $E \subset [a, b]$ ที่ $m(E) = 0$ แล้ว $f[E]$ มีเมเชอร์เป็นศูนย์

5.4 การหาอนุพันธ์ของปริพันธ์

ให้ f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์เลอเบกได้บน $[a, b]$ เราจะได้ว่า

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

เป็นฟังก์ชันค่าจริงบน $[a, b]$ ในหัวข้อนี้เราจะมาหาเงื่อนไขของฟังก์ชัน f ที่จะทำให้

$$F'(x) = f(x)$$

และ

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

นั่นคือ f จะต้องสอดคล้องกับเงื่องไขอะไร ถึงจะทำให้ความจริงที่เกี่ยวกับทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสยังคงเป็นจริง เมื่อเราแทนปริพันธ์รีมันน์ด้วยปริพันธ์เลอเบก

ทฤษฎีบท 5.4.1. *ถ้า f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน $[a, b]$ และ*

$$\int_a^x f(t)dt = 0$$

สำหรับทุก $x \in [a, b]$ แล้ว $f(x) = 0$ เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$

บทพิสูจน์ สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ ให้

$$E_k = \{x \in [a, b] : f(x) > k^{-1}\}$$

สมมติว่า มี $k \in \mathbb{N}$ ที่ $m(E_k) > 0$ ให้ F เป็นเซตปิดที่ $F \subset E$ และ $m(F) > 0$

ให้ $\mathcal{O} = (a,b) - F$ เนื่องจาก $\mathcal{O}$ เป็นเซตเปิด จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปยูเนียนนับได้ของช่วงเปิดที่แต่ละคู่ไม่มีส่วนร่วมกันได้ ให้ $\mathcal{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ โดยที่แต่ละคู่ของช่วงไม่มีส่วนร่วมกัน จะได้ว่า

$$\int_F f + \int_{\mathcal{O}} f = \int_a^b f = 0 \tag{5.14}$$

สังเกตว่า

$$\int_{\mathcal{O}} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^{b_n} f - \int_a^{a_n} f \right) = 0$$

ดังนั้น จาก (5.14) จะได้ว่า $\int_F f = 0$ แต่

$$\int_F f \geq \int_F k^{-1} = \frac{m(F)}{k} > 0$$

จึงเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $m(E_k) = 0$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$ และทำให้ได้ว่า

$$m(\{x \in [a,b] : f(x) > 0\}) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = 0$$

ในทำนองเดียวกันเราจะแสดงได้ว่า $m(\{x \in [a,b] : f(x) < 0\}) = 0$ ดังนั้น $f(x) = 0$ เกือบทุกแห่งตามต้องการ □

บทตั้ง 5.4.2. *ถ้า f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน $[a,b]$ แล้วฟังก์ชัน F ที่นิยามโดย*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[a,b]$ และ F' หาค่าได้เกือบทุกแห่ง

บทพิสูจน์ เป็นผลมาจากทฤษฎีบท 4.5.5 ข้อ 5 และทฤษฎีบท 5.3.9 □

ทฤษฎีบท 5.4.3. *ให้ f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้และมีขอบเขตบน $[a,b]$ และ*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

จะได้ว่า $F'(x) = f(x)$ เกือบทุกแห่งบน $[a,b]$

บทพิสูจน์ จากบทตั้ง 5.4.2 จะได้ว่า F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ F' หาค่าได้เกือบทุกแห่งบน $[a,b]$ สำหรับ $t > b$ เรานิยามให้ $f(t) = 0$ และสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้

$$f_n(x) = \frac{F(x+n^{-1}) - F(x)}{n^{-1}} = n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$$

เมื่อ $x \in [a,b]$ จะได้ว่า $f_n(x) \to F'(x)$ สำหรับทุก x ที่ $F'(x)$ หาค่าได้

ให้ K เป็นจำนวนจริงบวกที่ $|f(x)| \le K$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ จะได้ว่า

$$|f_n(x)| \le n\int_x^{x+\frac{1}{n}} |f| \le K$$

โดยทฤษฎีบท 4.3.4 จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $c \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
\int_a^c F'(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_a^c f_n(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} n\int_a^c [F(x+n^{-1}) - F(x)]dx \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} F(x)dx - \int_a^c F(x)dx\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(n\int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)dx - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)dx\right) \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก F ต่อเนื่องบน $[a,b]$ จึงได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} n\int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x)dx = F(c) \quad \text{และ} \quad \lim_{n\to\infty} n\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x)dx = F(a) = 0$$

จาก (5.15) จะได้ว่า

$$\int_a^c F'(x)dx = F(c) = \int_a^c f(x)dx$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\int_a^c (F' - f) = 0$$

สำหรับทุก $c \in [a,b]$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.4.1 จะได้ว่า $F'(x) = f(x)$ เกือบทุกแห่งบน $[a,b]$ ตามต้องการ $\square$

ทฤษฎีบท 5.4.4. *ให้ f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน $[a, b]$ และ*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

จะได้ว่า $F'(x) = f(x)$ เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f^+ - \int_a^x f^-$$

จึงเพียงพอที่จะแสดงว่า ทฤษฎีบทเป็นจริงเมื่อ $f(x) \geq 0$ บน $[a, b]$

สมมติให้ $f(x) \geq 0$ บน $[a, b]$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $f_n(x) = f(x) \wedge n$ และ

$$G_n(x) = \int_a^x (f - f_n)$$

เนื่องจาก $(f - f_n)(x) \geq 0$ จึงได้ว่า G_n เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[a, b]$ ดังนั้น $G_n'(x) \geq 0$ เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$ เนื่องจาก f_n เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้และมีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 5.4.3 จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f_n\right) = f_n(x)$$

เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$ เนื่องจาก $F(x) = G_n(x) + \int_a^x f_n$ จึงได้ว่า

$$F'(x) = G_n'(x) + f_n(x) \geq f_n(x)$$

เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$
ดังนั้น

$$F'(x) \geq \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\int_a^x F' \geq \int_a^x f = F(x) \tag{5.16}$$

เนื่องจาก F เป็นฟังก์ชันเพิ่ม โดยทฤษฎีบท 5.2.2 จะได้ว่า

$$\int_a^x F' \leq F(x) - F(a) = F(x) \tag{5.17}$$

จาก (5.16) และ (5.17) จะได้ว่า

$$\int_a^x F' = \int_a^x f$$

หรือ $\int_a^x (F' - f) = 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ โดยทฤษฎีบท 5.4.1 จะได้ว่า $F' = f$ เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 5.4.5. *ฟังก์ชัน F ต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชัน F หาอนุพันธ์ได้เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$ และ*

$$F(x) = \int_a^x F'(t)dt + F(a)$$

สำหรับทุก $x \in [a, b]$

บทพิสูจน์ ก่อนอื่นสมมติให้ F เป็นฟังก์ชันหาอนุพันธ์ได้เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$ และ

$$F(x) = \int_a^x F'(t)dt + F(a)$$

สำหรับทุก $x \in [a, b]$ ซึ่งจะได้ว่า F' หาปริพันธ์ได้บน $[a, b]$ โดยบทตั้ง 5.4.2 จะได้ว่า F ต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[a, b]$

ต่อไปสมมติให้ F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[a, b]$ โดยทฤษฎีบท 5.3.9 จะได้ว่า

$$G(x) = \int_a^x F'$$

เป็นฟังก์ชันค่าจริงบน $[a, b]$ นอกจากนี้จากบทตั้ง 5.4.2 จะได้ว่า G เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[a, b]$ ทำให้ได้ว่า $F - G$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[a, b]$ และโดยทฤษฎีบท 5.4.3 จะได้ว่า $(F - G)' = 0$ เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$ โดยทฤษฎีบท 5.3.10 จะได้ว่า $F - G$ เป็นฟังก์ชันคงตัว และเนื่องจาก $(F - G)(a) = F(a)$ จึงได้ว่า

$$F(x) = G(x) + F(a) = \int_a^x F'(t)dt + F(a)$$

ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 5.4

1. จงยกตัวอย่างฟังก์ชัน $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ที่ต่อเนื่องบน $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้เกือบทุกแห่งบน $[a, b]$ แต่
$$f(x) \neq \int_a^x f'(t)dt + f(a)$$
สำหรับทุก $x \in (a, b]$

2. จงยกตัวอย่างฟังก์ชัน $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ที่ไม่ต่อเนื่อง ณ จุดใดเลยบนโดเมน แต่ฟังก์ชัน
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
หาอนุพันธ์ได้บน (a, b)

3. ให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มแท้และต่อเนื่องสัมบูรณ์บนช่วงปิด $[a, b]$

 3.1 จงแสดงว่า ถ้า $(c, d) \subset [f(a), f(b)]$ แล้ว
$$\int_{f^{-1}(c)}^{f^{-1}(d)} f'(x)dx = d - c$$

 3.2 ให้ $A = \{x \in [a, b] : f'(x) \neq 0\}$ จงแสดงว่า ถ้า $B \subset [f(a), f(b)]$ ซึ่ง $m(B) = 0$ แล้ว $f^{-1}[B] \cap A$ มีเมเชอร์เป็นศูนย์

 3.3 ให้ E เป็นเซตเมเชอร์ได้ และ $E \subset [f(a), f(b)]$ จงแสดงว่า เซต $S = f^{-1}[E] \cap A$ เป็นเซตเมเชอร์ได้ และ
$$m(E) = \int_S f' = \int_a^b \chi_E(f(x))f'(x)dx$$

 3.4 ให้ g เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้และมีค่าไม่เป็นลบบน $[f(a), f(b)]$ จงแสดงว่า $(g \circ f)f'$ เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้บน $[a, b]$ และ
$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy = \int_a^b g\big(f(x)\big)f'(x)dx$$

5.5 ฟังก์ชันคอนเวกซ์และการประยุกต์

บทนิยาม 5.5.1. *ให้ I เป็นช่วงและ $f : I \to \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันคอนเวกซ์** (**convex function**) บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $a, b \in I$ จะได้ว่า*

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

*สำหรับทุก $t \in [0,1]$ และจะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันคอนเวกซ์แท้** (**strictly convex function**) บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $a, b \in I$ จะได้ว่า*

$$f(ta + (1-t)b) < tf(a) + (1-t)f(b)$$

สำหรับทุก $t \in (0,1)$ ยกเว้น $a = b$ เท่านั้น

จากบทนิยามเราจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ กราฟของ f ที่เชื่อมจุด $(a, f(a))$ และ $(b, f(b))$ อยู่ใต้ส่วนของเส้นตรงที่มีจุด $(a, f(a))$ และ $(b, f(b))$ เป็นจุดปลาย เมื่อ $a, b \in I$ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า กราฟของ f เป็นกราฟโค้งหงายบน I นั่นเอง

บทตั้ง 5.5.2. *ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนช่วง I จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน*

1. *f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บน I*

2. *สำหรับทุก $x < y < z$ ใน I จะได้ว่า*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

3. *สำหรับทุก $x < y < z$ ใน I จะได้ว่า*

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

บทพิสูจน์ ก่อนอื่นจะแสดงว่า (1) $\Leftrightarrow$ (2) ให้ $x < y < z$ จะได้ว่า

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

ก็ต่อเมื่อ

$$f(y) \leq \frac{y-x}{z-x}\big(f(z)-f(x)\big)+f(x)$$

หรือ

$$f(y) \leq \frac{z-y}{z-x}f(x)+\left(1-\frac{z-y}{z-x}\right)f(z) \tag{5.18}$$

ให้ $t = \frac{z-y}{z-x}$ ซึ่งจะได้ว่า $0 < t < 1$ และ $y = tx + (1-t)z$ และเขียนอสมการ (5.18) ได้ในรูป

$$f(tx+(1-t)z) \leq tf(x)+(1-t)f(z)$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่า (1) ⇔ (2) ตามต้องการ

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า (1) ⇔ (3) ซึ่งจะขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

บทตั้ง 5.5.3. *ให้ f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บนช่วง I และ $[a,d] \subset I$ ถ้า $b,c \in (a,d)$ แล้ว*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

บทพิสูจน์ จาก $a < b < d$ และบทตั้ง 5.5.2 จะได้ว่า

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(d)-f(a)}{d-a} \tag{5.19}$$

และจาก $a < c < d$ และบทตั้ง 5.5.2 จะได้ว่า

$$\frac{f(d)-f(a)}{d-a} \leq \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \tag{5.20}$$

จากอสมการ (5.19) และ (5.20) จะได้ว่า บทตั้งเป็นจริง □

ทฤษฎีบท 5.5.4. *ถ้า f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บน (a,b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์บนทุกช่วงปิดที่บรรจุใน (a,b)*

บทพิสูจน์ ให้ f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บน (a,b) และให้ $[c,d] \subset (a,b)$

ให้ $p, r, s, t \in (a, b)$ โดยที่ $p < r < c < d < s < t$ จากบทตั้ง 5.5.3 จะได้ว่า

$$\frac{f(r) - f(p)}{r - p} \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

สำหรับทุก $x, y \in [c, d]$ ที่ $x \neq y$

ให้ $M = \max \left\{ \left| \frac{f(r)-f(p)}{r-p} \right|, \left| \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \right| \right\}$ จะได้ว่า

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \le M$$

สำหรับทุก $x, y \in [c, d]$ ที่ $x \neq y$ หรือ

$$|f(y) - f(x)| \le M|x - y|$$

สำหรับทุก $x, y \in [c, d]$ ซึ่งแสดงว่า f สอดคล้องกับเงื่อนไขลิพชิทซ์บน $[c, d]$ โดยทฤษฎีบท 5.3.8 เราจะได้ว่า f ต่อเนื่องสัมบูรณ์บน $[c, d]$ ตามต้องการ $\square$

จากทฤษฎีบท 5.3.9 เราทราบแล้วว่า ฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์สามารถหาอนุพันธ์ได้เกือบทุกแห่งบนโดเมน เราจึงได้บทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 5.5.5. *ฟังก์ชันคอนเวกซ์เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้เกือบทุกแห่งบนโดเมน*

ถ้า f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บน (a, b) และ $a < x < y < b$ แล้วโดยบทตั้ง 5.5.3 จะได้ว่า

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \le \frac{f(y + k) - f(y)}{k}$$

สำหรับทุกจำนวนจริง h และ k ที่อยู่ใกล้ 0 มากเพียงพอ (เพียงพอที่ $f(x + h)$ และ $f(y + k)$ หาค่าได้) ดังนั้นถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ y แล้วเราจะได้ว่า $f'(x) \le f'(y)$ จากข้อสังเกตนี้ เราสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 5.5.6. *ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่หาอนุพันธ์อันดับสองได้บน (a, b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บน (a, b) ก็ต่อเมื่อ $f''(x) \ge 0$ สำหรับทุก $x \in (a, b)$*

จากสมบัติของฟังก์ชันคอนเวกซ์ เราสามารถพิสูจน์อสมการหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์ได้ ซึ่งอสมการนี้มีชื่อเรียกกันทั่วไปว่า ***อสมการของเจนเซน*** (*Jensen's inequality*) เราสามารถประยุกต์ใช้อสมการของเจนเซนนี้เพื่อให้ได้อสมการต่าง ๆ ที่น่าสนใจอีกมากมาย ดังจะกล่าวถึงในอันดับต่อไป

ทฤษฎีบท 5.5.7 (อสมการของเจนเซน (Jensen's inequality)). *ให้ φ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บนช่วงเปิด I ถ้า f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน $[0,1]$ และ $f(x) \in I$ สำหรับทุก $x \in [0,1]$ แล้วจะได้ว่า*

$$\varphi\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 (\varphi \circ f)$$

บทพิสูจน์ ให้ $y = \int_0^1 f(t)dt$ เนื่องจาก f หาปริพันธ์ได้บน $[0,1]$ จึงได้ว่า $y \in \mathbb{R}$ และเนื่องจาก $f(x) \in I$ สำหรับทุก $x \in [0,1]$ จึงได้ว่า $y \in I$ ต่อไปให้

$$\beta = \sup\left\{\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} : x < y \text{ และ } x \in I\right\}$$

เนื่องจาก I เป็นช่วงเปิด และ $y \in I$ จึงมี $z \in I$ ที่ $z > y$ โดยบทตั้ง 5.5.3 จะได้ว่า

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{z-y}$$

สำหรับทุก $x \in I$ ที่ $x < y$ และทำให้ได้ว่า

$$\beta \leq \frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{z-y}$$

สำหรับทุก $z \in I$ ที่ $z > y$ หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$\varphi(z) \geq \varphi(y) + \beta(z-y)$$

เมื่อ $z \geq y$ และจากนิยามของ β จะได้ว่า

$$\beta \geq \frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z} \quad \text{หรือ} \quad \varphi(z) \geq \varphi(y) + \beta(z-y)$$

สำหรับทุก $z \in I$ ที่ $z < y$ จึงสรุปได้ว่า $\varphi(z) \geq \varphi(y) + \beta(z-y)$ สำหรับทุก $z \in I$ ดังนั้น

$$\varphi\left(f(t)\right) \geq \varphi(y) + \beta(f(t)-y)$$

สำหรับทุก $t \in [0,1]$ และเมื่อหาปริพันธ์ทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\int_0^1 \varphi\left(f(t)\right)dt \geq \varphi(y) + \beta\left(\int_0^1 f(t)dt - y\right) = \varphi(y)$$

เพราะว่า $y = \int_0^1 f(t)dt$ ดังนั้น $\int_0^1 \varphi\left(f(t)\right) dt \geq \varphi\left(\int_0^1 f(t)dt\right)$ ตามต้องการ $\square$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของการประยุกต์ใช้อสมการของเจนเซน ให้ $\varphi(x) = e^x$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บน $\mathbb{R}$ และให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริง นิยามฟังก์ชัน $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ โดย $f(x) = x_k$ เมื่อ $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ และ $f(1) = x_n$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชันขั้นบันได และ

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

ผลจากอสมการของเจนเซน จะได้ว่า

$$\varphi\left(\int_0^1 f\right) = e^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}} \leq \int_0^1 \varphi(f(t))dt = \frac{e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n}}{n}$$

ถ้าให้ $y_k = e^{x_k}$ เราจะได้อสมการ

$$(y_1 y_2 \cdots y_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

ซึ่งเป็นอสมการที่รู้จักกันทั่วไปในชื่อว่า ***อสมการเลขคณิต-เรขาคณิต*** (*AM-GM inequality*) นั่นเอง

แบบฝึกหัด 5.5

1. จงพิสูจน์บทตั้ง 5.5.2 ในส่วน (1) $\Leftrightarrow$ (3)

2. ให้ f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บนช่วงเปิด I และ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ ให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$ โดยที่ $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ จงแสดงว่า

   (i) $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in I$

   (ii) $f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$

3. ให้ f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บนช่วงจำกัด $[a, b)$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตล่าง

4. ให้ $\langle \alpha_n \rangle$ และ $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก โดยที่

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{และ} \quad \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha_n} < \infty$$

จงแสดงว่า

$$\prod_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

เมื่อ $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha_n} = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} x_n^{\alpha_n}$

5. ให้ $f : [0,1] \to (0,\infty)$ เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\int_0^1 \log(f(x))dx$ หาค่าได้ แล้ว

$$\log\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \leq \int_0^1 \log(f(x))dx$$

บทที่ 6

ปริภูมิ L^p

ในบทนี้เราจะศึกษาปริภูมิของฟังก์ชัน f ที่ $|f|^p$ หาปริพันธ์ได้ เมื่อ $p \geq 1$ ซึ่งเมื่อเรากล่าวถึงปริภูมิของเซตใด ๆ นั้น นอกจากตัวเซตเองแล้วยังต้องมีการดำเนินการของสมาชิกในเซตนั้นและต้องมีเครื่องมือที่จะใช้แสดงความสัมพันธ์ของสมาชิกในเซตนั้น ๆ ซึ่งมักจะเกี่ยวกับระยะทาง ขนาด หรือผลต่างของสมาชิกในเซตนั้น ในที่นี้เราจะเรียกเครื่องมือดังกล่าวนั้นว่า ***นอร์ม***

บทนิยาม 6.0.1. *ให้ X เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือฟีลด์ F (เมื่อ F เป็น $\mathbb{R}$ หรือ $\mathbb{C}$) เราจะเรียกฟังก์ชัน $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ ว่า **นอร์ม** (**norm**) ถ้า $\|\cdot\|$ มีสมบัติต่อไปนี้*

1. *$\|x\| \geq 0$ สำหรับทุก $x \in X$ และ $\|x\| = 0$ เมื่อ x เป็นเวกเตอร์ศูนย์เท่านั้น*
2. *$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ สำหรับทุก $x \in X$ และ $\alpha \in F$*
3. *$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ สำหรับทุก $x, y \in X$*

*โดยเราจะเรียก $(X, \|\cdot\|)$ ว่า **ปริภูมินอร์ม** (**normed space**)*

สังเกตว่า สมบัติข้อ (3) นั้นคล้ายกับอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (triangle inequality) ของจำนวนจริง เราจึงเรียกสมบัติข้อนี้ว่า สมบัติอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (triangle inequality property)

สำหรับปริภูมินอร์ม $(X, \|\cdot\|)$ ใด ๆ เราสามารถนิยามเมตริก $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ได้โดยกำหนดให้

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

สำหรับแต่ละ $x, y \in X$ ซึ่งสามารถตรวจสอบได้ไม่ยากว่า d เป็นเมตริก เราเรียก (X, d) นี้ว่า ***ปริภูมิอิงระยะทางที่เหนี่ยวนำโดยนอร์ม*** $\|\cdot\|$ (***metric space induced by norm*** $\|\cdot\|$)

ในที่นี้เราสนใจศึกษากรณีที่ X เป็นปริภูมิของฟังก์ชัน $f : [0,1] \to \bar{\mathbb{R}}$ เหนือฟีลด์ $\mathbb{R}$ โดยที่ f มีค่าเป็นจำนวนจริงเกือบทุกแห่งบน $[0,1]$ เนื่องจากฟังก์ชันในที่นี้อาจมีค่าเป็น $-\infty$ หรือ ∞ ดังนั้นในการแสดงว่า X เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือ $\mathbb{R}$ ภายใต้การบวกของฟังก์ชันและการคูณด้วยจำนวนจริงนั้น เราต้องแก้ปัญหากรณีที่ $f, g \in X$ โดย $f(x_0) = \infty$ และ $g(x_0) = -\infty$ สำหรับบาง $x_0 \in [0,1]$ แล้วเราจะนิยามให้ $(f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = \infty - \infty$ มีค่าเป็นอะไร ซึ่งปัญหานี้จะเกิดขึ้นบนเซตที่มีเมเชอร์เป็นศูนย์เท่านั้น เพื่อแก้ปัญหานี้เราจะต้องมีข้อตกลงเกี่ยวกับการเท่ากันของฟังก์ชันเสียก่อน โดยเราจะกล่าวว่า $f = g$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = g(x)$ เกือบทุกแห่งบนโดเมน นั่นคือ

$$f = g \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad m(\{x \in [0,1] : f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

ด้วยข้อตกลงนี้ เราจะตกลงว่า $f + g$ คือฟังก์ชันที่มีค่าเท่ากับ $f(x) + g(x)$ เกือบทุก x ใน $[0,1]$ โดยที่ไม่ต้องสนใจว่า $(f+g)(x_0) = \infty - \infty$ จะมีค่าเป็นอะไร (เราจะนิยามให้มีค่าเป็นเท่าใดก็ได้ โดยจะไม่มีผลต่อการศึกษาที่จะเกิดขึ้น) และเพื่อความสะดวกเรายังใช้ข้อตกลงเดิม คือให้ $0 \cdot \infty = 0$

หมายเหตุ หากจะกล่าวให้ถูกต้องแล้ว สมาชิกในปริภูมิ X ของฟังก์ชัน $f : [0,1] \to \bar{\mathbb{R}}$ นั้นไม่ใช่ฟังก์ชัน แต่เป็นชั้นสมมูล (equivalence class) ของฟังก์ชันภายใต้ความสัมพันธ์การเท่ากันเกือบทุกแห่งบน $[0,1]$ เช่น ฟังก์ชันคงตัวศูนย์ใน X คือ ชั้นสมมูลของฟังก์ชันที่เท่ากับ 0 เกือบทุกแห่งบน $[0,1]$ เป็นต้น

6.1 ปริภูมิ L^∞

ให้ L^∞ เป็นเซตของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ $f : [0,1] \to \bar{\mathbb{R}}$ ที่มี $M > 0$ ที่ทำให้

$$m\left(\{x \in [0,1] : |f(x)| > M\}\right) = 0$$

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า L^∞ คือเซตของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ที่มีขอบเขตเกือบทุกแห่งบน $[0,1]$ ดังนั้น ทุกฟังก์ชันเมเชอร์ได้ที่มีขอบเขตเป็นสมาชิกใน L^∞ แต่ $f(x) = x^{-1}$ ไม่อยู่ใน L^∞ เป็นต้น เราสามารถแสดงได้ไม่ยากว่า L^∞ เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือ $\mathbb{R}$ ภายใต้การบวกของฟังก์ชันและการคูณด้วยจำนวนจริงตามปกติ

ต่อไปเราจะนิยามนอร์มบน L^∞ โดยให้ $\|\cdot\|_\infty : L^\infty \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : m(\{x \in [0,1] : |f(x)| > M\}) = 0\}$$

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า $\|f\|_\infty$ คือจำนวนจริงค่าน้อยสุดที่ $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ เกือบทุกแห่งบน $[0,1]$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $\|\cdot\|_\infty$ สอดคล้องกับเงื่อนไขข้อ (1) และ (2) ของนอร์ม สำหรับเงื่อนไขข้อ (3) นั้นสามารถแสดงได้ไม่ยากดังนี้ ให้ $f, g \in L^\infty$ จะได้ว่า $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ และ $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ เกือบทุกแห่งบน $[0,1]$ ทำให้ได้ว่า

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

เกือบทุกแห่งบน $[0,1]$ ดังนั้น

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

จึงได้ว่า $\|\cdot\|_\infty$ เป็นนอร์มบน L^∞ ตามต้องการ ซึ่งอสมการมีชื่อเรียกว่า ***Minkowski Inequality*** สำหรับ L^∞

6.2 ปริภูมิ L^p เมื่อ $1 \leq p < \infty$

ในหัวข้อนี้ p เป็นจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1 และให้ L^p เป็นเซตของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ $f : [0,1] \to \bar{\mathbb{R}}$ ที่

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty$$

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า L^p เป็นเซตของฟังก์ชันเมเชอร์ได้ f ที่ $|f|^p$ หาปริพันธ์ได้บน $[0,1]$ เนื่องจากโดเมนของฟังก์ชันที่จะพิจารณาในบทนี้คือ $[0,1]$ เพื่อความสะดวกเราอาจเขียนแทน $\int_0^1 |f(x)|^p dx$ ด้วย $\int |f|^p$

เราสามารถแสดงได้ว่า L^p เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือ $\mathbb{R}$ ดังนี้ สำหรับ $f \in L^p$ และ $\alpha \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\int |\alpha f|^p = |\alpha|^p \int |f|^p < \infty$$

จึงได้ว่า L^p มีสมบัติปิดภายใต้การคูณด้วยจำนวนจริง

ต่อไปจะแสดงว่า ถ้า $g \in L^p$ แล้ว $f + g \in L^p$ ก่อนอื่นสังเกตว่า $\varphi(x) = x^p$ เป็นฟังก์ชัน

คอนเวกซ์บน $[0,\infty)$ เมื่อ $p \geq 1$ ดังนั้น สำหรับทุก $a, b \in [0,\infty)$ จะได้ว่า

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}$$

หรือ $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$ เมื่อแทน a และ b ด้วย $|f|$ และ $|g|$ ตามลำดับ จะได้

$$|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq 2^{p-1}\left(|f|^p+|g|^p\right)$$

ทำให้ได้ว่า

$$\int |f+g|^p \leq 2^{p-1}\left(\int |f|^p + \int |g|^p\right) < \infty$$

ซึ่งแสดงว่า L^p มีสมบัติปิดภายใต้การบวก และเพียงพอที่จะสรุปว่า L^p เป็นปริภูมิเวกเตอร์เหนือ $\mathbb{R}$ ตามต้องการ

เราจะนิยามนอร์มบน L^p ดังนี้ สำหรับ $f \in L^p$ นิยามให้

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{1/p}$$

เห็นได้ชัดว่า $\|\cdot\|_p$ มีสมบัติสอดคล้องกับข้อ (1) และ (2) ของนอร์ม เพื่อแสดงว่า $\|\cdot\|_p$ เป็นนอร์มบน L^p เรายังต้องพิสูจน์ว่า $\|\cdot\|_p$ มีสมบัติอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม ซึ่งในการพิสูจน์นั้น เราต้องใช้ความจริงต่อไปนี้

บทตั้ง 6.2.1. *ให้ $x, y \in [0,\infty)$ และ $\alpha \in (0,1)$ จะได้ว่า*

$$x^\alpha y^{(1-\alpha)} \leq \alpha x + (1-\alpha)y$$

โดยอสมการจะเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

บทพิสูจน์ ก่อนอื่นสังเกตว่า บทตั้งเป็นจริง ถ้า $x = 0$ หรือ $y = 0$

ต่อไปพิจารณากรณี $x, y > 0$ ซึ่งจะได้ว่า มีจำนวนจริง s และ t ที่ $x = e^s$ และ $y = e^t$ เนื่องจากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์แท้ จึงได้ว่า

$$e^{\alpha s+(1-\alpha)t} < \alpha e^s + (1-\alpha)e^t$$

สำหรับทุก $s, t \in \mathbb{R}$ ที่ $s \neq t$ และทุก $\alpha \in (0,1)$ ยกเว้นกรณี $s = t$ เท่านั้นที่อสมการจะเป็น

สมการ เมื่อแทนค่า $e^s = x$ และ $e^t = y$ ในอสมการข้างต้น จะได้บทตั้งตามต้องการ $\square$

ต่อจากนี้ไป เพื่อความสะดวกเราจะกำหนดให้ $\frac{1}{\infty}$ มีค่าเท่ากับ 0

ทฤษฎีบท 6.2.2 (Hölder Inequality). *ให้ $p \in [1,\infty)$ และ $q \in (1,\infty]$ โดยที่ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ถ้า $f \in L^p$ และ $g \in L^q$ แล้ว $fg \in L^1$ และ*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

สำหรับกรณี $p > 1$ จะได้ว่า

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง s และ t โดยอย่างน้อยหนึ่งตัวไม่เป็นศูนย์ ที่ทำให้ $s|f|^p = t|g|^q$ เกือบทุกแห่ง

บทพิสูจน์ กรณี $p = 1$ ให้ $f \in L^1$ และ $g \in L^\infty$ เนื่องจาก $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ เกือบทุก x จึงได้ว่า

$$\int |fg| \leq \|g\|_\infty \int |f| = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$

ดังนั้น ทฤษฎีบทเป็นจริงในกรณีนี้

ต่อไปพิจารณากรณี $p > 1$ ให้ $f \in L^p$ และ $g \in L^q$ เห็นได้ว่า ทฤษฎีบทเป็นจริงถ้า $f(x) = 0$ หรือ $g(x) = 0$ เกือบทุกแห่ง จึงไม่เสียนัยทั่วไปที่จะสมมติว่า $\|f\|_p > 0$ และ $\|g\|_q > 0$

ให้ $x = \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p$, $y = \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q$ และ $\alpha = \frac{1}{p}$ จากบทตั้ง 6.2.1 และจาก $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ จะได้ว่า

$$x^\alpha y^{(1-\alpha)} = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q \qquad (6.1)$$

เมื่อหาปริพันธ์ทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \qquad (6.2)$$

หรือ $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q$ ตามต้องการ

เนื่องจากทุกพจน์ในอสมการ (6.1) มีค่าไม่เป็นลบ จึงได้ว่า อสมการ (6.2) จะเป็นสมการได้ ก็ต่อเมื่อ ค่าทั้งสองข้างของอสมการ (6.1) เท่ากันเกือบทุกแห่ง ซึ่งจากบทตั้ง 6.2.1 จะได้ว่า ค่าทั้งสองข้างของอสมการ (6.1) เท่ากันเกือบทุกแห่ง ก็ต่อเมื่อ

$$\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p = \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q$$

เกือบทุกแห่งบน $[0,1]$ ดังนั้น อสมการ (6.2) จะเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p = \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q$ เกือบทุกแห่ง จึงสรุปได้ว่า

$$\|fg\|_1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

ก็ต่อเมื่อ $s|f|^p = t|g|^q$ เกือบทุกแห่ง โดยที่ $s = \frac{1}{\|f\|_p^p}$ และ $t = \frac{1}{\|g\|_q^q}$ เมื่อ $\|f\|_p\|g\|_q > 0$ □

ตัวอย่างอสมการที่ได้จากการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 6.2.2 คือ อสมการ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

เมื่อ $\langle a_n \rangle$ และ $\langle b_n \rangle$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่งเป็นอสมการที่รู้จักกันทั่วไปในชื่อ Cauchy-Schwarz inequality นั่นเอง

ทฤษฎีบท 6.2.3 (Minkowski Inequality)**.** *สำหรับ f และ g ใน L^p เมื่อ $1 \leq p < \infty$ จะได้ว่า*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

ในกรณี $1 < p < \infty$ จะได้ว่า

$$\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$$

ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ s และ t โดยอย่างน้อยหนึ่งตัวไม่เท่ากับศูนย์ ที่ทำให้ $sf = tg$ เกือบทุกแห่ง

บทพิสูจน์ กรณี $p = 1$ สามารถพิสูจน์ได้ไม่ยาก จึงขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด

ให้ $1 < p < \infty$ และ $f, g \in L^p$ เห็นได้ชัดว่า ทฤษฎีบทเป็นจริงถ้า $f = 0$ หรือ $g = 0$ หรือ $f + g = 0$ เกือบทุกแห่ง จึงสมมติให้ $\|f\|_p > 0, \|g\|_p > 0$ และ $\|f+g\|_p > 0$

จากอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int |f+g|^p &\le \int |f+g|^{p-1}\left(|f|+|g|\right)\\ &= \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g|\end{aligned} \tag{6.3}$$

ให้ $q = \frac{p}{p-1}$ จะได้ว่า $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ เนื่องจาก $(f+g)\in L^p$ และ

$$\int |f+g|^{(p-1)q} = \int |f+g|^p < \infty$$

จึงได้ว่า $|f+g|^{p-1}\in L^q$ จากทฤษฎีบท 6.2.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int |f+g|^{p-1}|f| = \||f+g|^{p-1}f\|_1 &\le \|f\|_p\||f+g|^{p-1}\|_q \\ &= \|f\|_p\left(\int |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \|f\|_p\left(\int |f+g|^{p}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \|f\|_p\left(\|f+g\|_p\right)^{\frac{p}{q}}\end{aligned} \tag{6.4}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\int |f+g|^{p-1}|g| \le \|g\|_p\left(\|f+g\|_p\right)^{\frac{p}{q}} \tag{6.5}$$

จากอสมการ (6.4) และอสมการ (6.5) ทำให้เขียนอสมการ (6.3) ได้เป็น

$$\|f+g\|_p^p \le \|f\|_p\left(\|f+g\|_p\right)^{\frac{p}{q}} + \|g\|_p\left(\|f+g\|_p\right)^{\frac{p}{q}}$$

หรือ

$$\|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} = \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

ตามต้องการ

สังเกตว่า อสมการในทฤษฎีบทจะเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ อสมการ (6.3), (6.4) และ (6.5) จะต้องเป็นสมการพร้อมกัน เราจึงต้องหาเงื่อนไขที่ทั้งสามอสมการจะเป็นสมการพร้อมกัน โดย

อสมการ (6.3) จะเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $|f+g| = |f| + |g|$ เกือบทุกแห่ง ซึ่งเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ f และ g มีค่าเป็นบวกหรือลบเหมือนกันเกือบทุกแห่ง (ยกเว้นค่าใดค่าหนึ่งเป็นศูนย์) และจากทฤษฎีบท 6.2.2 จะได้ว่า อสมการ (6.4) จะเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง s_1 และ t_1 โดยอย่างน้อยหนึ่งตัวไม่เป็นศูนย์ ที่ทำให้

$$s_1|f|^p = t_1|f+g|^p \tag{6.6}$$

เกือบทุกแห่ง และอสมการ (6.5) จะเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง s_2 และ t_2 โดยอย่างน้อยหนึ่งตัวไม่เป็นศูนย์ ที่ทำให้

$$s_2|g|^p = t_2|f+g|^p \tag{6.7}$$

เกือบทุกแห่ง

ถ้า $sf = tg$ เกือบทุกแห่ง สำหรับบางจำนวนจริงบวก s และ t (ในที่นี้ $\|f\|_p > 0$ และ $\|g\|_p > 0$) แล้วจะได้ว่า มีจำนวนจริงบวก s_1, s_2, t_1 และ t_2 ที่สอดคล้องกับสมการ (6.6) และสมการ (6.7) ซึ่งจะทำให้อสมการ (6.3), (6.4) และอสมการ (6.5) เป็นสมการพร้อมกัน ในอีกด้านหนึ่งถ้าอสมการ (6.3), (6.4) และอสมการ (6.5) เป็นสมการพร้อมกัน เราจะได้ว่า มีจำนวนจริงบวก s_1, s_2, t_1 และ t_2 ที่สอดคล้องกับสมการ (6.6) และสมการ (6.7) ทำให้ได้ว่า

$$s_1|f|^p = t_1|f+g|^p = \frac{t_1}{t_2}\left(t_2|f+g|^p\right) = \frac{t_1}{t_2}\left(s_2|g|^p\right)$$

ซึ่งแสดงว่ามีจำนวนจริงบวก s และ t ที่ทำให้ $s|f| = t|g|$ เกือบทุกแห่ง และเนื่องจาก f และ g ต้องมีค่าเป็นบวกหรือลบเหมือนกันเกือบทุกแห่ง (ยกเว้นค่าหนึ่งค่าใดเป็นศูนย์) จึงได้ว่า $sf = tg$ เกือบทุกแห่ง ซึ่งเป็นอันเสร็จสิ้นการพิสูจน์ $\square$

ผลจากทฤษฎีบท 6.2.3 เราสรุปได้ว่า

ทฤษฎีบท 6.2.4. *$(L^p, \|\cdot\|_p)$ เป็นปริภูมินอร์ม เมื่อ $1 \leq p \leq \infty$*

แบบฝึกหัด 6.2

1. ให้ $f \in L^1$ และ $g \in L^1$ จงแสดงว่า

$$\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$$

2. ให้ $1 \leq p < q \leq \infty$ จงแสดงว่า $L^q \subsetneq L^p$

3. ให้ $1 \leq p < \infty$ และให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0,1]$ จงพิสูจน์ว่า

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$$

4. ให้ $p, q, r \geq 1$ โดยที่ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ และให้ $f \in L^p$ และ $g \in L^q$ จงแสดงว่า $fg \in L^r$ และ

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

5. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และให้ $p_1, p_2, \ldots, p_n, r \geq 1$ โดยที่ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$ จงแสดงว่า ถ้า $f_k \in L^{p_k}$ สำหรับแต่ละ $k = 1, 2, \ldots, n$ แล้ว $f_1 f_2 \cdots f_n \in L^r$ และ

$$\|f_1 f_2 \cdots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}$$

6. สำหรับ $1 \leq p < \infty$ ให้ l^p แทนเซตของลำดับของจำนวนจริง $\langle x_n \rangle$ ที่ $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ และให้ l^∞ แทนเซตของลำดับของจำนวนจริงที่มีขอบเขต ถ้า $\langle x_n \rangle \in l^p$ เราให้

$$\|\langle x_n \rangle\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

และถ้า $\langle x_n \rangle \in l^\infty$ เราให้

$$\|\langle x_n \rangle\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

จงแสดงว่า

(i) ให้ $1 \leq p \leq \infty$ ถ้า $\langle x_n \rangle \in l^p$ และ $\langle y_n \rangle \in l^p$ แล้ว $\langle x_n + y_n \rangle \in l^p$ และ

$$\|\langle x_n + y_n \rangle\|_p \leq \|\langle x_n \rangle\|_p + \|\langle y_n \rangle\|_p$$

(ii) ถ้า $\langle x_n \rangle \in l^p$ และ $\langle y_n \rangle \in l^q$ เมื่อ $1 \leq p < \infty$ และ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ แล้ว

$$\|\langle x_n y_n \rangle\|_1 \leq \|\langle x_n \rangle\|_p \cdot \|\langle y_n \rangle\|_q$$

6.3 การลู่เข้าและความบริบูรณ์

ให้ $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับในปริภูมินอร์ม $(X, \| \cdot \|)$ เราจะกล่าวว่า $\langle x_n \rangle$ เป็น***ลำดับลู่เข้า*** (***convergent sequence***) ถ้ามี $x \in X$ ที่

$$\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \| = 0$$

และเราจะกล่าวว่า x_n ลู่เข้าสู่ x หรือ x เป็นลิมิตของ $\langle x_n \rangle$ ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $x = \lim x_n$ หรือ $x_n \to x$ เราจะกล่าวว่า $\langle x_n \rangle$ เป็น***ลำดับโคชี*** (***Cauchy sequence***) ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$\| x_n - x_m \| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก } m, n \geq N$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า บทนิยามของลำดับโคชีนี้เหมือนกับบทนิยามของลำดับโคชีของจำนวนจริง แตกต่างกันเพียงแค่เครื่องหมายนอร์ม $\| \cdot \|$ กับค่าสัมบูรณ์ $| \cdot |$ เท่านั้น สำหรับปริภูมิใด ๆ นั้นเราจะกล่าวว่าเป็น***ปริภูมิบริบูรณ์*** (***complete space***) ถ้าทุกลำดับโคชีในปริภูมินั้นเป็นลำดับลู่เข้า ซึ่งในกรณีของปริภูมินอร์มนั้น เราจะเรียกปริภูมินอร์มที่บริบูรณ์ว่า ***ปริภูมิบานาค*** (***Banach space***)

ทฤษฎีบท 6.3.1. *$(L^\infty, \| \cdot \|_\infty)$ เป็นปริภูมิบานาค*

บทพิสูจน์ ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับโคชีใน L^∞ เราจะต้องแสดงว่า f_n ลู่เข้าสู่บาง f ใน L^∞
สำหรับแต่ละ $k \in \mathbb{N}$ ให้ N_k เป็นจำนวนนับที่

$$\| f_n - f_m \|_\infty < 2^{-k} \quad \text{สำหรับทุก } m, n \geq N_k$$

สำหรับแต่ละคู่ $m, n \geq N_k$ ให้

$$A_{k,m,n} = \{x \in [0,1] : |f_n(x) - f_m(x)| \geq 2^{-k}\}$$

เนื่องจาก $\| f_n - f_m \|_\infty < 2^{-k}$ จึงได้ว่า $m\left(A_{k,m,n}\right) = 0$ จากสมบัติการบวกนับได้จะได้ว่า

$$A_k = \bigcup_{m,n \geq N_k} A_{k,m,n}$$

มีเมเชอร์เป็น 0 ดังนั้น $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ เป็นเซตเมเชอร์ศูนย์

ต่อไปจะแสดงว่า $\langle f_n(x) \rangle$ เป็นลำดับโคชีสำหรับทุก $x \in [0,1] - A$ ให้ $\varepsilon > 0$ และให้ k เป็นจำนวนนับที่ $2^{-k} < \varepsilon$ ถ้า $x \in [0,1] - A$ เราจะได้ว่า $x \notin A_k$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$|f_n(x) - f_m(x)| < 2^{-k} < \varepsilon \tag{6.8}$$

สำหรับทุก $m, n \geq N_k$ ดังนั้น $\langle f_n(x) \rangle$ เป็นลำดับโคชีเมื่อ $x \in [0,1] - A$ และ $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$ หาค่าได้สำหรับทุก $x \in [0,1] - A$

เรานิยาม $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ โดยให้

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & \text{เมื่อ } x \in [0,1] - A \\ 0 & \text{เมื่อ } x \in A \end{cases}$$

ต่อไปจะแสดงว่า f_n ลู่เข้าสู่ f แบบเอกรูปบน $[0,1] - A$ นั่นคือ จะแสดงว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนนับ N ที่ทำให้ถ้า $n \geq N$ แล้ว $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ สำหรับทุก $[0,1] - A$ ให้ $\varepsilon > 0$ และให้ k เป็นจำนวนนับที่ $2^{-k} < \varepsilon$ จากอสมการ (6.8) จะได้ว่า ถ้า $x \in [0,1] - A$ และ $m \geq N_k$ แล้ว

$$\big|f(x) - f_m(x)\big| = \big|\lim_{n\to\infty} f_n(x) - f_m(x)\big| \leq 2^{-k} < \varepsilon \tag{6.9}$$

เนื่องจาก $m(A) = 0$ จึงกล่าวได้ว่า $\| f_n - f \|_\infty < \varepsilon$ สำหรับทุก $m \geq N_k$
ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_\infty = 0$ นอกจากนี้จากอสมการ (6.9) เราได้ว่า

$$\big|f(x)\big| < \varepsilon + \big|f_{N_k}(x)\big| \leq \varepsilon + \| f_{N_k} \|_\infty$$

เกือบทุกแห่งบน $[0,1]$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\| f \|_\infty \leq \varepsilon + \| f_{N_k} \|_\infty$$

ดังนั้น $f \in L^\infty$ □

บทนิยาม 6.3.2. *ให้ $\langle x_n \rangle$ เป็นลำดับในปริภูมินอร์ม $(X, \|\cdot\|)$ เราจะกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็น* ***อนุกรมลู่เข้า*** (***convergent series***) *ถ้าลำดับของผลบวกย่อยลู่เข้าบางสมาชิก s ใน X นั่นคือ*

มี $s \in X$ ที่

$$s = \lim_{N\to\infty} S_N$$

เมื่อ $S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$ โดยจะเขียนแทนด้วย $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$ และจะกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็น ***อนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์*** *(**absolutely convergent series**) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า*

ทฤษฎีบท 6.3.3. *ปริภูมินอร์ม $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมิบานาค ก็ต่อเมื่อ ทุกอนุกรมที่ลู่เข้าสัมบูรณ์เป็นอนุกรมลู่เข้า*

บทพิสูจน์ $(\Rightarrow)$ สมมติให้ $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมิบานาค และ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ ถ้า $n > m$ จะได้ว่า

$$\|S_n - S_m\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|$$

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$ จึงมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $\sum_{k=m}^{\infty} \|x_k\| < \varepsilon$ สำหรับทุก $m \ge N$ ดังนั้น ถ้า $n > m \ge N$ แล้ว $\|S_n - S_m\| < \varepsilon$ ซึ่งเป็นการแสดงว่า $\langle S_n\rangle$ เป็นลำดับโคชี และเนื่องจาก $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมิบริบูรณ์ จึงได้ว่า $\langle S_n\rangle$ ลู่เข้าสู่บางสมาชิก s ใน X ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ อนุกรมลู่เข้าสู่ s

$(\Leftarrow)$ สมมติว่า ทุกอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์เป็นอนุกรมลู่เข้า
ให้ $\langle x_n\rangle$ เป็นลำดับโคชีของสมาชิกใน X และให้ n_1 เป็นจำนวนนับที่ถ้า $m, n \ge n_1$ แล้ว

$$\|x_n - x_m\| < 2^{-1}$$

สำหรับแต่ละจำนวนนับ $k \ge 2$

ให้ n_k เป็นจำนวนนับที่มากกว่า n_{k-1} และ $\|x_n - x_m\| < 2^{-k}$ สำหรับทุก $m, n \ge n_k$ ซึ่งจะได้ว่า $\langle x_{n_k}\rangle_{k=1}^{\infty}$ เป็นลำดับย่อยของ $\langle x_n\rangle$ ที่

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$$

สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$ ให้ $y_1 = x_{n_1}$ และ $y_{k+1} = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ เมื่อ $k \ge 1$ ซึ่งจะได้ว่า $\langle y_k\rangle$ เป็นลำดับใน X และ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| < \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty$$

ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์ จึงมี $s \in X$ ที่ $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = s$
เนื่องจาก $\sum_{k=1}^{j} y_k = x_{n_j}$ จึงได้ว่า

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} y_k = s$$

ดังนั้น $\langle x_{n_k}\rangle_{k=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าสู่ s

ต่อไปจะแสดงว่า $\langle x_n\rangle$ ลู่เข้าสู่ s เช่นกัน ให้ $\varepsilon > 0$ และให้ N_1 และ N_2 เป็นจำนวนนับที่

$$\|x_{n_k} - s\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{และ} \quad \|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

สำหรับทุก $n_k \geq N_1$ และสำหรับทุก $m, n \geq N_2$ ตามลำดับ ถ้าให้ n_k เป็นจำนวนนับที่มากกว่า $\max\{N_1, N_2\}$ แล้วจะได้ว่า

$$\|x_n - s\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - s\| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $n \geq n_k$ ซึ่งเป็นการแสดงว่า $x_n \to s$ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 6.3.4 (Riesz-Fischer Theorem). *ปริภูมิ* $(L^p, \|\cdot\|_p)$ *เป็นปริภูมิบานาค เมื่อ* $1 \leq p < \infty$

บทพิสูจน์ ให้ $1 \leq p < \infty$ และ $\langle f_n\rangle$ เป็นลำดับใน L^p และโดยไม่เสียนัยทั่วไปสมมติให้แต่ละ f_n เป็นฟังก์ชันค่าจริง เราจะแสดงว่า ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสัมบูรณ์แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

สมมติให้ $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p = M < \infty$ สำหรับแต่ละ n ให้

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$$

ซึ่งจะได้ว่า $g_n \in L^p$ และโดยทฤษฎีบท 6.2.3 จะได้ว่า $\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leq M$ หรือ

$$\int g_n^p \leq M^p$$

เนื่องจาก $\langle g_n\rangle$ เป็นลำดับเพิ่มของฟังก์ชันที่ค่าไม่เป็นลบ จึงได้ว่า $\lim_{n\to\infty} g_n(x) \in [0, \infty]$

นิยาม $g : [0, 1] \to [0, \infty]$ โดย

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$$

โดยทฤษฎีบท 4.4.6 (Fatou's Lemma) จะได้ว่า

$$\int g^p \leq \liminf \int g_n^p \leq M^p$$

ดังนั้น $g \in L^p$ และ g มีค่าเป็นจำนวนจริงเกือบทุกแห่ง ทำให้ได้ว่า อนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ ลู่เข้าเกือบทุกแห่ง ให้ $A \subset [0, 1]$ ที่ $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ ลู่ออก ซึ่งจะได้ว่า A มีเมเชอร์เป็นศูนย์

ให้ $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ และให้ $s : [0, 1] \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$s(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) & \text{ถ้า } x \in [0, 1] - A \\ 0 & \text{ถ้า } x \in A \end{cases}$$

จะได้ว่า $s_n \in L^p$ และ $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$ เกือบทุกแห่ง เนื่องจาก $|s| \leq g$ จึงได้ว่า $s \in L^p$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \|s_n - s\|_p = 0$ เนื่องจาก

$$|s_n - s|^p \leq (|s_n| + |s|)^p \leq (2g)^p$$

และ $|s_n - s| \to 0$ เกือบทุกแห่ง โดยทฤษฎีบท 4.5.8 (Lebesgue Convergence Theorem) จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \int |s_n - s|^p = \int \lim_{n\to\infty} |s_n - s|^p = 0$$

หรือ $\lim_{n\to\infty} \|s_n - s\|_p^p = 0$ ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \|s_n - s\|_p = 0$ ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 6.3

1. จงแสดงว่า ทุกลำดับที่ลู่เข้าในปริภูมินอร์มเป็นลำดับโคชี

2. ให้ C เป็นเซตของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, 1]$ จงแสดงว่า

   (i) $(C, \|\cdot\|_\infty)$ เป็นปริภูมิบานาค

(ii) $(C, \|\cdot\|_1)$ ไม่เป็นปริภูมิบานาค

3. ให้ $C^1[0,1]$ เป็นเซตของฟังก์ชัน f ซึ่งหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[0,1]$ และ f' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0,1]$ จงแสดงว่า $(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ไม่เป็นปริภูมิบานาค

4. จงแสดงว่า $(l^p, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมิบานาคเมื่อ $1 \leq p \leq \infty$

5. ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับใน L^p เมื่อ $1 \leq p < \infty$ และ $f \in L^p$ สมมติว่า $\langle f_n \rangle$ ลู่เข้าสู่ f เกือบทุกแห่ง จงพิสูจน์ว่า $\langle f_n \rangle$ ลู่เข้าสู่ f ใน L^p ก็ต่อเมื่อ $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$

6. ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเมเชอร์ได้และมีขอบเขตบนช่วง $[0,1]$ สมมติว่า $\langle f_n \rangle$ ลู่เข้าแบบเอกรูปสู่ฟังก์ชันมีขอบเขต f บนช่วง $[0,1]$ จงพิสูจน์ว่า $\langle f_n \rangle$ ลู่เข้าสู่ f ใน L^p สำหรับทุก $1 \leq p < \infty$

7. จงยกตัวอย่างลำดับ $\langle f_n \rangle$ ใน L^p เมื่อ $1 \leq p < \infty$ ที่ $\langle f_n \rangle$ ลู่เข้าสู่บางฟังก์ชัน f ใน L^p เกือบทุกแห่ง แต่ $\langle f_n \rangle$ ไม่ลู่เข้าสู่ f ใน L^p

8. จงยกตัวอย่างลำดับ $\langle f_n \rangle$ และฟังก์ชัน f ใน L^p เมื่อ $1 \leq p < \infty$ ที่ $\langle f_n \rangle$ ลู่เข้าสู่ f ใน L^p แต่ $\langle f_n(x) \rangle$ ไม่ลู่เข้าสู่ $f(x)$ สำหรับแต่ละ $x \in [0,1]$

9. ให้ $\langle f_n \rangle$ เป็นลำดับใน L^p เมื่อ $1 < p < \infty$ และ $f \in L^p$ สมมติว่า $\langle f_n \rangle$ ลู่เข้าสู่ f เกือบทุกแห่ง และมีจำนวนจริงบวก M ที่ $\|f\|_p \leq M$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $g \in L^q$ เมื่อ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ แล้ว
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n g = \int fg$$

6.4 ฟังก์ชันนัลเชิงเส้นมีขอบเขต

ให้ $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมินอร์มเหนือฟิลด์ $\mathbb{R}$ เราจะเรียกฟังก์ชันค่าจริง F บนโดเมน X ว่า ***ฟังก์ชันนัล*** (*functional*) และจะกล่าวว่า F เป็น***ฟังก์ชันนัลเชิงเส้น*** (*linear functional*) ถ้า
$$F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$$

สำหรับทุก $f, g \in X$ และทุก $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า F เป็น***ฟังก์ชันนัลมีขอบเขต*** (***bounded functional***) ถ้ามีจำนวนจริง M ที่ทำให้

$$|F(f)| \leq M\|f\|$$

สำหรับทุก$f \in X$ ในกรณีที่ F เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้น เราจะได้ว่า $F(\bar{0}) = 0$ และ $\|f\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $f = \bar{0}$ เท่านั้น เมื่อ $\bar{0}$ เป็นเอกลักษณ์การบวกในปริภูมิ X ดังนั้น ฟังก์ชันนัลเชิงเส้น F มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ มี $M \geq 0$ ที่ทำให้

$$\frac{|F(f)|}{\|f\|} \leq M$$

สำหรับทุก$f \in X$ ที่ $f \neq \bar{0}$

ให้ $\mathcal{B}(X)$ เป็นเซตของฟังก์ชันนัลเชิงเส้นมีขอบเขตบน X ทั้งหมด เราแสดงได้ไม่ยากว่า $\mathcal{B}(X)$ เป็นปริภูมิเชิงเส้นเหนือ $\mathbb{R}$ นั่นคือ ถ้า $F, G \in \mathcal{B}(X)$ และ $\alpha \in \mathbb{R}$ แล้ว $F + G \in \mathcal{B}(X)$ และ $\alpha F \in \mathcal{B}(X)$ ต่อไปเราจะนิยามนอร์ม $\| \cdot \|$ บน $\mathcal{B}(X)$ ดังนี้
สำหรับ $F \in \mathcal{B}(X)$ กำหนดให้

$$\|F\| = \sup\left\{\frac{|F(f)|}{\|f\|} : f \in X \text{ และ } \|f\| \neq 0\right\}$$

จากบทนิยามเราจะได้ว่า $|F(f)| \leq \|F\| \cdot \|f\|$ สำหรับทุก $f \in X$ จาก F เป็นฟังก์ชันนัลมีขอบเขต จึงได้ว่า $0 \leq \|F\| < \infty$

สำหรับ $f \in X$ ที่ $\|f\| \neq 0$ เราจะได้ว่า

$$\left\|\frac{f}{\|f\|}\right\| = \frac{1}{\|f\|} \cdot \|f\| = 1$$

และ

$$\frac{|F(f)|}{\|f\|} = \left|\frac{F(f)}{\|f\|}\right| = \left|F\left(\frac{f}{\|f\|}\right)\right|$$

เราจึงสามารถเขียนบทนิยามของ $\|F\|$ ได้อีกแบบเป็น

$$\|F\| = \sup_{\|f\|=1} |F(f)|$$

เราสามารถตรวจสอบได้ไม่ยากว่า $\|\cdot\|$ ที่นิยามดังข้างต้นนั้นเป็นนอร์มบน $\mathcal{B}(X)$ นั่นคือ

1. $\|F\| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $F = 0$ (นั่นคือ $F(f) = 0$ สำหรับทุก $f \in X$)

2. $\|\alpha F\| = |\alpha|\|F\|$ สำหรับทุก $\alpha \in \mathbb{R}$

3. $\|F + G\| \leq \|F\| + \|G\|$ สำหรับทุก $F, G \in \mathcal{B}(X)$

ทฤษฎีบท 6.4.1. *ถ้า F เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นมีขอบเขตบน X แล้ว F ต่อเนื่องเอกรูปบน X*

บทพิสูจน์ ขอละการพิสูจน์ไว้เป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 6.4.2. $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$ *เป็นปริภูมิบานาค*

บทพิสูจน์ ให้ $\langle F_n \rangle$ เป็นลำดับโคชีของสมาชิกใน $\mathcal{B}(X)$ นั่นคือ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ถ้า $m, n \geq N$ แล้ว

$$\|F_n - F_m\| < \varepsilon$$

ให้ $x \in X$ เนื่องจาก

$$|F_n(x) - F_m(x)| \leq \|F_n - F_m\| \cdot \|x\|$$

จึงได้ว่า $\langle F_n(x) \rangle$ เป็นลำดับโคชีของจำนวนจริง ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ เป็นจำนวนจริง เรานิยาม $F : X \to \mathbb{R}$ โดยให้

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$$

จากสมบัติของลิมิต เราสามารถตรวจสอบได้ไม่ยากว่า F เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้น

ต่อไปเราจะแสดงว่า F เป็นฟังก์ชันนัลมีขอบเขต และ $\|F - F_n\| \to 0$
ให้ N เป็นจำนวนนับที่ $\|F_n - F_m\| < 1$ สำหรับทุก $n, m \geq N$ ซึ่งจะได้ว่า

$$|\|F_n\| - \|F_N\|| \leq \|F_n - F_N\| < 1$$

ดังนั้น $\|F_n\| < 1 + \|F_N\|$ สำหรับทุก $n \geq N$ ทำให้ได้ว่าถ้า $x \in X$ และ $\|x\| = 1$ แล้ว

$$|F(x)| = \lim_{n\to\infty} |F_n(x)| \leq \limsup \|F_n\| \leq 1 + \|F_N\|$$

ดังนั้น F เป็นฟังก์ชันนัลมีขอบเขต

ให้ $\varepsilon > 0$ และ N_0 เป็นจำนวนนับที่ทำให้

$$\|F_n - F_m\| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $m, n \geq N_0$ ให้ $x \in X$ ที่มี $\|x\| = 1$ จะได้ว่า ถ้า $n \geq N_0$ แล้ว

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &= \left|F_n - \lim_{m\to\infty} F_m(x)\right| = \lim_{m\to\infty} |F_n(x) - F_m(x)| \\ &\leq \lim_{m\to\infty} \|F_n - F_m\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\|F_n - F\| \leq \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N_0$ ซึ่งเป็นการแสดงว่า $\|F - F_n\| \to 0$ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 6.4.3. *ถ้ามี $x_0 \in X$ ที่ฟังก์ชันนัลเชิงเส้น F ต่อเนื่องที่ x_0 แล้ว F เป็นฟังก์ชันนัลมีขอบเขต*

บทพิสูจน์ ให้ F เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นที่ต่อเนื่องที่ x_0 และให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่ามี $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$$

สำหรับทุก $x \in X$ ที่ $\|x - x_0\| < \delta$

สำหรับแต่ละ $y \in X$ ที่ $\|y\| < \delta$ พิจารณาให้ $x = y + x_0$ เราจะได้ว่า $\|x - x_0\| < \delta$ และจาก $F(\bar{0}) = 0$ จะได้ว่า

$$|F(y) - F(\bar{0})| = |F(x - x_0)| = |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$$

ดังนั้น F ต่อเนื่องที่ $\bar{0}$ และ $|F(y)| < \varepsilon$ สำหรับทุก $y \in X$ ที่ $\|y\| < \delta$

สำหรับแต่ละ $x \in X$ ที่ $\|x\| = 1$ ให้ $y = \frac{\delta}{2}x$ จะได้ว่า $\|y\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ และ

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|=1} |F(x)| &= \sup_{\|x\|=1} \left|\frac{1}{\delta/2} \cdot F\left(\frac{\delta x}{2}\right)\right| = \frac{2}{\delta} \cdot \sup_{\|y\|=\delta/2} |F(y)| \\ &\leq \frac{2}{\delta} \cdot \sup_{\|y\|<\delta} |F(y)| \leq \frac{2}{\delta} \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{2\varepsilon}{\delta}$ เป็นค่าคงตัว จึงได้ว่า F เป็นฟังก์ชันนัลมีขอบเขตตามต้องการ □

บทแทรก 6.4.4. *ถ้าฟังก์ชันนัลเชิงเส้น F ต่อเนื่องที่บาง x_0 ใน X แล้ว F ต่อเนื่องเอกรูปบน X*

บทพิสูจน์ เป็นผลโดยตรงจากทฤษฎีบท 6.4.3 และทฤษฎีบท 6.4.1 □

สำหรับ $a \in \overline{\mathbb{R}}$ เราให้

$$sgn(a) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } a \geq 0 \\ -1 & \text{ถ้า } a < 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 6.4.5. *ให้ $1 \leq p, q \leq \infty$ โดยที่ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ให้ $g \in L^q$ และ F เป็นฟังก์ชันบน L^p ที่นิยามโดย*

$$F(f) = \int fg$$

จะได้ว่า F เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นมีขอบเขต และ $\|F\| = \|g\|_q$

บทพิสูจน์ การแสดงว่า F เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นนั้นขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด จากทฤษฎีบท 6.2.2 จะได้ว่า

$$|F(f)| = \left|\int fg\right| \leq \int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

จึงได้ว่า F เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นมีขอบเขตและ $\|F\| \leq \|g\|_q$

ต่อไปเราจะต้องแสดงว่า $\|F\| \geq \|g\|_q$ โดยแยกพิจารณาเป็นสามกรณีดังนี้

<u>กรณี $p = 1$</u> ให้ $\varepsilon > 0$ และ $A = \{x \in [0,1] : |g(x)| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon\}$ จะได้ว่า $m(A) > 0$ นิยาม $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ โดยให้

$$f(x) = \frac{\chi_A(x)}{m(A)} \cdot sgn(g(x))$$

เราจะได้ว่า

$$\|f\|_1 = \int \frac{\chi_A}{m(A)} = 1$$

และ

$$|F(f)| = \int fg = \frac{1}{m(A)} \int |g| \cdot \chi_A = \frac{1}{m(A)} \int_A |g| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$$

ทำให้ได้ว่า $\|F\| \geq |F(f)| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$ เนื่องจาก ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จึงได้ว่า $\|F\| \geq \|g\|_\infty$ ตามต้องการ

กรณี $1 < p < \infty$ นิยาม $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ โดยให้

$$f(x) = |g(x)|^{q/p} \cdot sgn(g(x))$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$|f|^p = |g|^q = fg$$

ดังนั้น $f \in L^p$, $\|f\|_p = \|g\|_q^{q/p}$ และ

$$|F(f)| = \int fg = \int |f|^p = \|f\|_p^p = \|f\|_p \|g\|_q$$

ซึ่งแสดงว่า $\|F\| \geq \|g\|_q$ ตามต้องการ

กรณี $p = \infty$ ให้ $f(x) = sgn(g(x))$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $f \in L^\infty$ และ $\|f\|_\infty = 1$ นอกจากนี้

$$|F(f)| = \int fg = \int |g| = \|g\|_1$$

จึงได้ว่า $\|F\| \geq \|g\|_q$ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบท 6.4.6. *ให้ g เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บน $[0,1]$ และ $1 \leq p < \infty$ ถ้ามีจำนวนจริง N ที่*

$$\left| \int fg \right| \leq N\|f\|_p$$

สำหรับทุกฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขต f แล้ว $g \in L^q$ และ $\|g\|_q \leq N$ เมื่อ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

บทพิสูจน์ ให้ N เป็นจำนวนจริงที่ $\left|\int fg\right| \leq N\|f\|_p$ สำหรับทุกฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขต f เราแยกการพิสูจน์เป็นสองกรณีดังนี้

กรณี $p = 1$ ให้ $\varepsilon > 0$ และ $E = \{x \in [0,1] : |g(x)| \geq N+\varepsilon\}$ นิยามฟังก์ชัน $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ โดยให้

$$f(x) = sgn(g(x)) \cdot \chi_E(x)$$

ซึ่งเห็นได้ชัดว่า f ฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขต นอกจากนี้ยังได้ว่า

$$\|f\|_1 = \int |f| = \int \chi_E = m(E)$$

และ

$$\int fg = \int |g|\chi_E \geq (N+\varepsilon)m(E) \tag{6.10}$$

จากเงื่อนไขของ N จะได้ว่า $\int fg \leq N\|f\|_1 = Nm(E)$ ซึ่งเมื่อรวมกับอสมการ (6.10) จะได้

$$Nm(E) \geq (N+\varepsilon)m(E)$$

ดังนั้น $m(E) = 0$ หรือกล่าวคือ $|g(x)| < N + \varepsilon$ เกือบทุกแห่ง ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\|g\|_\infty \leq N + \varepsilon$$

เนื่องจาก ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จึงได้ว่า $\|g\|_\infty \leq N$ ตามต้องการ

<u>กรณี $1 < p < \infty$</u> สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ เรานิยามฟังก์ชัน $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ โดยให้

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{เมื่อ } |g(x)| \leq n \\ 0 & \text{เมื่อ } |g(x)| > n \end{cases}$$

และนิยามฟังก์ชัน $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ โดยให้

$$f_n(x) = |g_n(x)|^{q/p} \cdot sgn(g(x))$$

ซึ่งจะได้ว่า $g_n \in L^q$ และ f_n เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขต

นอกจากนี้ยังได้ว่า $\|f_n\|_p^p = \|g_n\|_q^q$ และ

$$\|g_n\|_q^q = \int f_n g_n \leq \int f_n g \leq N\|f_n\|_p = N\|g_n\|_q^{q/p}$$

เนื่องจาก $q - \frac{q}{p} = 1$ จึงได้ว่า $\|g_n\|_q \leq N$ โดยทฤษฎีบท 4.4.6 (Fatou's Lemma) จะได้ว่า

$$\int |g|^q \leq \liminf \int |g_n|^q = \liminf \|g_n\|_q^q \leq N^q$$

ทำให้ได้ว่า $g \in L^q$ และ $\|g\|_q \leq N$ ตามต้องการ $\square$

บทตั้ง 6.4.7. *ให้ $f \in L^p$ เมื่อ $1 \le p < \infty$ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขต g ที่ $\|f - g\|_p < \varepsilon$*

บทพิสูจน์ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ นิยามฟังก์ชัน $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ โดยให้

$$f_n(x) = \begin{cases} N & \text{เมื่อ } f(x) > N \\ f(x) & \text{เมื่อ } -N \le f(x) \le N \\ -N & \text{เมื่อ } f(x) < -N \end{cases}$$

ซึ่งเห็นได้ชัดว่า f_n เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขต และ $|f - f_n|^p \to 0$ เกือบทุกแห่ง เนื่องจาก $|f - f_n|^p \le |f|^p$ โดยทฤษฎีบท 4.5.8 (Lebesgue Convergence Theorem) จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int |f - f_n|^p = \int \lim_{n\to\infty} |f - f_n|^p = 0$$

ดังนั้น สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ $\|f - f_n\|_p < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \ge N$ □

บทตั้ง 6.4.8. *ให้ $f \in L^p$ เมื่อ $1 \le p < \infty$ สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีฟังก์ชันขั้นบันได ψ และฟังก์ชันต่อเนื่อง g บน $[0,1]$ ที่ $\|f - \psi\|_p < \varepsilon$ และ $\|f - g\|_p < \varepsilon$*

บทพิสูจน์ ให้ $\varepsilon > 0$ จากบทตั้ง 6.4.7 จะได้ว่า มีฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขต f_N ที่

$$\|f - f_N\|_p < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{และ} \quad |f_N(x)| \le N$$

บน $[0,1]$ โดยทฤษฎีบท 3.4.18 จะได้ว่า มีฟังก์ชันขั้นบันได ψ และเซต $E \subset [0,1]$ ที่

$$m(E) < \left(\frac{\varepsilon}{8N}\right)^p \quad \text{และ} \quad |f_N(x) - \psi(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

บน $[0,1] - E$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \|f_N - \psi\|_p^p &= \int_0^1 |f_N - \psi|^p \\ &= \int_{[0,1]-E} |f_N - \psi|^p + \int_E |f_N - \psi|^p \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p + (2N)^p \cdot m(E) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \end{aligned}$$

นั่นคือ $\|f_N - \psi\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ ดังนั้น

$$\|f - \psi\|_p \leq \|f - f_N\|_p + \|f_N - \psi\|_p < \varepsilon$$

สำหรับการแสดงว่า มีฟังก์ชันต่อเนื่อง g ที่ $\|f - g\|_p < \varepsilon$ นั้น ขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบท 6.4.9 (Riesz Representation Theorem). *ให้ $1 \leq p < \infty$ ถ้า F เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นมีขอบเขตบน L^p แล้วจะมีฟังก์ชัน g ใน L^q เมื่อ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ที่ทำให้*

$$F(f) = \int fg$$

สำหรับทุก $f \in L^p$ นอกจากนี้ยังได้ว่า $\|F\| = \|g\|_q$

บทพิสูจน์ ให้ F เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นมีขอบเขตบน L^p เห็นได้ชัดว่า ทฤษฎีบทเป็นจริงถ้า F เป็นฟังก์ชันคงตัวศูนย์ จึงสมมติให้ $\|F\| > 0$

สำหรับแต่ละ $s \in [0, 1]$ ให้ $\chi_s = \chi_{[0,s]}$ และนิยามฟังก์ชัน $\Phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ โดยให้

$$\Phi(s) = F(\chi_s)$$

ก่อนอื่นจะแสดงว่า Φ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์
ให้ $\varepsilon > 0$ และ $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{\|F\|}\right)^p$ และให้ $0 \leq s_1 < s_1' \leq s_2 < s_2' \leq \cdots \leq s_n < s_n' \leq 1$ โดยที่ $\sum_{k=1}^n (s_k' - s_k) < \delta$ นิยามฟังก์ชัน $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ โดยให้

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\chi_{s_k'}(x) - \chi_{s_k}(x)\right) \cdot sgn\left(\Phi(s_k') - \Phi(s_k)\right)$$

เห็นได้ชัดว่า $f \in L^p$ เนื่องจาก

$$\chi_{s_k'}(x) - \chi_{s_k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x \in (s_k, s_k'] \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin (s_k, s_k'] \end{cases}$$

จึงได้ว่า

$$\int |f|^p \leq \int \left(\sum_{k=1}^{n} |\chi_{s_k'} - \chi_{s_k}|\right)^p = \sum_{k=1}^{n} \int |\chi_{s_k'} - \chi_{s_k}| = \sum_{k=1}^{n} (s_k' - s_k) < \delta$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $\|f|\|_p < \delta^{1/p} = \frac{\varepsilon}{\|F\|}$ เนื่องจาก F เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้น จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} F(f) &= \sum_{k=1}^{n} sgn\left(\Phi(s_k') - \Phi(s_k)\right)\big(F(\chi_{s_k'}) - F(\chi_{s_k})\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} sgn\left(\Phi(s_k') - \Phi(s_k)\right)\big[\Phi(s_k') - \Phi(s_k)\big] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \big|\Phi(s_k') - \Phi(s_k)\big| \end{aligned}$$

และจาก $F(f) \leq \|F\| \cdot \|f\|_p$ จะได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{n} \big|\Phi(s_k') - \Phi(s_k)\big| \leq \|F\| \cdot \|f\|_p < \|F\| \left(\frac{\varepsilon}{\|F\|}\right) = \varepsilon$$

ซึ่งเป็นการแสดงว่า Φ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสัมบูรณ์ตามต้องการ

โดยทฤษฎีบท 5.4.5 จะได้ว่า มีฟังก์ชันเมชอร์ได้ $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ที่

$$\Phi(s) = \int_0^s g(t)dt$$

สำหรับทุก $s \in [0,1]$ (นั่นคือ ฟังก์ชัน g ที่ $g = \Phi'$ เกือบทุกแห่งบน $[0,1]$) ซึ่งจะได้ว่า

$$F(\chi_s) = \Phi(s) = \int_0^1 g \cdot \chi_s$$

ให้ ψ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบน $[0,1]$ ซึ่งทำให้ได้ว่า มี $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n \leq 1$ และ $c_k \in \mathbb{R}$ ที่ $\psi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{s_k}$ เกือบทุกแห่งบน $[0,1]$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(\psi) &= \sum_{k=1}^{n} c_k F(\chi_{s_k}) = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_0^1 g \cdot \chi_{s_k} \\ &= \int_0^1 g \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{s_k}\right) = \int_0^1 g \cdot \psi \end{aligned}$$

ดังนั้น $F(\psi) = \int g \cdot \psi$ สำหรับทุกฟังก์ชันขั้นบันได ψ

ให้ f เป็นฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขตบน $[0,1]$ และให้ $\langle \psi_n \rangle$ เป็นลำดับเพิ่มของฟังก์ชันขั้นบันไดที่ลู่เข้าสู่ f เกือบทุกแห่งบน $[0,1]$ โดยทฤษฎีบท 4.3.4 (Bounded Convergence Theorem) จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \|f-\psi_n\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int |f-\psi_n|^p = 0$$

เนื่องจาก $|F(f)-F(\psi_n)| = |F(f-\psi_n)| \leq \|F\| \cdot \|f-\psi_n\|_p$ จึงได้ว่า

$$F(f) = \lim_{n\to\infty} F(\psi_n)$$

โดยทฤษฎีบท 4.5.8 (Lebesgue Convergence Theorem) จะได้ว่า

$$\int fg = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n g = \lim_{n\to\infty} F(\psi_n) = F(f)$$

ดังนั้น $F(f) = \int fg$ สำหรับทุกฟังก์ชันเมเชอร์ได้มีขอบเขต f บน $[0,1]$ นอกจากนี้โดยทฤษฎีบท 6.4.6 จะได้ว่า $g \in L^q$

ให้ f เป็นฟังก์ชันใน L^p และ $\varepsilon > 0$ โดยบทตั้ง 6.4.8 จะได้ว่า มีฟังก์ชันขั้นบันได ψ ที่ $\|f-\psi\|_p < \varepsilon$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\left|F(f) - \int fg\right| &= \left|F(f) - F(\psi) + \int \psi \cdot g - \int fg\right| \\
&\leq \left|F(f-\psi)\right| + \left|\int (\psi - f)\cdot g\right| \\
&\leq \|F\| \cdot \|f-\psi\|_p + \|g\|_q \cdot \|f-\psi\|_p \\
&< (\|F\| + \|g\|_q)\,\varepsilon
\end{aligned}$$

และ ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จึงได้ว่า $F(f) = \int fg$
ดังนั้น $F(f) = \int fg$ สำหรับทุก $f \in L^p$ และโดยทฤษฎีบท 6.4.5 จะได้ว่า $\|F\| = \|g\|_q$ ตามต้องการ □

แบบฝึกหัด 6.4

1. ให้ F เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นมีขอบเขตบนปริภูมินอร์ม $(X, \|\cdot\|)$ จงแสดงว่า

$$\|F\| = \inf\{M \in \mathbb{R} : |F(x)| \leq M\|x\| \;\text{ สำหรับทุก } x \in X\}$$

2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.4.1

3. ให้ $f \in L^p$ เมื่อ $1 \leq p < \infty$ และให้ $\varepsilon > 0$ จงแสดงว่า มีฟังก์ชัน g ที่ต่อเนื่องบน $[0,1]$ และ $\|f-g\|_p < \varepsilon$

4. ให้ $1 \leq p, q \leq \infty$ โดยที่ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ให้ $g \in L^q$ และ F เป็นฟังก์ชันบน L^p ที่นิยามโดย

$$F(f) = \int fg$$

จงแสดงว่า F เป็นฟังก์ชันนัลเชิงเส้นมีขอบเขตบน L^p

5. ให้ $1 \leq p < \infty$ และ $\varepsilon > 0$ จงแสดงว่า สำหรับแต่ละ $f \in L^p$ จะมีฟังก์ชันต่อเนื่อง g บน $[0,1]$ ที่ $\|f-g\|_p < \varepsilon$

6. ให้ $g \in L^1$ จงแสดงว่า มี $f \in L^\infty$ ที่ทำให้

$$\int fg = \|g\|_1 \|f\|_\infty$$

7. ให้ $g \in L^\infty$ จงแสดงว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมี $f \in L^1$ ที่ทำให้

$$\int fg = (\|g\|_\infty - \varepsilon)\|f\|_1$$

8. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน g ในทฤษฎีบท 6.4.9 มีเพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้น นั่นคือ ถ้า $g, h \in L^q$ ซึ่ง

$$F(f) = \int fg \quad \text{และ} \quad F(f) = \int fh$$

สำหรับทุก $f \in L^p$ แล้ว $g = h$ เกือบทุกแห่งบน $[0,1]$
(คำแนะนำ : พิจารณา $f = |g-h|^{q-2}(g-h)$)

ภาคผนวก

สัจพจน์และหลักการที่สมมูลกับสัจพจน์การเลือก

ในภาคผนวกนี้จะนำเสนอสัจพจน์และหลักการที่สมมูลกับสัจพจน์การเลือกพร้อมทั้งการพิสูจน์

บทนิยาม 1. *ให้ E เป็นเซต เราเรียกความสัมพันธ์ "$\preceq$" บน E ว่า* ***การจัดอันดับบางส่วน*** *(**partial ordering**) ถ้า $\preceq$ มีสมบัติดังต่อไปนี้*

1. *สมบัติสะท้อน (reflexive property) นั่นคือ $a \preceq a$ สำหรับทุก $a \in E$*

2. *สมบัติถ่ายทอด (transitive property) นั่นคือ สำหรับทุก $a, b, c \in E$ ถ้า $a \preceq b$ และ $b \preceq c$ แล้ว $a \preceq c$*

*เราเรียกการจัดอันดับบางส่วน $\preceq$ ว่ามี**สมบัติปฏิสมมาตร** (**antisymmetric property**) ถ้าสำหรับทุก $a, b \in E$ ที่ $a \preceq b$ และ $b \preceq a$ แล้ว $a = b$*

*เราเรียกการจัดอันดับบางส่วน $\preceq$ ว่า **การจัดอันดับทุกส่วน** (**total ordering**) และเรียก E ว่า **เซตอันดับทุกส่วน** (**totally ordered set**) ถ้าสำหรับทุก $a, b \in E$ เรามี $a \preceq b$ หรือ $b \preceq a$ และเราเรียกการจัดอันดับทุกส่วนที่มีสมบัติปฏิสมมาตรว่า **การจัดอันดับเชิงเส้น** (**linear ordering**) และเรียก E ว่า **เซตอันดับเชิงเส้น** (**linearly ordered set**)*

สังเกตว่า สำหรับการจัดอันดับ $\preceq$ ที่ไม่มีสมบัติปฏิสมมาตร ถ้าเรามี $a \preceq b$ และ $b \preceq a$ เราจะไม่สามารถสรุปได้ว่า $a = b$ เพื่อความสะดวกในกรณีที่ $a \preceq b$ แต่ $a \neq b$ เราจะเขียนแทนด้วย $a \prec b$

บทนิยาม 2. *ให้ $\preceq$ การจัดอันดับบางส่วนบน E และให้ $z \in E$ เราเรียก z ว่า*

1. ***สมาชิกค่ามากสุด** (**greatest element**) ถ้า $y \preceq z$ สำหรับทุก $y \in E$ และถ้ามี $y \in E$ ที่ $z \preceq y$ แล้ว $z = y$*

2. ***สมาชิกค่าน้อยสุด*** (*least element*) *ถ้า $z \preceq y$ สำหรับทุก $y \in E$ และถ้ามี $y \in E$ ที่ $y \preceq z$ แล้ว $z = y$*

3. ***สมาชิกใหญ่สุด*** (*maximal element*) *ถ้ามี $y \in E$ ที่ $z \preceq y$ แล้ว $y \preceq z$*

4. ***สมาชิกเล็กสุด*** (*minimal element*) *ถ้ามี $y \in E$ ที่ $y \preceq z$ แล้ว $z \preceq y$*

สังเกตว่า z ที่เป็นสมาชิกใหญ่สุดไม่จำเป็นต้องมีความสัมพันธ์การจัดอันดับกับสมาชิกทุกตัวใน E แต่เมื่อใดที่มี $y \in E$ ที่มีความสัมพันธ์การจัดอันดับกับ z แล้วเราต้องได้ $y \preceq z$ แต่อาจจะเป็น $z \preceq y$ ด้วยก็ได้ โดยที่ z ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ y (ถ้า $\preceq$ ไม่มีสมบัติปฏิสมมาตร) สำหรับสมาชิกเล็กสุดนั้นเราก็จะได้ความจริงในทำนองเดียวกันกับสมาชิกใหญ่สุด

บทนิยาม 3. *ให้ $\preceq$ เป็นการจัดอันดับบางส่วนบนเซต E และให้ $S \subset E$ เราจะเรียกสมาชิก z ใน E ว่า*

1. ***ขอบเขตบน*** (*upper bound*) *ของ S ถ้า $y \preceq z$ สำหรับทุก $y \in S$*

2. ***ขอบเขตบนน้อยสุด*** (*least upper bound*) *ของ S ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $lub(S)$ ถ้า z เป็นขอบเขตบนของ S และ $z \preceq y$ สำหรับทุก y ที่เป็นขอบเขตบนของ S*

3. ***ขอบเขตล่าง*** (*lower bound*) *ของ S ถ้า $z \preceq y$ สำหรับทุก $y \in S$*

4. ***ขอบเขตล่างมากสุด*** (*greatest lower bound*) *ของ S ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $glb(S)$ ถ้า z เป็นขอบเขตล่างของ S และ $y \preceq z$ สำหรับทุก y ที่เป็นขอบเขตล่างของ S*

ตัวอย่างเช่น ให้ X เป็นเซต และให้ $E = P(X)$ เราจะได้ว่า ความสัมพันธ์ "$\subset$" เป็นการจัดอันดับบางส่วนบน E ที่มีสมบัติปฏิสมมาตร และมี X เป็นทั้งสมาชิกค่ามากสุดและสมาชิกใหญ่สุด และถ้า $S \subset E$ เราจะได้ว่า S มีขอบเขตบนน้อยสุด คือเซต $A = \bigcup_{B \in S} B$ เป็นต้น

บทนิยาม 4. *ให้ $\preceq$ เป็นการจัดอันดับเชิงเส้นบนเซต E เราจะเรียก $\preceq$ ว่า* ***การจัดอันดับดี*** (*well-ordering*) *ถ้าทุก $S \subset E$ ที่ไม่ใช่เซตว่างมีสมาชิกค่าน้อยสุดอยู่ใน S และจะเรียก E ว่า* ***เซตอันดับดี*** (*well-ordered set*)

สังเกตว่า เซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของเซตอันดับดียังคงเป็นเซตอันดับดีภายใต้การจัดอันดับเดียวกัน

บทนิยาม 5. *ให้ $\preceq$ เป็นการจัดอันดับดีบนเซต B และ $A \subset B$ เราจะเรียก A ว่า* ***ส่วนเริ่มต้น*** (*initial segment*) *ของ B ถ้าทุก $z \in B - A$ เป็นขอบเขตบนของ A และเราใช้สัญลักษณ์ $A \preceq B$ แทน A เป็นส่วนเริ่มต้นของ B*

หลักการต่อไปนี้เป็นหลักการที่สมมูลกับสัจพจน์การเลือก

หลักการสูงสุดของเฮาส์ดอฟฟ์ (The Hausdorff Maximal Principle). *ให้ $\preceq$ เป็นการจัดอันดับบางส่วนบนเซต E ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง แล้วจะมีเซตย่อย A ที่เป็นเซตอันดับทุกส่วนที่ใหญ่สุด และจะมีเซตย่อย A' ที่เป็นเซตอันดับเชิงเส้นที่ใหญ่สุด*

บทตั้งของซอร์น (Zorn's lemma). *ให้ $\preceq$ เป็นการจัดอันดับบางส่วนบนเซต E ซึ่งไม่ใช่เซตว่าง ถ้าทุกเซตย่อยที่เป็นเซตอันดับทุกส่วนมีขอบเขตบนใน E แล้ว E มีสมาชิกใหญ่สุด*

หลักการจัดอันดับดี (The Well-Ordering Principle

ทุกเซตจะมีการจัดอันดับที่เป็นการจัดอันดับดี

เราจะใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ในการพิสูจน์ว่า หลักการทั้งสามข้างต้นนั้นสมมูลกับสัจพจน์การเลือก

ทฤษฎีบท 1. *ให้ E เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $\preceq$ เป็นการจัดอันดับบางส่วนที่มีสมบัติปฏิสมมาตรบน E ให้ $f : E \to E$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติว่า $x \preceq f(x)$ สำหรับทุก $x \in E$ ถ้าทุกเซตย่อยของ E ที่ไม่ใช่เซตว่างและเป็นเซตอันดับดีเป็นเซตมีขอบเขตบนน้อยสุดใน E แล้ว f จะมีจุดตรึง (fixed point) กล่าวคือ จะมี $c \in E$ ที่ $f(c) = c$*

บทพิสูจน์ สมมติให้ทุกเซตย่อยของ E ที่ไม่ใช่เซตว่างและเป็นเซตอันดับดีเป็นเซตมีขอบเขตบนน้อยสุดใน E

ให้ $\beta \notin E$ และกำหนดให้ $a \prec \beta$ สำหรับทุก $a \in E$ ให้ $\alpha \in E$ และให้

$$W = \{A \subset E : A \text{ เป็นเซตอันดับดีที่มี } \alpha \text{ เป็นสมาชิกค่าน้อยสุด } \}$$

สังเกตว่า $W \neq \emptyset$ เพราะ $\{\alpha\} \in W$ นอกจากนั้นถ้า $A \in W$ และ $c \in A$ โดยที่ $\alpha \neq c$ แล้ว เซต $\{x \in A : x \prec c\} \in W$

นิยามฟังก์ชัน $g : W \cup \{\emptyset\} \to E \cup \{\beta\}$ โดยให้ $g(\emptyset) = \alpha$ และ

$$g(A) \text{ เป็นสมาชิกค่าน้อยสุดของเซต } \{lub(A), f(lub(A)), \beta\} - A$$

เมื่อ $A \in W$ สังเกตว่า $A \subsetneq A \cup \{g(A)\}$ เราจะเรียก $A \in W$ ว่า ***เซตดี*** ถ้า

$$g(\{x \in A : x \prec c\}) = c \qquad \text{สำหรับทุก } c \in A$$

สังเกตว่าถ้า A เป็นเซตดี และ $g(A) \in E$ แล้ว $A \cup \{g(A)\}$ จะเป็นเซตดี

ต่อไปจะแสดงว่า ถ้า C เป็นเซตดีและ A_j เป็นเซตดีที่ $A_j \preceq C$ สำหรับทุก j ในเซตดัชนี $\mathcal{I}$ แล้ว $F = \bigcup_{j\in\mathcal{I}} A_j$ เป็นเซตดี และ $F \preceq C$ ก่อนอื่นสังเกตว่า $A_j \subset C$ ดังนั้น $F \subset C$ และ F เป็นเซตอันดับดีที่มี α เป็นสมาชิกค่าน้อยสุด จึงได้ว่า $F \in W$ ถ้า $y \in F$ ดังนั้น $y \in A_j$ สำหรับบางเซตดี A_j เนื่องจาก $A_j \preceq C$ จึงได้ว่าถ้า $x \in C$ และ $x \preceq y$ แล้ว $x \in A_j$ ทำให้ได้ว่า

$$g\left(\{x \in F : x \prec y\}\right) = g\left(\{x \in A_j : x \prec y\}\right) = y$$

ซึ่งแสดงว่า F เป็นเซตดี นอกจากนั้นยังได้ว่า $F \preceq C$ ตามต้องการ

ต่อไปจะแสดงว่า ถ้า C และ D เป็นเซตดี แล้ว $C \preceq D$ หรือ $D \preceq C$
ให้ F เป็นยูเนียนของเซตดี A ทั้งหมดที่ $A \preceq C$ และ $A \preceq D$ แล้วจะได้ว่า F เป็นเซตดีที่ใหญ่ที่สุดที่ $F \preceq C$ และ $F \preceq D$ เราต้องการแสดงว่า $F = C$ หรือไม่ก็ $F = D$ ให้ $F' = F \cup \{g(F)\}$ ถ้า $C - F \neq \emptyset$ แล้วจะมีสมาชิกค่าน้อยสุด $c \in C - F$ ซึ่งจะได้ว่า $a \prec c$ สำหรับทุก $a \in F$ นั่นคือ $F = \{a \in C : a \prec c\}$ เนื่องจาก C เป็นเซตดี จึงได้ว่า $c = g(F)$ และทำให้ได้ว่า F' เป็นเซตดี และ $F' \preceq C$ ในทำนองเดียวกันถ้า $D - F \neq \emptyset$ จะได้ว่า F' เป็นเซตดี และ $F' \preceq D$ แต่ F เป็นเซตดีที่ใหญ่ที่สุดที่เป็นส่วนเริ่มต้นของ C และ D จึงต้องได้ว่า $F = C$ หรือไม่ก็ $F = D$ ตามต้องการ

ให้ G เป็นยูเนียนของเซตดีทั้งหมดที่อยู่ใน W เราจะแสดงว่า G เป็นเซตดี ให้ $B \subset G$ เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และให้ $c, d \in B$ แล้วจะมีเซตดี C และ D ที่ $c \in C$ และ $d \in D$ จากข้างต้นเราจะได้ว่า $C \preceq D$ หรือ $D \preceq C$ ดังนั้นถ้า $d \in B$ และ $d \preceq c$ เราจะได้ว่า $d \in C$ ซึ่งแสดงว่า $\{d \in B : d \preceq c\} \subset C$ และ B มีสมาชิกค่าน้อยสุด เราจึงได้ว่า $G \in W$ ต่อไปให้ $B = G$ แล้วสำหรับแต่ละ $c \in G$ จะได้ว่า $c = lub(\{a \in G : a \prec c\})$ ดังนั้น $c = g\left(\{a \in G : a \prec c\}\right)$ สำหรับแต่ละ $c \in G$ ซึ่งจะได้ว่า G เป็นเซตดี

ดังนั้น G เป็นเซตดีที่ใหญ่ที่สุด และ $G \cup \{g(G)\}$ ไม่สามารถเป็นเซตดี ซึ่งแสดงว่า $g(G) \notin E$ ดังนั้น $g(G) = \beta$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $f(lub(G)) = lub(G)$ ดังนั้น $lub(G)$ เป็นจุดตรึงของ f $\square$

ทฤษฎีบท 2. *หลักการทั้ง 4 หลักการต่อไปนี้สมมูลกัน*

1. *สัจพจน์การเลือก*

2. *หลักการสูงสุดของเฮาส์ดอฟฟ์*

3. *บทตั้งของซอร์น*

4. *หลักการจัดอันดับดี*

บทพิสูจน์ ***จะแสดงว่า*** **(1)** $\Rightarrow$ **(2)** ให้ $\mathcal{F}$ เป็นเซตที่ประกอบด้วยเซตย่อยของ E ที่เป็นเซตอันดับทุกส่วน สังเกตว่าความสัมพันธ์ "$\subset$" เป็นการจัดอันดับบางส่วนบน $\mathcal{F}$ ที่มีสมบัติปฏิสมมาตร สำหรับแต่ละ $A \in \mathcal{F}$ ให้

$$S_A = \begin{cases} \{B \in \mathcal{F} : A \subsetneq B\} & \text{ถ้า } \{B \in \mathcal{F} : A \subsetneq B\} \neq \emptyset \\ \{A\} & \text{ถ้า } \{B \in \mathcal{F} : A \subsetneq B\} = \emptyset \end{cases}$$

โดยสัจพจน์การเลือก จะมี $f : \mathcal{F} \to \{S_A : A \in \mathcal{F}\}$ ที่ $f(A) \in S_A$ ดังนั้น $A \subset f(A)$ สำหรับทุก $A \in \mathcal{F}$

ให้ S เป็นเซตย่อยของ $\mathcal{F}$ ที่ไม่ใช่เซตว่างและ S เป็นเซตอันดับเชิงเส้นภายใต้ $\subset$ และให้ $G_S = \bigcup_{A \in S} A$ แล้วจะได้ว่า G_S เป็นเซตอันดับทุกส่วน ดังนั้น $G_S \in \mathcal{F}$ นอกจากนี้ยังได้ว่า G_S เป็นขอบเขตบนน้อยสุดของ S ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่ามี $A \in \mathcal{F}$ ที่ทำให้ $f(A) = A$ ซึ่งแสดงว่า A เป็นเซตย่อยของ E ที่ใหญ่สุดที่เป็นเซตอันดับทุกส่วน

โดยใช้การให้เหตุผลทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า มีเซตย่อย A' ที่ใหญ่สุดที่เป็นเซตอันดับเชิงเส้น

จะแสดงว่า **(2)** $\Rightarrow$ **(3)** จากหลักการสูงสุดของเฮาส์ดอฟฟ์ จะมีเซต A ที่เป็นเซตย่อยใหญ่สุดที่เป็นเซตอันดับทุกส่วน ให้ x เป็นขอบเขตบนของ A เราจะแสดงว่า x เป็นสมาชิกใหญ่สุดของ E ให้ $y \in E$ และ $x \preceq y$ แล้วจะได้ว่า $A \cup \{y\}$ เป็นเซตอันดับทุกส่วน แต่เนื่องจาก A เป็นเซตใหญ่สุดที่เป็นเซตอันดับทุกส่วน จึงได้ว่า $y \in A$ เนื่องจาก x เป็นขอบเขตบนของ A จึงได้ว่า $y \preceq x$ แสดงว่าเมื่อใดก็ตามที่ $x \preceq y$ จะต้องได้ว่า $y \preceq x$ ด้วย ทำให้ได้ว่า x เป็นสมาชิกใหญ่สุดตามต้องการ

จะแสดงว่า **(3)** $\Rightarrow$ **(4)** ให้ E เป็นเซตที่ $E \neq \emptyset$ และ $\mathcal{F}$ เป็นเซตของคู่อันดับ $(A, \leq_A)$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ A เป็นเซตย่อยของ E และ $\leq_A$ เป็นการจัดอันดับดีบน A (สังเกตว่าเซต A เซตหนึ่งอาจจะสัมพันธ์กับการจัดอันดับดีมากกว่าหนึ่งการจัดอันดับก็เป็นได้ ซึ่งในกรณีที่มีมากกว่าหนึ่งความสัมพันธ์ ตัวดัชนีใน $\leq_A$ อาจจะก่อให้เกิดความสับสนได้ แต่ปัญหาดังกล่าวมิได้ส่งผลกระทบต่อการพิสูจน์ที่จะเกิดขึ้นต่อไปนี้)

ต่อไปจะนิยามการจัดอันดับบางส่วน $\preceq$ บน $\mathcal{F}$ ดังนี้
ให้ $(A, \leq_A)$ และ $(B\ \leq_B)$ เป็นสมาชิกใน $\mathcal{F}$ เราจะให้ $(A, \leq_A) \preceq (B\ \leq_B)$ ถ้ามีสมบัติสอดคล้องกับทั้ง 3 ข้อต่อไปนี้

(i) $A \subset B$

(ii) $\leq_A = \leq_B$ บน A กล่าวคือ สำหรับ $x, y \in A$ ถ้า $x \leq_A y$ แล้ว $x \leq_B y$

(iii) สำหรับทุก $x \in A$ ถ้า $y \in B - A$ แล้ว $x \leq_B y$

ในการแสดงว่า $\preceq$ เป็นการจัดอันดับบางส่วนนั้น เราต้องตรวจสอบสมบัติสะท้อนและสมบัติถ่ายทอด ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $\preceq$ มีสมบัติสะท้อน ต่อไปสมมติให้

$$(A, \leq_A) \preceq (B \leq_B) \quad \text{และ} \quad (B \leq_B) \preceq (C, \leq_C)$$

เราจะแสดงว่า $(A, \leq_A) \preceq (C, \leq_C)$ จะเห็นได้ชัดว่า $A \subset C$ และ $\leq_A = \leq_C$ บน A ซึ่งแสดงว่าสอดคล้องกับสมบัติ (i) และ (ii) ให้ $x \in A$ และ $y \in C - A$ ถ้า $y \in C - B$ จะได้ว่า $x \leq_C y$ เพราะ $x \in B$ และ $(B \leq_B) \preceq (C, \leq_C)$ ถ้า $y \in B - A$ จะได้ว่า $x \leq_B y$ เพราะ $(A \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$ แต่เนื่องจาก $\leq_B = \leq_C$ บน B จึงได้ว่า $x \leq_C y$ ซึ่งจากทั้งสองกรณีจะได้ว่ามีสมบัติสอดคล้องกับ (iii) ดังนั้น $(A, \leq_A) \preceq (C, \leq_C)$ ตามต้องการ และทำให้ได้ว่า $\preceq$ มีสมบัติถ่ายทอดและเป็นการจัดอันดับบางส่วนบน $\mathcal{F}$

สังเกตว่า $\preceq$ มีสมบัติปฏิสมมาตร เพราะว่าถ้า $(A \leq_A) \preceq (B, \leq_B)$ และ $(B, \leq_B) \preceq (A, \leq_A)$ แล้วจาก (i) จะได้ว่า $A = B$ และจาก (ii) จะได้ว่า $\leq_A = \leq_B$

ให้ $\mathcal{G} = \{(F_\alpha, \leq_\alpha) \in \mathcal{F} : \alpha \in \mathcal{I}\}$ เป็นเซตอันดับทุกส่วนภายใต้การจัดอันดับ $\preceq$ และให้ $G = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} F_\alpha$ นิยามการจัดอันดับ $\leq_G$ บน G โดยให้

$$x \leq_G y \text{ ถ้า } x \leq_\alpha y \text{ สำหรับบาง } \alpha \in \mathcal{I}$$

เราจะแสดงว่า $\leq_G$ เป็นการจัดอันดับเชิงเส้น

(a) ถ้า $x \in G$ จะได้ว่ามี $\alpha \in \mathcal{I}$ ที่ $x \in F_\alpha$ ดังนั้น $x \leq_\alpha x$ หรือ $x \leq_G x$ นั่นเอง ดังนั้น $\leq_G$ มีสมบัติสะท้อน

(b) ให้ $x, y, z \in G$ โดยที่ $x \leq_G y$ และ $y \leq_G z$ แล้วจะมี $\alpha \in \mathcal{I}$ ที่ $x, y, z \in F_\alpha$ และโดย (ii) จะได้ $x \leq_\alpha y$ และ $y \leq_\alpha z$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $x \leq_\alpha z$ หรือ $x \leq_G z$ นั่นเอง ดังนั้น $\leq_G$ มีสมบัติถ่ายทอด

(c) ถ้า $x, y \in G$ แล้วจะมี $\alpha \in \mathcal{I}$ ที่ $x, y \in F_\alpha$ เนื่องจาก F_α เป็นเซตอันดับดี จึงได้ว่า $x \leq_\alpha y$ หรือ $y \leq_\alpha x$ ดังนั้น $x \leq_G y$ หรือ $y \leq_G x$

จาก $(a), (b)$ และ (c) เราได้ว่า $\leq_G$ เป็นการจัดอันดับทุกส่วนบน G นอกจากนี้เนื่องจาก $\leq_\alpha$ มีสมบัติปฏิสมมาตรสำหรับทุก $\alpha \in \mathcal{I}$ จึงได้ว่า $\leq_G$ มีสมบัติปฏิสมมาตรด้วยเช่นกัน ดังนั้น $\leq_G$ เป็นการจัดอันดับเชิงเส้น

ต่อไปจะแสดงว่า $\leq_G$ เป็นการจัดอันดับดีบน G ให้ $A \subset G$ ที่มี x เป็นสมาชิก จะได้ว่า

$x \in F_\alpha$ สำหรับบาง $\alpha \in \mathcal{I}$ จาก (iii) จะได้ว่า $x \leq_G y$ สำหรับทุก $y \in A - F_\alpha$ ดังนั้นถ้า z เป็นสมาชิกค่าน้อยสุดของ $A \cap F_\alpha$ แล้ว z จะเป็นสมาชิกค่าน้อยสุดของ A ด้วย เนื่องจาก F_α เป็นเซตอันดับดี จึงได้ว่า $A \cap F_\alpha$ มีสมาชิกค่าน้อยสุด ดังนั้น A มีสมาชิกค่าน้อยสุด

ดังนั้น $G \in \mathcal{F}$ และ G เป็นขอบเขตบนของ $\mathcal{G}$ โดยบทตั้งของซอร์น จะได้ว่า $\mathcal{F}$ มีสมาชิกใหญ่สุด ให้ $(H, \leq_H)$ เป็นสมาชิกใหญ่สุดของ $\mathcal{F}$ ท้ายสุดนี้เราต้องการแสดงว่า $H = E$ สมมติว่ามี $z \in E - H$ ให้ $K = H \cup \{z\}$ และนิยามให้ $\leq_K$ บน K โดยให้ $x \leq_K y$ ถ้า $x, y \in H$ และให้ $x \leq_K z$ สำหรับทุก $x \in K$ ซึ่งจะได้ว่า $(H, \leq_H) \preceq (K, \leq_K)$ แต่ $(H, \leq_H)$ เป็นสมาชิกใหญ่สุดและ $\preceq$ มีสมบัติปฏิสมมาตร จึงได้ว่า $(H, \leq_H) = (K, \leq_K)$ และ $H = K$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $H = E$ ตามต้องการ

***จะแสดงว่า* (4) $\Rightarrow$ (1)** ให้ $\mathcal{I}$ เป็นเซตดัชนีที่ไม่ใช่เซตว่าง และ S_α เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างสำหรับทุก $\alpha \in \mathcal{I}$ ให้ $S = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} S_\alpha$ โดยหลักการจัดอันดับดี จะมีการจัดอันดับดีบน S ดังนั้นทุก S_α จะมีสมาชิกค่าน้อยสุดใน S_α (และจะมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น) ให้ m_α เป็นสมาชิกค่าน้อยสุดของ S_α นิยาม $f : \mathcal{I} \to S$ โดยให้ $f(\alpha) = m_\alpha$ สำหรับทุก $\alpha \in \mathcal{I}$ ซึ่งจะได้ฟังก์ชันการเลือก ดังนั้นสัจพจน์การเลือกเป็นจริง $\square$

บรรณานุกรม

[1] P. A. Loeb, *Lecture Notes on Real Analysis*, University of Illinois at Urbana-Champaign, Spring 2003.

[2] H. L. Royden, *Real Analysis*, 3^{rd} edition, Prentice Hall, 1988.

[3] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Real Variables; Lebesgue Measure and Integration with Applications to Fourier Series*, McGraw-Hill, 1969.

[4] T. Tao, *Analysis I*, 3^{rd} edition, Texts and Readings in Mathematics Volume 37, Springer, 2015.

ดัชนีคำศัพท์ภาษาไทย

ดัชนีคำศัพท์ภาษาอังกฤษ