บทที่ 5

ลำดับ อนุกรม และอนุกรมกำลังของจำนวนจริง

5.1 ลำดับของจำนวนจริง

บทนิยาม 5.1.1 ลำดับของจำนวนจริง คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\mathbb{N}$ และมีเรนจ์เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}$

ถ้า $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ เป็นลำดับ เรานิยมเขียนบอกค่าของ f ที่ $n\in\mathbb{N}$ ด้วยสัญลักษณ์ a_n แทนการใช้สัญลักษณ์ $f(n)$ และเรียก a_n ว่า**พจน์ที่ n** (nth term) หรือ **พจน์ทั่วไป** (general term) ของลำดับ เพื่อความสะดวกในการเขียนสัญลักษณ์ เราจะเขียนแทนลำดับด้วยสัญลักษณ์

$$\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$$

หรือ
$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

หรือ
$$\{a_n\}$$

บทนิยาม 5.1.2 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ และ $L\in\mathbb{R}$ เรากล่าวว่า L เป็น **ลิมิต** ของ $\{a_n\}$ (limit of $\{a_n\}$) หรือ ลำดับ $\{a_n\}$ **ลู่เข้า** (converge) สู่ L เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a_n\to L$ หรือ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ถ้าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon>0$ จะมี $n_0\in\mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ } n\geq n_0$$

ในกรณีนี้เรากล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่เข้า** (convergent sequence) และถ้า $\{a_n\}$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้า เราเรียก $\{a_n\}$ ว่า **ลำดับลู่ออก** (divergent sequence)

<u>**ตัวอย่าง**</u> จงพิจารณาว่าลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\{\frac{1}{n}\}$

2. $\{(-1)^n\}$

ทฤษฎีบท 5.1.3 ลำดับของจำนวนจริงถ้ามีลิมิต มีได้เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 5.1.4 กำหนดให้ $r, s \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ เมื่อ $|r|<1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0$ เมื่อ $s>0$

หมายเหตุ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $r \le -1$ หรือ $r>1$

ตัวอย่าง

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

บทนิยาม 5.1.9 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับ

1. เรากล่าวว่า $\{a_n\}$ **เข้าใกล้อนันต์** (tends to $+\infty$) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ถ้ าสำหรับทุก ๆ $\alpha \in \mathbb{R}$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $a_n > \alpha$ สำหรับทุก ๆ $n \ge n_0$
2. เรากล่าวว่า $\{a_n\}$ **เข้าใกล้ลบอนันต์** (tends to $-\infty$) และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ถ้าสำหรับทุก ๆ $\alpha \in \mathbb{R}$ จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $a_n < \alpha$ สำหรับทุก ๆ $n \ge n_0$

ทฤษฎีบท 5.1.11 กำหนดให้ $r, s \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = +\infty$ เมื่อ $r>1$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} n^s = +\infty$ เมื่อ $s>0$

ตัวอย่าง

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$

ทฤษฎีบท 5.1.12 กำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนนับ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับทุก ๆ $x \in [n_0, \infty)$ และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับจำนวนจริงซึ่ง $a_n = f(n)$ สำหรับทุก ๆ $n \ge n_0$ จะได้ว่า

ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่า ลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$

2. $\left\{\dfrac{n^2}{\ln(n+1)}\right\}$

3. $\left\{n^{\frac{1}{n}}\right\}$

ทฤษฎีบท 5.1.14 (**การทดสอบอัตราส่วน** : Ratio Test)

กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก และ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L$ โดยที่ $L\in\mathbb{R}$

1. ถ้า $L<1$ แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าและ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$
2. ถ้า $L>1$ หรือ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$ แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก และ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$

__ตัวอย่าง__ จงตรวจสอบว่าลำดับ $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เห็นได้ชัดว่า $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกและ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}\right)=0<1$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.1.14 จะได้ว่า $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ❍

หมายเหตุ ลำดับของจำนวนจริงบวก $\{a_n\}$ ที่มี $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L$ และ $L=1$ อาจเป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออกก็ได้ ตัวอย่างเช่น

- $\{\frac{1}{n}\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกที่ลู่เข้าและ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$
- $\{n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกที่ลู่ออกและ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$

ทฤษฎีบท 5.1.16 กำหนดให้ $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ เป็นลำดับ และ $L,M,k\in\mathbb{R}$ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ และ $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=M$ จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{n\to\infty}k=k$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}ka_n=k\lim\limits_{n\to\infty}a_n=kL$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L+M$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L-M$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)(\lim\limits_{n\to\infty}b_n)=LM$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{L}{M}$ เมื่อ $b_n\neq 0$ สำหรับทุก ๆ $n\in\mathbb{N}$ และ $M\neq 0$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{a_n}=\sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=\sqrt[m]{L}$ เมื่อ $\sqrt[m]{L},\sqrt[m]{a_m}\in\mathbb{R}$ และทุกจำนวนนับ $m\geq 2$
8. ถ้ามี $n_0\in\mathbb{N}$ ซึ่ง $a_n\leq c_n\leq b_n$ สำหรับทุก ๆ $n\geq n_0$ และ $L=M$ แล้วจะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=L$

9. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด L และ $\{a_n\}$ เป็นลำดับในโดเมนของ f ซึ่งลู่เข้าสู่ L แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(L)$

<u>ตัวอย่าง</u>

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n+5}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{5^n} - \dfrac{3}{4^n}\right)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3n^2-2n}{n^2+1}}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{3^n}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+1}{n^2+n}$

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^5-n^2+4}}{n^2+1}$

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{2n^2-n}$

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

1.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3+1}$

1.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{e^n}$

1.7 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}$

1.8 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n})$

1.9 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}$

1.10 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

2. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก

2.1 $\{\dfrac{3(-1)^n}{n!}\}$

2.2 $\{\tan(\dfrac{2n\pi}{1+8n})\}$

2.3 $x_1=1, x_{n+1}=2x_n-1$

2.4 $\{\dfrac{(-1)^n n}{n^2+1})$

2.5 $\{2,7,12,17,\ldots\}$

2.6 $\{\cos(\pi n/2)\}$

2.7 $\{1,-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{9},-\dfrac{8}{27},\ldots\}$

2.8 $\{\dfrac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}-1}\}$

2.9 $\{\dfrac{3+5n^2}{n+n^2}\}$

2.10 $\{\dfrac{\cos^2 n}{2^n}\}$

5.2 อนุกรมของจำนวนจริง

บทนิยาม 5.2.1 กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n\,,\; n = 1, 2, \ldots$$

เราเรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อยของ n พจน์แรก** หรือ **ผลบวกย่อยที่ n** (nth partial sum) เรียกลำดับของผลบวกย่อย (sequence of partial sums) $\{S_n\}$ ว่า **อนุกรมอนันต์ของจำนวนจริง** (infinite series of real numbers) (ต่อไปจะเรียกสั้น ๆ ว่า **อนุกรม** (series)) และเรียก a_n ว่า **พจน์ที่ n** (nth term) ของอนุกรม

สำหรับอนุกรม $\{S_n\}$ เราอาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

หรือ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

เราอาจจะเริ่มต้นดัชนีของอนุกรมด้วยค่า $n \neq 1$ ก็ได้ ตัวอย่างเช่น อนุกรม $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ สามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \qquad \text{หรือ} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \qquad \text{หรือ} \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2}$$

เป็นต้น

บทนิยาม 5.2.2 จะเรียกอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ว่า **อนุกรมลู่เข้า** (convergent series) ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และเรียก **อนุกรมลู่ออก** (divergent series) ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าที่ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ เมื่อ $S \in \mathbb{R}$ เราจะเรียก S ว่า**ผลบวก** (sum) ของอนุกรม และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

สูตรต่อไปนี้เป็นเครื่องมือที่ช่วยอำนวยความสะดวกในการหาผลบวกย่อยที่ n

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

2. $2+5+8+...$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

ทฤษฎีบท 5.2.4 (**การทดสอบพจน์ที่** n : The *n*th Term Test)

ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แล้วจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

หมายเหตุ

1. ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

2. บทกลับของทฤษฎีบท 5.2.4 นั้นไม่เป็นจริงเสมอไป กล่าวคือ ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ อาจเป็นอนุกรมลู่ออก ตัวอย่างเช่น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

__ตัวอย่าง__ จงตรวจสอบว่าอนุกรมที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1}\right)$

บทนิยาม 5.2.6 อนุกรมเรขาคณิต (geometric series) คือ อนุกรมที่เขียนได้ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$$

ทฤษฎีบท 5.2.7 อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ เมื่อ $a \neq 0$ เป็นอนุกรมลู่เข้าถ้า $|r| < 1$ และมีผลบวกเป็น $\frac{a}{1-r}$ และเป็นอนุกรมลู่ออกถ้า $|r| \geq 1$

__ตัวอย่าง__ จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n$

ทฤษฎีบท 5.2.9 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{5}{7^n} \right) = 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \right) + 5\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7^n} \right)$$

ทฤษฎีบท 5.2.10 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าและ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

<u>ตัวอย่าง</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((-\frac{4}{5})^n + \sqrt{n})$$

บทนิยาม 5.2.12 **อนุกรมพี** (p-series) คือ อนุกรมที่เขียนได้ในรูป $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 5.2.13 อนุกรมพีเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$ และเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $p \leq 1$

<u>ตัวอย่าง</u>

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$

ทฤษฎีบท 5.2.15 (การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ : Comparison Test)

กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมและมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่ง $0 \le a_n \le b_n$ สำหรับทุกจำนวนนับ $n \ge n_0$

1. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 5.2.16 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

ทฤษฎีบท 5.2.17 (การทดสอบโดยการเปรียบเทียบด้วยลิมิต : limit comparison test)

กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมที่ซึ่ง $a_n \ge 0$ และ $b_n > 0$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

1. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ แล้วจะได้ว่าอนุกรมทั้งสองลู่เข้าด้วยกันหรือไม่ก็ลู่ออกด้วยกัน
2. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
3. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

<u>ตัวอย่าง</u>

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^3-1}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$

บทนิยาม 5.2.19 กำหนดให้ $a_n > 0$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ เราเรียกอนุกรมที่เขียนอยู่ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots$$

หรือ

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^{n}a_n + \ldots$$

ว่า **อนุกรมสลับ** (alternating series)

ทฤษฎีบท 5.2.20 (**การทดสอบอนุกรมสลับ** : alternating series test)

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$ เป็นอนุกรมสลับซึ่ง

1. มี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $a_{n+1} < a_n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \geq n_0$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

แล้วจะได้ว่าอนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

<u>ตัวอย่าง</u> จงทดสอบว่าอนุกรมสลับต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

บทนิยาม 5.2.22 กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรม

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์** (absolutely convergent series) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข** (conditionally convergent series) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบท 5.2.24 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

สรุป

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์** จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่เข้า

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข** จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่ออก

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือแบบมีเงื่อนไข

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

ทฤษฎีบท 5.2.26 (**การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน** : Ratio Test)

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมซึ่ง $a_n \neq 0$ และ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ หรือ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ เมื่อ $L \in \mathbb{R}$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

2. ถ้า $L > 1$ หรือ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

3. ถ้า $L = 1$ แล้วจะสรุปผลการทดสอบด้วยวิธีการนี้ไม่ได้

<u>ตัวอย่าง</u> จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{e^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n^2}$

ทฤษฎีบท 5.2.28 (**การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์** : Root Test) กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรม และ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L$ เมื่อ $L\in\mathbb{R}$ แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า $L<1$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
2. ถ้า $L>1$ หรือ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$ แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $L=1$ แล้วจะสรุปผลการทดสอบด้วยวิธีการนี้ไม่ได้

<u>ตัวอย่าง</u> จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+5}\right)^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n^2+2}{3n^2+n}\right)^n$

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1.1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$

1.2 $1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\ldots$

1.3 $4-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\ldots$

1.4 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\ldots$

1.5 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\ldots$

1.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

1.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

1.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}+1}$

1.9 $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

1.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{5^n}$

1.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

1.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1}$

2. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-3}$

2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^3+10)^{1/4}}$

2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$

2.4 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{2n^4+1}$

2.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}$

2.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$

2.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

2.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$

2.9 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n}{n!}$

2.10 $\sum_{n=1}^{\infty} (n-\frac{n^2}{n+1})$

2.13 $\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{3}{4})^n$

2.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^{n^2}}$

2.15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$

2.16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$

2.17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^n}$

2.18 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

2.19 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2(n+1)}$

2.20 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n+1}{n(n+2)}$

2.21 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$

2.22 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

2.23 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n(1+n^2)}{n!}$

2.24 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{n+1}}$

5.3 อนุกรมกำลังของจำนวนจริง

บทนิยาม 5.3.1 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง และให้ a_n, c เป็นค่าคงตัวสำหรับทุก ๆ $n = 0,1,2,...$ จะเรียกอนุกรมของจำนวนจริงที่เขียนอยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \quad \text{หรือ} \quad a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots$$

ว่า **อนุกรมกำลัง** (power series) ใน $x-c$ เรียก a_n เมื่อ $n = 0,1,2,...$ ว่า **สัมประสิทธิ์** (coefficients) ของอนุกรมกำลัง และเรียก c ว่า **ศูนย์กลาง** (center) ของอนุกรมกำลัง

<u>**ตัวอย่าง**</u> $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ เป็นอนุกรมกำลังที่มีสัมประสิทธิ์ $a_n = 1$ สำหรับทุกจำนวนนับ n และศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง คือ $c = 0$ อนุกรมนี้จะลู่เข้าและมีผลบวกเป็น $\frac{1}{1-x}$ สำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $|x| < 1$ และลู่ออกสำหรับทุก ๆ x ซึ่ง $|x| \geq 1$

ทฤษฎีบท 5.3.2 (1) ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ ลู่เข้าที่ $x = x_1 \neq c$ แล้วอนุกรมนี้ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์สำหรับทุก ๆ x ซึ่งทำให้ $|x-c| < |x_1 - c|$

(2) ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ ลู่ออกที่ $x = x_2 \neq c$ แล้วอนุกรมนี้ลู่ออกสำหรับทุก ๆ x ซึ่งทำให้ $|x-c| > |x_2 - c|$

ทฤษฎีบท 5.3.3 การลู่เข้าของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ จะเป็นไปตามกรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้

1. อนุกรมลู่เข้า เมื่อ $x = c$ เท่านั้น
2. อนุกรมลู่เข้าสำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$
3. มีจำนวนจริง $R > 0$ ที่ทำให้อนุกรมลู่เข้าสำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $|x-c| < R$ และลู่ออกสำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $|x-c| > R$

บทนิยาม 5.3.4 1. เราจะเรียกจำนวนจริง $R > 0$ ในทฤษฎีบท 5.3.3 (3) ว่า **รัศมีการลู่เข้า** (radius of convergence) และเรียกเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ที่นิยามโดย

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}\}$$

ว่า **ช่วงของการลู่เข้า** (interval of convergence) ของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

ดังนั้น ช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังนี้จึงเป็นกรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้

- $(c-R, c+R)$
- $[c-R, c+R)$
- $(c-R, c+R]$
- $[c-R, c+R]$

2. ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้าที่ $x=c$ เท่านั้น แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ มีรัศมีการลู่เข้าเป็น 0 และช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง คือ ช่วงปิด $[c,c]=\{c\}$

3. ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ ลู่เข้าที่ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ มีรัศมีการลู่เข้าเป็น ∞ และช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง คือ ช่วงเปิดอนันต์ $(-\infty, \infty)=\mathbb{R}$

ตัวอย่าง 5.3.5 จงหารัศมีการลู่เข้าและช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

บทนิยาม 5.3.6 กำหนดให้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ เป็นอนุกรมกำลังที่มี I เป็นช่วงของการลู่เข้า เราจะเรียกฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \text{ สำหรับทุก ๆ } x \in I$$

ว่า **ฟังก์ชันผลบวก** ของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาฟังก์ชันผลบวกและช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

บทนิยาม 5.3.12 กำหนดให้ $c \in \mathbb{R}$ และ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง f และอนุพันธ์ทุกอันดับของ f หาค่าได้ที่จุด c จะเรียกอนุกรมกำลังที่เขียนในรูป

$$f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(c)(x-c)^3+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c)^n+\ldots$$

ว่า **อนุกรมเทย์เลอร์** (Taylor series) ของ f รอบจุด c หรือ **อนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด c ที่ก่อกำเนิดโดย f** (Taylor series about c generated by f) และเมื่อ $c=0$ จะเรียกอนุกรมนี้ว่า **อนุกรมแมคลอริน** (Maclaurin series)

ในบางครั้งเรานิยมเขียนอนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบจุด c ในรูปของ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$$

เมื่อ $f^{(0)}(c)=f(c)$

<u>ตัวอย่าง</u>

1. จงเขียนอนุกรมแมคลอรินของ $f(x)=\cos x$

2. จงเขียนอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x)=\frac{1}{x}$ รอบจุด $c=1$

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงหาช่วงของการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$

1.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n4^n}$

1.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$

1.6 $\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$

1.7 $\sum_{n=1}^{\infty}(ax)^n, a>0$

1.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2}x^n$

2. จงเขียนอนุกรมแมคลอรินของ $f(x)=\sin x$

3. จงเขียนอนุกรมแมคลอรินของ $f(x)=e^x$

4. จงเขียนอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x)=\sin x$ รอบจุด $c=\frac{\pi}{4}$

5. จงเขียนอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x)=\cos x$ รอบจุด $c=\frac{\pi}{3}$

6. จงเขียนอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x)=e^x$ รอบจุด $c=2$