

แบบฝึกหัด 1.1

1) 1.1 $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

ดังนั้น F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

และปฏิยานุพันธ์ของ f อีก 2 ฟังก์ชันคือ $F_1(x) = x^3 + 2x + 5$ และ $F_2(x) = x^3 + 2x + 1$

1.2 $F'(x) = -0.04x + 600 = f(x)$

ดังนั้น F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

และปฏิยานุพันธ์ของ f อีก 2 ฟังก์ชันคือ $F_1(x) = -0.02x^2 + 600x - 1$ และ

$$F_2(x) = -0.02x^2 + 600x + 5$$

1.3 $F'(x) = 3x^2 + 2x^{-2} + 13 = f(x)$

ดังนั้น F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

และปฏิยานุพันธ์ของ f อีก 2 ฟังก์ชันคือ $F_1(x) = x^3 - 2x^{-1} + 13x - 7$ และ

$$F_2(x) = x^3 - 2x^{-1} + 13x + 19$$

1.4 $F'(x) = \frac{3(2x-1) - 2(3x+1)}{(2x-1)^2} = \frac{-5}{(2x-1)^2} = f(x)$

ดังนั้น F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

และปฏิยานุพันธ์ของ f อีก 2 ฟังก์ชันคือ $F_1(x) = \frac{3x+1}{2x-1} + 1$ และ $F_2(x) = \frac{3x+1}{2x-1} + 2$

1.5 $F'(x) = e^{5x} = f(x)$

ดังนั้น F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

และปฏิยานุพันธ์ของ f อีก 2 ฟังก์ชันคือ $F_1(x) = \frac{1}{5}e^{5x} + 2$ และ $F_2(x) = \frac{1}{5}e^{5x} - 1$

1.6 $F'(x) = \frac{1}{x^2 + 2x}(2x + 2) = f(x) \quad \therefore F$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

ดังนั้น F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

และปฏิยานุพันธ์ของ f อีก 2 ฟังก์ชันคือ $F_1(x) = [\ln(x^2 + 2x)] + 1$ และ

$$F_2(x) = [\ln(x^2 + 2x)] - 1$$

2) 2.1 $\frac{x^{-2}}{-2} + C$

2.2 $\frac{t^4}{2} - t^3 + 5t + C$

2.3 $-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} + C$

2.4 $4x - \frac{2}{3}x^3 + C$

2.5 $\frac{x^{17}}{17} + \frac{3}{4}x^4 + C$

2.6 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^3 + C$

$$2.7 \quad \frac{12}{7}x^{\frac{7}{4}} + 16x + C$$

$$2.8 \quad -\frac{4}{3}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$$

$$2.9 \quad \frac{1}{3}\ln|v| + C$$

$$2.10 \quad \frac{8}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{4}u^4 + C$$

$$2.11 \quad -5u^{-1} + 2u^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + C$$

$$2.12 \quad 3\ln|x| + C$$

$$2.13 \quad x^3 + 2x + C$$

$$2.14 \quad \frac{2}{3}x^3 - 4\ln|x| + C$$

$$2.15 \quad \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$$

$$3) \quad 3.1 \quad \frac{x^3}{3} + 3$$

$$3.2 \quad \frac{1}{2}x^4 + x^3 + x - 3$$

$$3.3 \quad -\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^4 - \frac{128}{5} - 248$$

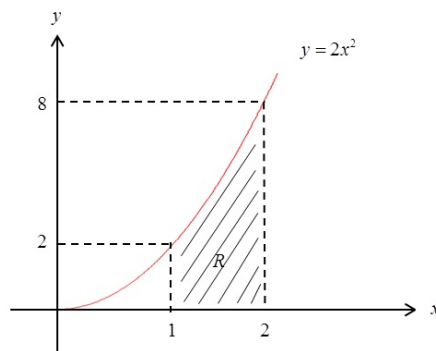
$$3.4 \quad 2x + \ln|x| - 1$$

$$4) \quad f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$$

$$5) \quad f(x) = x^3(x+1)^{\frac{1}{2}} - 49$$

แบบฝึกหัด 1.2

1) 1.1



1.2 ความยาวแต่ละช่วงย่อยเท่ากับ $\frac{1}{n}$

$$1.3 \quad x_0 = 1, x_1 = 1 + \frac{1}{n}, x_2 = 1 + \frac{2}{n}, \dots, x_i = 1 + \frac{i}{n}, \dots, x_n = 1 + \frac{n}{n} = 2$$

ดังนั้น จุดปลายช่วงย่อยทางขวาของช่วงย่อยที่ i คือ $1 + \frac{i}{n}$

1.4 จาก $y = 2x^2 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 4x > 0$ สำหรับ $1 \leq x \leq 2$

เพราะฉะนั้น $y = 2x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้น $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$

หรือ $x_{i-1} < x_i$ ทุก $i = 1, 2, 3, \dots, n$

จาก $f(x_i)\Delta_i x = 2\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$ ทุกๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$

ดังนั้น เห็นได้ชัดว่า พ.ท. $A_i \leq 2\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = 2\left(1 + \frac{2i}{n} + \frac{i^2}{n^2}\right) \frac{1}{n} = \frac{2}{n} + \frac{4i}{n^2} + \frac{2i^2}{n^3}$

1.5 $\therefore A_1 + A_2 + \dots + A_n \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{n} + \frac{4i}{n^2} + \frac{2i^2}{n^3}\right) = 2 + \frac{4}{n^2} \left(\frac{n}{2}\right)(n+1) + \frac{2}{n^3} \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

$$= 2 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3n}\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(8 + \frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{8}{3} + \frac{3}{n} + \frac{1}{3n^2} < 2 + 2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}$$

$$= 2 + 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

3) $\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta_i x = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3i} \frac{3}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ ดังนั้น $\int_{-1}^2 \frac{dx}{1+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right)$

4) ข้อ 4.4

5) 5.1 20

5.3 12

แบบฝึกหัด 1.3

1) 1.1 $\frac{1}{x^2}$

1.2 $3x^2(x^6 + 5x^3)$

1.3 $\frac{3^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

1.4 $\cos(x)\sqrt{1 + \sin^3(x)}$

1.5 $\sin(x^2)$

1.6 $\frac{\sin(x)}{x}$

1.7 $-\frac{\sin(t)}{t}$

1.8 $2x \left[\sin(x^2) + \int_2^{x^2} \frac{\sin(u)}{u} du \right]$

$$1.9 \quad \frac{\cos(t)}{1+t^2}$$

$$1.10 \quad \frac{\int_0^{2t} \sqrt{1+s} ds}{(1+2t)^{\frac{3}{2}}} - 2$$

$$1.11 \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(x)$$

$$2) \quad 2.1 \quad -\frac{55}{252}$$

$$2.2 \quad \sqrt{3}$$

$$2.3 \quad \ln(2)$$

$$2.4 \quad -\frac{\pi}{12}$$

$$2.5 \quad 0$$

$$3) \quad 3.1 \quad \frac{21}{2}$$

$$3.2 \quad 1.90$$

$$3.3 \quad -\frac{\pi}{4}$$

$$4) \quad 10.5 \text{ ฟุต}$$

$$5) \quad y = \frac{3x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2$$

แบบฝึกหัด 1.4

$$1) \quad 1.1 \quad 1.87$$

$$1.2 \quad 2.1$$

$$1.3 \quad 4 \text{ ช่วงย่อย ค่าประมาณเป็น } 0.5, 8 \text{ ช่วงย่อย ค่าประมาณเป็น } 1$$

$$1.4 \quad 1.53$$

$$1.5 \quad 12.6$$

$$1.6 \quad 4.5$$

$$2) \quad 2.1 \quad 2.67$$

$$2.2 \quad 2.25$$

$$2.3 \quad 0.007813, 0.001953$$

$$2.4 \quad 0.0066$$

$$2.5 \quad 0.163$$

$$2.5 \quad 1.125$$

$$3) \quad 3.1 \quad 456.5$$

$$3.2 \quad 76.0833$$

แบบฝึกหัด 2.1

- | | | | | |
|----|------|---|------|---|
| 1) | 1.1 | $1+x-\ln 1+x +C$ | 1.2 | $-e^{\frac{1}{x}}+C$ |
| | 1.3 | $\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{3(x+1)^3}+C$ | 1.4 | $\frac{1}{2}\arctan(x^2)+C$ |
| | 1.5 | $\frac{-1}{(1+\sqrt{x})^2}+C$ | 1.6 | $\ln 1+e^x +C$ |
| 2) | 2.1 | $\frac{(1+3x)^6}{6}+C$ | 2.2 | $\frac{\tan^2\theta}{2}+C$ |
| | 2.3 | $\frac{1}{3}\arcsin(3x)+C$ | 2.4 | $\frac{1}{5}(\ln x)^5+C$ |
| | 2.5 | $\sqrt{1+x^2}+C$ | 2.6 | $\ln x^2+3x+2 +C$ |
| 3) | 3.1 | $-\frac{1}{2}e^{5-2x}+C$ | 3.2 | $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$ |
| | 3.3 | $\frac{2}{9}(3x+4)^{\frac{3}{2}}+C$ | 3.4 | $-\frac{1}{2}\cos(e^{2x})+C$ |
| | 3.5 | $\frac{3}{8}[x^2+4x+9]^{\frac{4}{3}}+C$ | 3.6 | $2\frac{(t-1)^6}{6}-4\frac{(t-1)^5}{5}+C$ |
| | 3.7 | $\frac{2}{3}[7\sqrt{17}+1]$ | 3.8 | $-\cos(e^x)+C$ |
| | 3.9 | $-e^{\cos x}+C$ | 3.10 | $\frac{1}{4}$ |
| | 3.11 | 0 | 3.12 | e^e-e |
| | 3.13 | $\frac{-1}{32(4x^2+1)^4}+C$ | 3.14 | $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$ |
| | 3.15 | $\sin(\ln x)+C$ | 3.16 | $\frac{\pi^2}{24}$ |
| | 3.17 | $\frac{1}{2}\arctan(x^2)+C$ | 3.18 | $\frac{1}{2}\arcsin(x^2)+C$ |
| | 3.19 | $\frac{1}{4}\ln 1+x^4 +C$ | 3.20 | $\frac{1}{2}\ln 2$ |

$$3.21 \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right) + C$$

$$3.22 \quad \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$3.23 \quad \frac{1}{5} [32 + 19\sqrt[3]{19^2}]$$

$$3.24 \quad \frac{1}{3} e^{x^3+2} + C$$

$$3.25 \quad \frac{1}{3} \sqrt{2t+7} (-7+t) + C$$

$$3.26 \quad \frac{1}{2} \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x-2}\right) + C$$

$$3.27 \quad 2\sqrt{3x} - 2\sqrt{15} \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{5} \sqrt{x}\right) + C$$

$$3.28 \quad \frac{2}{2835} (3x-1)^{\frac{3}{2}} (8+36x+135x^2) + C$$

$$3.29 \quad \frac{3}{220} (x-3)^{\frac{5}{3}} (81+45x+20x^2) + C$$

$$3.30 \quad \frac{6}{7} (x+1)^{\frac{7}{6}} + \frac{6}{5} (x+1)^{\frac{5}{6}} + 2\sqrt{x+1} + 6(x+1)^{\frac{1}{6}} + 3 \ln\left|(x+1)^{\frac{1}{6}} - 1\right| - 3 \ln\left|(x+1)^{\frac{1}{6}} + 1\right|$$

$$+ 3 \ln|x| + 9(x+1)^{\frac{1}{3}} - 3 \ln\left|1 + (x+1)^{\frac{1}{3}} + (x+1)^{\frac{2}{3}}\right| + 6 \ln\left|(x+1)^{\frac{1}{3}} - 1\right| + \frac{9}{2} (x+1)^{\frac{2}{3}} + C$$

แบบฝึกหัด 2.2

$$1) \quad 1. \quad 1 - 5e^{-4}$$

$$1.2 \quad -e^{2-5x} \left(\frac{x^3}{5} + \frac{3x^2}{5^2} + \frac{6x}{5^3} + \frac{6}{5^4} \right) + C$$

$$1.3 \quad \frac{2^x}{\ln 2} \left(x - \frac{1}{\ln 2} \right) + C$$

$$1.4 \quad \frac{-(2x+3)}{3} e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} + C$$

$$1.5 \quad \frac{(2x+3)^5}{10} \left(\ln|2x+3| - \frac{1}{5} \right) + C$$

$$1.6 \quad -\frac{1}{2x^2} \left(\ln|x| + \frac{1}{2} \right) + C$$

$$1.7 \quad \frac{x}{5} \tan(5x) - \frac{1}{25} \ln|\sec 5x| + C$$

$$1.8 \quad \ln(\ln|x|) \ln|x| - \ln|x| + C$$

$$1.9 \quad \frac{1}{2} \arcsin(2x) \left[x^2 - \frac{1}{8} \right] + \frac{x}{8} \sqrt{1-4x^2} + C$$

$$1.10 \quad -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^2$$

$$1.11 \quad 2e - 4$$

$$1.12 \quad 1 - \frac{2}{e}$$

$$1.13 \quad \frac{-3\pi^2}{16} + \frac{3}{4}$$

$$1.14 \quad 2 \arccos(2) - \frac{1}{2} \sqrt{3} - \left(\frac{2}{3} \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{4} \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$$

$$1.15 \quad \frac{4}{15}$$

- | | | | | |
|----|-----|---------------------|-----|---------------------|
| 2) | 2.1 | การแทน | 2.2 | การแทน |
| | 2.3 | การแทน | 2.4 | ทีละส่วน (by parts) |
| | 2.5 | ทีละส่วน (by parts) | 2.6 | ทีละส่วน (by parts) |
| | 2.7 | ทีละส่วน (by parts) | 2.8 | ทีละส่วน (by parts) |

- 3) 3.1 $-2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$
- 3.2 $-3x^{\frac{2}{3}} \cos x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{3}} \sin x^{\frac{1}{3}} + 6 \cos x^{\frac{1}{3}} + C$
- 3.3 $e^{\sqrt{2x}} (\sqrt{2x} - 1) + C$

แบบฝึกหัด 2.3

- 1) $\frac{\sin^2 x}{2} + C$
- 2) $\frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} + \ln |\sec^2 x| + C$
- 3) $\frac{\sin t \cos^7 t}{8} + \frac{7}{8} \left[\frac{\sin t \cos^5 t}{6} + \frac{5}{6} \left[\frac{\sin t \cos^3 t}{4} + \frac{3}{8} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right] \right] + C$
- 4) $\frac{\sin^6 x}{6} + C$
- 5) $\frac{-1}{3 \sin^3 x} + C$
- 6) $\frac{-1}{\cos x} + \frac{1}{3 \cos^3 x} + C$
- 7) $\frac{1}{2} \left[\tan 2x + \frac{\tan^3 2x}{3} \right] + C$
- 8) $\tan \theta - \theta - 4 \cot \theta + C$
- 9) $\frac{\cos^8 t}{8} - \frac{\cos^6 t}{6} + C$
- 10) $\arcsin(\tan x) + C$
- 11) $-\frac{\csc^4(2x+1) \cot(2x+1)}{2} - 4 \left[\frac{\cot^5(2x+1)}{5} + \frac{\cot^3(2x+1)}{3} \right] + C$
- 12) $\ln |\tan(x)| + C$
- 13) $-\cos t + \frac{2}{3} \cos^3 t - \frac{1}{5} \cos^5 t + C$
- 14) $2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + C$ เมื่อ $\frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ หรือ $-2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + C$ เมื่อ $\frac{x}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$

$$15) \frac{1}{4} \left[t + \sin 2t + \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 4t}{4} \right) \right] + C$$

$$16) \frac{\sec^5 x}{5} + C$$

$$17) \frac{2}{7} \tan^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{3} \tan^{\frac{3}{2}} x + C$$

$$18) -\frac{1}{3} \cot^3 \theta - \frac{2}{5} \cot^5 \theta - \frac{1}{7} \cot^7 \theta + C$$

$$19) -\frac{1}{3} \left[\frac{\csc^7 3x}{7} - \frac{2}{5} \csc^5 3x + \frac{1}{3} \csc^3 3x \right] + C$$

$$20) 2 \tan^{\frac{3}{2}} \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{6}{7} \tan^{\frac{7}{2}} \left(\frac{x}{3} \right) + C$$

$$21) \left(\frac{x}{2} \right)^3 \sin \left(\frac{x}{2} \right) - 3 \left[- \left(\frac{x}{2} \right)^2 \cos \left(\frac{x}{2} \right) + 2 \left(\frac{x}{2} \sin \left(\frac{x}{2} \right) + \cos \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right] + C$$

$$22) \cos(\cos x) + C$$

$$23) \frac{1}{3}$$

$$24) \frac{1}{\pi}$$

$$25) \frac{1}{4} - \frac{2}{3\pi}$$

แบบฝึกหัด 2.4

$$1) \frac{a^2}{2} \left[\arcsin \left(\frac{x}{a} \right) - \frac{x}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \right] + C$$

$$2) -\frac{1}{a} \ln \left| \csc \left(\arctan \frac{x}{a} \right) + \cot \left(\arctan \frac{x}{a} \right) \right| + C$$

$$3) -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C$$

$$4) \frac{1}{3} \operatorname{arcsec} \left(\frac{2x}{3} \right) + C$$

$$5) \frac{1}{4} \operatorname{arcsec} \left(\frac{x^2}{2} \right) + C$$

$$6) \frac{9}{4} \left[\frac{2x\sqrt{16x^2+9}}{9} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{16x^2+9}}{3} + \frac{4x}{3} \right| \right] + C$$

$$7) \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{t^2}{2} \right) + C$$

$$8) -\frac{1}{27} \cdot \frac{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} + C$$

$$9) \frac{1}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 x^2 + b^2}}{b} + \frac{ax}{b} \right| + C$$

$$10) \frac{(x^2+9)^{12}}{24} - \frac{9}{22} (x^2+9)^{11} + C$$

$$11) \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} - \frac{2x^3}{3(2x^2+1)^{\frac{3}{2}}} + C$$

$$12) \frac{1}{2} \left[\arctan x - \frac{x}{1+x^2} \right] + C$$

- 13) $\arcsin(e^x) + C$
14) $1/24$
- 15) $\frac{1}{6(1-x^2)^3} - \frac{1}{4(1-x^2)^2} + C$
16) $\frac{(x^2+9)^{12}}{24} - \frac{9(x^2+9)^{11}}{22} + C$
- 17) $\arcsin(\tan x) + C$
18) $\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|$
- 19) $\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4}$
20) $\frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$
- 21) $\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}$
22) $\frac{3}{32}$

แบบฝึกหัด 2.5

- 1) $\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right) + C$
- 2) $\frac{1}{\sqrt{10}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{5}}(x-1)\right) + C$
- 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{7}}(x+1)\right) + C$
- 4) $\frac{1}{10}\ln|5x^2 - 3x + 2| + \frac{3\sqrt{31}}{155}\arctan\left(\frac{10x-3}{\sqrt{31}}\right) + C$
- 5) $\ln\left|\sqrt{\frac{(x+1)^2 - 2}{2}}\right| + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\frac{x+1+\sqrt{2}}{\sqrt{(x+1)^2 - 2}}\right| + C$
- 6) $\frac{1}{2}\ln|3x^2 + 2x + 1| + 2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)\right) + C$
- 7) $\frac{1}{4}\ln|2x^2 + 3x + 5| + \frac{17\sqrt{31}}{62}\arctan\left(\frac{\sqrt{31}}{31}(4x+3)\right) + C$
- 8) $-\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + \frac{7}{4}\arcsin(2x-1) + C$
- 9) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} - \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right| + C$
- 10) $\frac{(x+2)\sqrt{(x+2)^2 + 1}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{(x+2)^2 + 1} + (x+2)\right| + C$

$$11) \quad \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{3} \right) \sqrt{\left(3 \left(x + \frac{1}{3} \right) \right)^2 - 5} - \frac{5}{2} \ln \left| \frac{3}{\sqrt{5}} \left(x + \frac{1}{3} \right) + \frac{\sqrt{\left(3 \left(x + \frac{1}{3} \right) \right)^2 - 5}}{\sqrt{5}} \right| + C$$

$$12) \quad -\frac{1}{3} \left(2^2 - (x-2)^2 \right)^{\frac{3}{2}} + 4 \arcsin \left(\frac{x-2}{2} \right) + (x-2) \sqrt{2^2 - (x-2)^2} + C$$

$$13) \quad \frac{1}{16} \arctan \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{40}$$

$$14) \quad \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

$$15) \quad -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{5}{28} \sqrt{7}$$

แบบฝึกหัด 2.6

$$1) \quad 1.1 \quad 1 - \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

$$1.2 \quad x-3 + \frac{8}{(x+2)} - \frac{1}{(x+1)}$$

$$1.3 \quad \frac{5}{4(x-1)} - \frac{5}{4(x+3)}$$

$$1.4 \quad \frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{4(x+5)} - \frac{1}{x+4}$$

$$1.5 \quad \frac{4}{x-1} + \frac{22}{x-2} - \frac{46}{2x-3}$$

$$1.6 \quad x-1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x+1}$$

$$1.7 \quad x + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x-2}$$

$$1.8 \quad x^2 - x + \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1}$$

$$1.9 \quad \frac{5}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{4}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2}$$

$$1.10 \quad \frac{1}{6} \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{3}{(x+1)^4} \right)$$

$$1.11 \quad x-2 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$1.12 \quad \frac{3}{x} + \frac{2x-1}{x^2+x+1}$$

$$1.13 \quad -\frac{1}{36(x-1)} + \frac{1}{12(x-1)^2} + \frac{x}{36(x^2+2x+3)} + \frac{\frac{5}{6}x+1}{(x^2+2x+3)^2}$$

$$1.14 \quad \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{x+2}{x^2+8} - \frac{8x+16}{(x^2+8)^2}$$

$$1.15 \quad -\frac{47}{12(x+3)} + \frac{36}{7(x-2)} - \frac{\frac{103}{84}x + \frac{309}{28}}{x^2+3}$$

$$1.16 \quad 3x-12 + \frac{34x+60}{x^2+4x+5}$$

$$1.17 \quad \frac{1}{x^2+4} - \frac{8}{(x^2+4)^2} + \frac{17}{(x^2+4)^3}$$

$$2) \quad \begin{aligned} 2.1 \quad & \frac{1}{x^2+1} + \ln|x+3| + \arctan(x) + C \\ 2.2 \quad & \frac{1}{36} \left(\frac{-52x+160}{x^2-2x+10} \right) + \frac{14}{27} \arctan\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} \ln|x^2-2x+10| + C \\ 2.3 \quad & \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+3| + \frac{1}{2} \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(2x+2)\right) + C \\ 2.4 \quad & \frac{4}{13} \ln|2x-1| - \frac{2}{13} \ln|x^2+3x+8| + \frac{10}{299} \sqrt{23} \arctan\left(\frac{\sqrt{23}}{23}(2x+3)\right) + C \\ 2.5 \quad & -\frac{1}{7} \ln|x^2+4| - \frac{1}{14} \arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{7} \ln|4x^2+9| + \frac{2}{21} \arctan\left(\frac{2}{3}x\right) + C \\ 2.6 \quad & 5x - \ln|x+1| + \ln|x^2+1| + \arctan(x) + C \\ 2.7 \quad & \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right) + \ln|x-1| + C \\ 2.8 \quad & \frac{3}{2}x^2 - 12x + 17 \ln|x^2+4x+5| - 8 \arctan(2+x) + C \\ 2.9 \quad & \frac{51}{256} \arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{17}{16} \frac{x}{(x^2+4)^2} - \frac{77}{128} \frac{x}{x^2+4} + C \\ 2.10 \quad & -\sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}) + 6 \\ 2.11 \quad & \frac{3}{2} - 2 \ln(2) + \ln(3) \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 3.1

1) 1.1	$\frac{39}{2}, -6, \frac{27}{2}, \frac{15}{2}$	1.2	$8, -4, 4, 0$
1.3	$4, 2, 2, 4$	1.4	$\frac{37}{2}, 16, \frac{5}{2}, \frac{37}{2}$
1.5	$\frac{5}{2}, 2, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}$	1.6	$14, 8, -4, 4$
2)	1		
3)	4π		

4) 4.1 f เป็นฟังก์ชันคู่ และ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 4$

4.2 f เป็นฟังก์ชันคี่ และ $\int_{-\pi}^{\pi} 2\sin x dx = 0$

4.3 f เป็นฟังก์ชันคู่ และ $\int_{-\pi}^{\pi} -\cos x dx = 0$

4.4 f เป็นฟังก์ชันคู่ และ $\int_{-1}^1 2dx = 4$

แบบฝึกหัด 3.2

1) 1.1 $\frac{5}{12}$ ตร.หน่วย

1.2 $\frac{125}{12}$ ตร.หน่วย

1.3 9 ตร.หน่วย

1.4 $\frac{5}{12}$ ตร.หน่วย

1.5 9 ตร.หน่วย

1.6 $\frac{9}{2}$ ตร.หน่วย

1.7 $\frac{15}{8} - 2\ln 2$ ตร.หน่วย

1.8 $\frac{4}{15}$ ตร.หน่วย

2) $\int_b^a 2\sqrt{a^2 - y^2} dy$ ตร.หน่วย

3) $2\sqrt{2}$ ตร.หน่วย

4) $\frac{343}{6}$ ตร.หน่วย

แบบฝึกหัด 3.3

1) $\frac{16}{3}r^3$ ลบ.หน่วย

2) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ลบ.หน่วย

3) 25π ลบ.หน่วย

4) $\frac{1024}{15}\pi$ ลบ.หน่วย

5) 5.1 144 ลบ.หน่วย

5.2 72 ลบ.หน่วย

6) $54\pi\sqrt{3}$ ลบ.หน่วย

7) $\frac{abc}{6}$ ลบ.หน่วย

แบบฝึกหัด 3.4

1) 1.1 9π ลบ.หน่วย

1.2 256π ลบ.หน่วย

1.3 9π ลบ.หน่วย

1.4 $\frac{176}{15}\pi$ ลบ.หน่วย

$$1.5 \quad \frac{41}{6}\pi \text{ ลบ.หน่วย}$$

$$1.6 \quad \frac{13}{3}\pi \text{ ลบ.หน่วย}$$

$$2) \quad 2.1 \quad \frac{8}{3}\pi \text{ ลบ.หน่วย}$$

$$2.2 \quad 4\pi \text{ ลบ.หน่วย}$$

$$2.3 \quad \frac{19}{48}\pi \text{ ลบ.หน่วย}$$

$$2.4 \quad \frac{16}{3}\pi \text{ ลบ.หน่วย}$$

$$2.5 \quad \frac{35}{3}\pi \text{ ลบ.หน่วย}$$

$$2.6 \quad \frac{25}{6}\pi \text{ ลบ.หน่วย}$$

$$3) \quad 3.1 \quad 3.1.1 \quad \text{แบบจาน} \quad S = \pi \int_0^4 (x^{\frac{3}{2}})^2 dx = 64\pi$$

$$\text{แบบทรงกระบอก} \quad S = 2\pi \int_0^8 y(4 - y^{\frac{2}{3}}) dy = 64\pi$$

$$3.1.2 \quad \text{แบบจาน} \quad S = \pi \int_0^8 (4^2 - y^{\frac{4}{3}}) dy = \frac{512}{7}\pi$$

$$\text{แบบทรงกระบอก} \quad S = 2\pi \int_0^4 x(x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{512}{7}\pi$$

$$3.1.3 \quad \text{แบบจาน} \quad S = \pi \int_0^4 \left[(8^2) - (8 - x^{\frac{3}{2}})^2 \right] dx = \frac{704}{5}\pi$$

$$\text{แบบทรงกระบอก} \quad S = 2\pi \int_0^8 (y - 8)(y^{\frac{2}{3}} - 4) dy = \frac{704}{5}\pi$$

$$3.1.4 \quad \text{แบบจาน} \quad S = \pi \int_0^8 (4^2 - (y^{\frac{2}{3}} - 4)^2) dy = \frac{3456}{35}\pi$$

$$\text{แบบทรงกระบอก} \quad S = 2\pi \int_0^4 (x - 4)(x^{\frac{3}{2}} - 8) dx = \frac{3456}{35}\pi$$

$$3.2 \quad 3.2.1 \quad \text{แบบจาน} \quad S = \pi \int_0^4 (8^2 - (x^{\frac{3}{2}})^2) dx = 192\pi$$

$$\text{แบบทรงกระบอก} \quad S = 2\pi \int_0^8 y(y^{\frac{2}{3}}) dy = 192\pi$$

$$3.2.2 \quad \text{แบบจาน} \quad S = \pi \int_0^8 y^{\frac{4}{3}} dy = \frac{384}{7}\pi$$

$$\text{แบบทรงกระบอก} \quad S = 2\pi \int_0^4 x(8 - x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{384}{7}\pi$$

$$3.2.3 \quad \text{แบบจาน} \quad S = \pi \int_0^4 (x^{\frac{3}{2}} - 8)^2 dx = \frac{576}{5} \pi$$

$$\text{แบบทรงกระบอก} \quad S = 2\pi \int_0^8 (8-y)(y^{\frac{2}{3}}) dy = \frac{576}{5} \pi$$

$$3.2.4 \quad \text{แบบจาน} \quad S = \pi \int_0^8 (4^2 - (4 - y^{\frac{2}{3}})^2) dy = \frac{3456}{35} \pi$$

$$\text{แบบทรงกระบอก} \quad S = 2\pi \int_0^4 (4-x)(8-x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{3456}{35} \pi$$

$$4) \quad 4.1 \quad 4.1.1 \quad \text{แบบจาน} \quad S = \pi \int_0^2 (x(x-2)^2)^2 dx$$

$$4.1.2 \quad \text{แบบทรงกระบอก} \quad S = 2\pi \int_0^2 x(x(x-2)^2) dx$$

$$4.2 \quad 4.2.1 \quad \text{แบบจาน} \quad S = \pi \int_{\pi}^{10\pi} (2 + \cos x)^2 dx$$

$$4.2.2 \quad \text{แบบทรงกระบอก} \quad S = 2\pi \int_{\pi}^{10\pi} x(2 + \cos x) dx$$

$$4.3 \quad 4.3.1 \quad S = \pi \int_1^e [1^2 - (1 - \ln|x|)^2] dx \quad 4.3.2 \quad S = \pi \int_0^1 [e^2 - (e^y)^2] dy$$

$$4.3.3 \quad S = \pi \int_1^e [(\ln|x| + 1)^2 - 1] dx$$

$$5) \quad \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \pi[(\sqrt{a^2 - x^2})^2 - (\frac{a}{2})^2] dx$$

แบบฝึกหัด 4.2

$$1) \quad 1.1 \quad \text{ไม่ใช่อินทิกรัลไม่ตรงแบบ เพราะ } \frac{1}{x^2 + 9} \text{ ต่อเนื่องบน } [0,1]$$

$$1.2 \quad \text{เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ เพราะ } \tan(x) \text{ ต่อเนื่องที่ } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{และ } \tan(x) \text{ ไม่ต่อเนื่องที่ } x = \frac{\pi}{2} \text{ และ } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx \text{ ลู่ออก}$$

$$1.3 \quad \text{ไม่ใช่อินทิกรัลไม่ตรงแบบ เพราะ } \frac{1}{x} \text{ ต่อเนื่องบน } [1,3]$$

1.4 เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ เพราะ $\frac{1}{x^2} + 1$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) dx$ ลู่ออก

1.5 เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ เพราะ $\frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} dx$ ลู่ออก

1.6 เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ เพราะ $\frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}}$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$

และ $\int_0^3 \frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}} dx$ ลู่เข้า

2) 2.1 ลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ 2

2.2 ลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ 2

2.3 ลู่ออก

2.4 ลู่ออก

2.5 ลู่ออก

2.6 ลู่ออก

2.7 ลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

2.8 ลู่ออก

2.9 ลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ π

3) $n = 0$

แบบฝึกหัด 4.3

1) 1.1 ลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ 1

1.2 ลู่ออก

1.3 ลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$

1.4 ลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2} \ln 2$

1.5 ลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ 0

1.6 ลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ 0

1.7 ลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ $\ln 2$

1.8 ลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ π

1.9 ลู่ออก

2) ลู่เข้า เมื่อ $n > 1$

แบบฝึกหัด 4.4

1) 1.1 ไม่เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบผสม

1.2 $\int_0^1 \frac{\ln|x|}{x} dx + \int_1^\infty \frac{\ln|x|}{x} dx$

$$1.3 \quad \int_0^1 x^{-3} dx + \int_1^{\infty} x^{-3} dx$$

$$1.4 \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} + \int_1^{1.5} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} + \int_{1.5}^2 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} + \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} + \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$1.5 \quad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} + \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$$

$$1.6 \quad \int_{-\infty}^{-4} \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} + \int_{-4}^{-3} \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} + \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} + \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} + \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$$

$$1.7 \quad \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$1.8 \quad \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4} + \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4} + \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4}$$

1.9 ไม่เป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบผสม

2) 2.1 ลู่ออก 2.2 ลู่ออก

2.3 ลู่ออก 2.4 ลู่ออก

2.5 ลู่ออก 2.6 ลู่ออก

2.7 ลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ 2 2.8 ลู่ออก

2.9 ลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{4}$

แบบฝึกหัด 4.5

1) 1.1 ได้ ลู่เข้า 1.2 ได้ ลู่ออก

1.3 ได้ ลู่เข้า 1.4 ได้ ลู่ออก

1.5 ไม่ได้ $f(x) < 0$ 1.6 ได้ ลู่เข้า

1.7 ได้ ลู่ออก 1.8 ได้ ลู่เข้า

1.9 ได้ ลู่ออก 1.10 ได้ ลู่เข้า

1.11 ได้ ลู่เข้า 1.12 ได้ ลู่ออก

1.13 ได้ ลู่ออก 1.14 ไม่ได้ $f(x) < 0$

1.15 ได้ คู่ออก

1.16 ได้ คู่เข้า

1.17 ไม่ได้ $f(x) < 0$

1.18 ไม่ได้ $f'(x) > 0$

1.19 ไม่ได้ $f'(x) > 0$

1.20 ได้ คู่เข้า

1.21 ได้ คู่เข้า

1.22 ได้ คู่เข้า

1.23 ได้ คู่เข้า

1.24 ได้ คู่เข้า

1.25 ได้ คู่ออก

1.26 ไม่ได้ $f'(x) > 0$

1.27 ได้ คู่เข้า

1.28 ได้ คู่เข้า

1.29 ได้ คู่เข้า

1.30 ได้ คู่เข้า

2) 2.1 $p > 1$

2.2 $p < -1$

แบบฝึกหัด 5.1

1) 1.1 (5,0,0), (5,3,0), (0,3,0), (0,3,2), (0,0,2) และ (5,0,2)

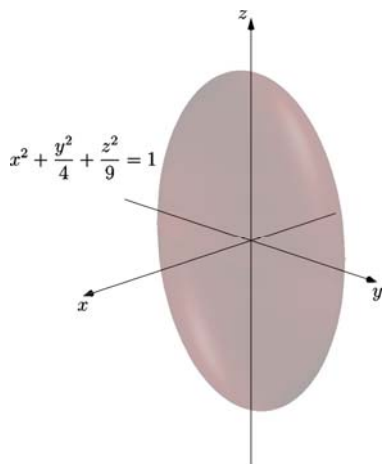
3) 3.1 3

3.2 $\sqrt{34}$

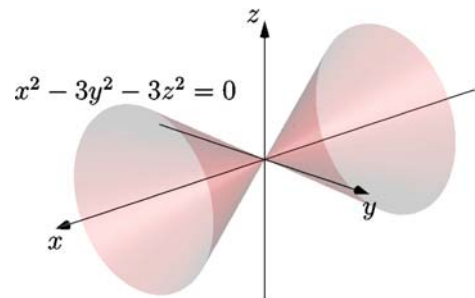
แบบฝึกหัด 5.2

1) $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$

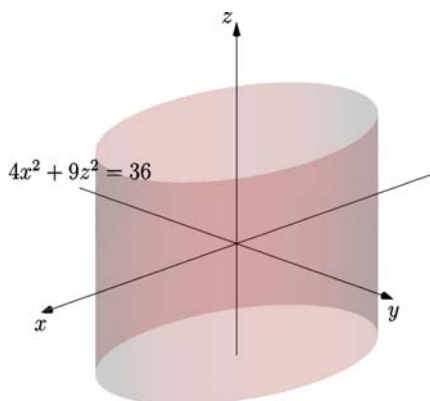
2) 2.1



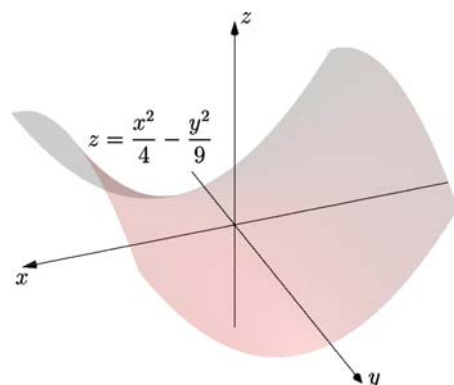
2.2



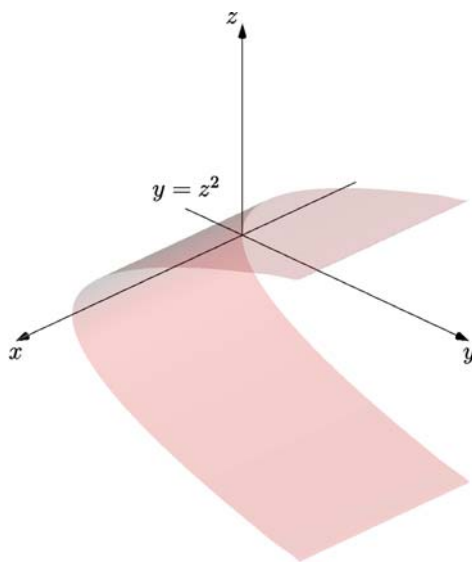
2.3



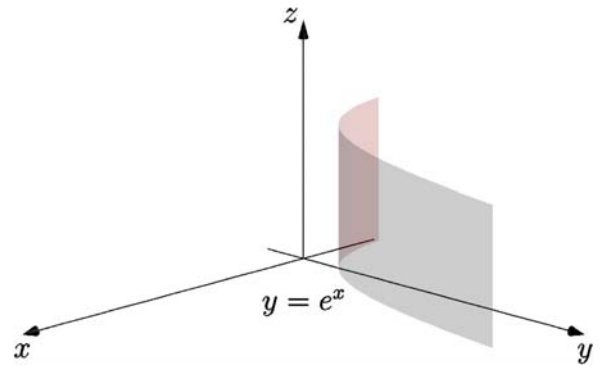
2.4



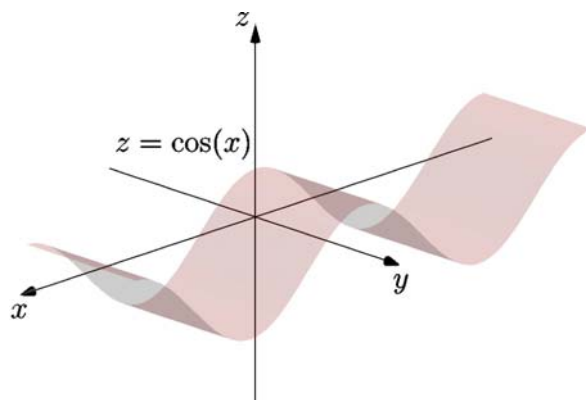
2.5



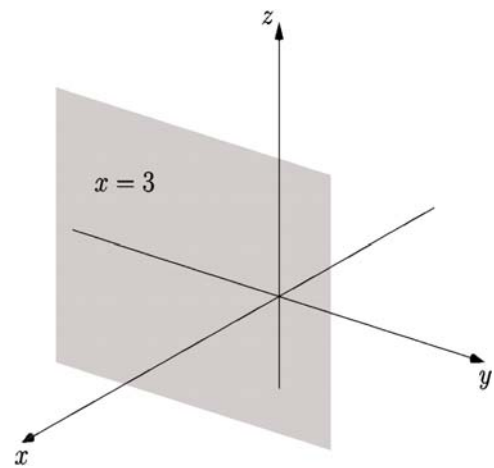
2.6



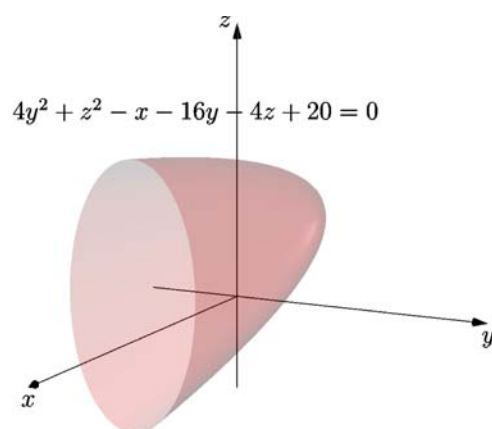
2.7



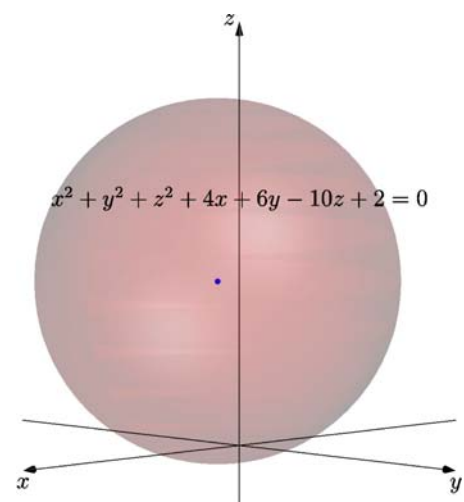
2.8



2.9



2.10



แบบฝึกหัด 6.1

- 1) 1.1 f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร 1.2 f ไม่เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร
- 1.3 f ไม่เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร 1.4 f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร
- 1.5 f ไม่เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร
- 2) 2.1 ให้ $((x, y), z_1) \in f$ และ $((x, y), z_2) \in f$ จะได้ว่า $z_1 = \sqrt{x} + \sqrt{y} + 2$ และ $z_2 = \sqrt{x} + \sqrt{y} + 2$
ดังนั้น $z_1 = z_2$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร
- 2.2 $f(4, 9) = \sqrt{4} + \sqrt{9} + 2 = 7$ และ $f(16, 0) = \sqrt{16} + \sqrt{0} + 2 = 6$
- 2.3 โดเมนของ f คือ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ และเรนจ์ของ f คือ $\{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 2\}$
- 3) 3.1 ให้ $((x, y), z_1) \in f$ และ $((x, y), z_2) \in f$ จะได้ว่า $z_1 = e^{x-y}$ และ $z_2 = e^{x-y}$
ดังนั้น $z_1 = z_2$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร
- 3.2 $f(1, 2) = e^{1-2} = e^{-1}$ และ $f(-3, 1) = e^{1-(-3)} = e^4$
- 3.3 โดเมนของ f คือ \mathbb{R}^2 และเรนจ์ของ f คือ $\{z \in \mathbb{R} \mid z > 0\}$
- 4) 4.1 ให้ $((x, y, z), w_1) \in f$ และ $((x, y, z), w_2) \in f$
จะได้ว่า $w_1 = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$ และ $w_2 = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$
ดังนั้น $w_1 = w_2$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร
- 4.2 $f(0, 1, -2) = \sqrt{9 - 0^2 - 1^2 - (-2)^2} = 2$ และ $f(1, -1, 2) = \sqrt{9 - 1^2 - (-1)^2 - 2^2} = \sqrt{3}$
- 4.3 โดเมนของ f คือ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ และเรนจ์ของ f คือ $\{w \in \mathbb{R} \mid 0 \leq w \leq 3\}$
- 5) 5.1 ให้ $((x, y, z), w_1) \in f$ และ $((x, y, z), w_2) \in f$
จะได้ว่า $w_1 = \frac{-3}{x^2 + y^2 + z^2}$ และ $w_2 = \frac{-3}{x^2 + y^2 + z^2}$
ดังนั้น $w_1 = w_2$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันสามตัวแปร

$$5.2 \quad f(1, -1, 2) = \frac{-3}{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad f(2, 0, -3) = \frac{-3}{2^2 + 0^2 + (-3)^2} = -\frac{3}{13}$$

5.3 โดเมนของ f คือ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \neq 0\}$ และเรนจ์ของ f คือ $\{w \in \mathbb{R} \mid w < 0\}$

แบบฝึกหัด 6.2

1) 1.1 ให้ $\varepsilon > 0$ เราต้องการหา $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$

$$\text{แล้ว } |f(x, y) - L| = |y - b| < \varepsilon$$

$$\text{สังเกตว่า } |y - b| = \sqrt{(y-b)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

ดังนั้นถ้าเราเลือก $\delta = \varepsilon$ จะเห็นว่า สำหรับ $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta = \varepsilon$

$$\text{แล้ว จะได้ } |f(x, y) - L| = |y - b| \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta = \varepsilon$$

1.2 ให้ $\varepsilon > 0$ เราต้องการหา $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta$

$$\text{แล้ว } |f(x, y) - L| = |(2x - 5y) - (-3)| < \varepsilon$$

$$\text{สังเกตว่า } |(2x - 5y) - (-3)| = |2(x-1) - 5(y-1)|$$

$$\leq 2|x-1| + 5|y-1|$$

$$= 2\sqrt{(x-1)^2} + 5\sqrt{(y-1)^2}$$

$$\leq 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + 5\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

$$= 7\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

ดังนั้นถ้าเราเลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$ จะเห็นว่า สำหรับ $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < \delta = \frac{\varepsilon}{7}$

$$\text{แล้ว จะได้ } |f(x, y) - L| = |(2x - 5y) - (-3)| \leq 7\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} < 7\delta = 7\left(\frac{\varepsilon}{7}\right) = \varepsilon$$

1.3 ให้ $\varepsilon > 0$ เราต้องการหา $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} < \delta$

$$\text{แล้ว } |f(x, y) - L| = |(x + 9y) - (-17)| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\text{สังเกตว่า } |(x+9y)-(-17)| &= |(x-1)+9(y+2)| \\
&\leq |x-1|+9|y+2| \\
&= \sqrt{(x-1)^2} + 9\sqrt{(y+2)^2} \\
&\leq \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} + 9\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} \\
&= 10\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้นถ้าเราเลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{10}$ จะเห็นว่า สำหรับ $0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} < \delta = \frac{\varepsilon}{10}$

$$\text{แล้ว จะได้ } |f(x, y) - L| = |(x+9y) - (-17)| \leq 10\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} < 10\delta = 10\left(\frac{\varepsilon}{10}\right) = \varepsilon$$

1.4 ให้ $\varepsilon > 0$ เราต้องการหา $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$

$$\text{แล้ว } |f(x, y) - L| = \left| \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\text{สังเกตว่า } \left| \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| &= \frac{|2x^3 - y^3|}{x^2 + y^2} \\
&\leq \frac{2x^2|x| + y^2|y|}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{2x^2\sqrt{x^2 + y^2} + y^2\sqrt{y^2}}{x^2 + y^2} \\
&\leq \frac{2x^2\sqrt{x^2 + y^2} + y^2\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{(2x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \\
&\leq \frac{2(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \\
&= 2\sqrt{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้นถ้าเราเลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ จะเห็นว่า สำหรับ $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

แล้ว จะได้ $|f(x, y) - L| = \left| \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta = 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$

2) 2.1 4

2.2 3

2.3 $\frac{1}{8}$

2.4 3

3) 3.1 จะเห็นว่า ถ้าให้ (x, y) เข้าใกล้ $(0, 0)$ ตามแนวแกน x จะได้ว่า $y = 0$ และ x มีค่าเข้าใกล้ 0

ซึ่งทำให้ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot 0}{x^4 + 0^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = 0$

แต่ ถ้าให้ (x, y) เข้าใกล้ $(0, 0)$ ตามแนวเส้นโค้ง $y = x^2$ จะได้ว่า $y = x^2$ และ x มีค่าเข้าใกล้ 0

ซึ่งทำให้ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

แสดงว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ มีค่าต่างกันในทิศทางตามแนวแกน x และตามแนวเส้นโค้ง $y = x^2$

นั่นคือ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ หาค่าไม่ได้

3.2 จะเห็นว่า ถ้าให้ (x, y) เข้าใกล้ $(0, 0)$ ตามแนวแกน x จะได้ว่า $y = 0$ และ x มีค่าเข้าใกล้ 0

ซึ่งทำให้ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x - y^2}{2x + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x - 0^2}{2x + 0^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x}{2x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1 = 1$

แต่ ถ้าให้ (x, y) เข้าใกล้ $(0, 0)$ ตามแนวแกน y จะได้ว่า $x = 0$ และ y มีค่าเข้าใกล้ 0

ซึ่งทำให้ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x - y^2}{2x + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2(0) - y^2}{2(0) + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (-1) = -1$

แสดงว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x - y^2}{2x + y^2}$ มีค่าต่างกันในทิศทางตามแนวแกน x และตามแนวแกน y

นั่นคือ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x - y^2}{2x + y^2}$ หาค่าไม่ได้

3.3 จะเห็นว่า ถ้าให้ (x, y) เข้าใกล้ $(0, 0)$ ตามแนวแกน x จะได้ว่า $y = 0$ และ x มีค่าเข้าใกล้ 0

ซึ่งทำให้ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 \sqrt{y}}{x^4 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 \sqrt{0}}{x^4 + 0^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = 0$

แต่ ถ้าให้ (x, y) เข้าใกล้ $(0, 0)$ ตามแนวเส้นโค้ง $y = x^2$ จะได้ว่า $y = x^2$ โดย x มีค่าเข้าใกล้ 0 ทางด้านบวก

$$\text{ซึ่งทำให้ } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 \sqrt{y}}{x^4 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 \cdot \sqrt{x^2}}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^4}{2x^4} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

แสดงว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 \sqrt{y}}{x^4 + y^2}$ มีค่าต่างกันในทิศทางตามแนวแกน x และตามแนวเส้นโค้ง $y = x^2$

นั่นคือ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 \sqrt{y}}{x^4 + y^2}$ หาค่าไม่ได้

3.4 จะเห็นว่า ถ้าให้ (x, y) เข้าใกล้ $(0, 0)$ ตามแนวแกน x จะได้ว่า $y = 0$ และ x มีค่าเข้าใกล้ 0

$$\text{ซึ่งทำให้ } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy}{3y^2 - x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x \cdot 0}{3 \cdot 0^2 - x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = 0$$

แต่ ถ้าให้ (x, y) เข้าใกล้ $(0, 0)$ ตามแนวเส้นตรง $y = x$ จะได้ว่า $y = x$ และ x มีค่าเข้าใกล้ 0

$$\text{ซึ่งทำให้ } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy}{3y^2 - x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x \cdot x}{3x^2 - x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2 = 2$$

แสดงว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy}{3y^2 - x^2}$ มีค่าต่างกันในทิศทางตามแนวแกน x และตามแนวเส้นตรง $y = x$

นั่นคือ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy}{3y^2 - x^2}$ หาค่าไม่ได้

3.5 จะเห็นว่า ถ้าให้ (x, y) เข้าใกล้ $(2, 0)$ ตามแนวแกน x จะได้ว่า $y = 0$ และ x มีค่าเข้าใกล้ 2

$$\text{ซึ่งทำให้ } \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{2y^2}{(x-2)^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{2 \cdot 0^2}{(x-2)^2 + 0^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} 0 = 0$$

แต่ ถ้าให้ (x, y) เข้าใกล้ $(2, 0)$ ตามแนวเส้นตรง $x = 2$ จะได้ว่า $x = 2$ และ y มีค่าเข้าใกล้ 0

$$\text{ซึ่งทำให้ } \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{2y^2}{(x-2)^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{2y^2}{(2-2)^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{2y^2}{y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} 2 = 2$$

แสดงว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{2y^2}{(x-2)^2 + y^2}$ มีค่าต่างกันในทิศทางตามแนวแกน x และตามแนวเส้นตรง $x = 2$

นั่นคือ $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{2y^2}{(x-2)^2 + y^2}$ หาค่าไม่ได้

4) 4.1 สังเกตว่า สำหรับจำนวนจริง x และ y ใดๆ $x^2 + y^2 \geq y^2$

$$\text{ดังนั้น } \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \left| \frac{xy^2}{y^2} \right| = |x| \text{ เมื่อ } y \neq 0$$

และเพราะว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0$ โดยทฤษฎีบท 6.2.8 จะได้ว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$

4.2 สังเกตว่า สำหรับจำนวนจริง x และ y ใดๆ $2x^2 + y^2 \geq 2x^2$

$$\text{ดังนั้น } \left| \frac{2x^2 \sin y}{2x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \left| \frac{2x^2 \sin y}{2x^2 + y^2} \right| = |\sin y| \text{ เมื่อ } x \neq 0$$

และเพราะว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |\sin y| = 0$ โดยทฤษฎีบท 6.2.8 จะได้ว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 \sin y}{2x^2 + y^2} = 0$

4.2 สังเกตว่า สำหรับจำนวนจริง x และ y ใดๆ $2x^2 + y^2 \geq y^2$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \left| \frac{x^3 + 4x^2 + 2y^2}{2x^2 + y^2} - 2 \right| &\leq \left| \frac{x^3 + 4x^2 + 2y^2 - 4x^2 - 2y^2}{2x^2 + y^2} \right| \\ &= \left| \frac{x^3}{2x^2 + y^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{x^3}{2x^2} \right| \\ &= \left| \frac{x}{2} \right| \text{ เมื่อ } x \neq 0 \end{aligned}$$

และเพราะว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x}{2} \right| = 0$ โดยทฤษฎีบท 6.2.8 จะได้ว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + 4x^2 + 2y^2}{2x^2 + y^2} = 2$

5) 5.1 ให้ $g(x, y) = \frac{y}{x}$ และ $f(t) = \arctan t$

จะเห็นว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{y}{x} = \frac{2}{2} = 1$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ 1 โดยทฤษฎีบท 6.2.20 จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \arctan \left(\frac{y}{x} \right) = \arctan \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \left(\frac{y}{x} \right) \right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

5.2 ให้ $g(x, y) = x - y$ และ $f(t) = e^t$

จะเห็นว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (\ln 3, \ln 2)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (\ln 3, \ln 2)} (x - y) = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\ln \frac{3}{2}$ โดยทฤษฎีบท 6.2.20 จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\ln 3, \ln 2)} e^{x-y} = e^{\lim_{(x,y) \rightarrow (\ln 3, \ln 2)} (x-y)} = e^{\ln \frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

5.3 ให้ $g(x, y) = \frac{1}{3x-4y}$ และ $f(t) = \sqrt{t}$

จะเห็นว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,2)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (4,2)} \frac{1}{3x-4y} = \frac{1}{4}$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\frac{1}{4}$ โดยทฤษฎีบท 6.2.20 จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (4,2)} \sqrt{\frac{1}{3x-4y}} = \sqrt{\lim_{(x,y) \rightarrow (4,2)} \frac{1}{3x-4y}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

5.4 ให้ $g(x, y) = (5x + y^2)$ และ $f(t) = \sin t$

จะเห็นว่า $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, \frac{\sqrt{\pi}}{2})} (5x + y^2) = 5\pi + \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 5\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{21\pi}{4}$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $\frac{21\pi}{4}$ โดยทฤษฎีบท 6.2.20 จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, \frac{\sqrt{\pi}}{2})} \sin(5x + y^2) = \sin\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, \frac{\sqrt{\pi}}{2})} (5x + y^2)\right) = \sin \frac{21\pi}{4} = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

แบบฝึกหัด 6.3

- | | | | |
|--------|--|-----|--|
| 1) 1.1 | f ต่อเนื่องที่ $(0,0)$ | 1.2 | f ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$ |
| 1.3 | f ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$ | 1.4 | f ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$ |
| 1.5 | f ไม่ต่อเนื่องที่ $(0,0)$ | | |
| 2) 2.1 | f ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$ | 2.2 | f ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ |
| 2.3 | f ต่อเนื่องบน \mathbb{R}^2 | 2.4 | f ต่อเนื่องบน \mathbb{R}^2 |
| 2.5 | f ต่อเนื่องบน $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 - 1 \geq 0\}$ | | |
| 2.6 | f ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y - 1 = 0\}$ | | |

แบบฝึกหัด 6.4

1) 1.1 $f_x(x, y) = -3y, f_y(x, y) = 5y^4 - 3x$

1.2 $f_x(x, t) = -\pi e^{-t} \sin(\pi x), f_t(x, t) = -e^{-t} \cos(\pi x)$

1.3 $f_x(x, t) = \frac{\ln(t)}{2\sqrt{x}}, f_t(x, t) = \frac{\sqrt{x}}{t}$

1.4 $\frac{\partial z}{\partial x} = 20(2x+3)^9, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

1.5 $f_x(x, t) = \frac{2y}{(x+y)^2}, f_y(x, t) = \frac{-2x}{(x+y)^2}$

1.6 $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

1.7 $f_x(x, y) = y \sec^2(xy), f_y(x, y) = x \sec^2(xy)$

1.8 $f_r(r, s) = \frac{2r^2}{r^2+s^2} + \ln(r^2+s^2), f_s(r, s) = \frac{2rs}{r^2+s^2}$

1.9 $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{w}{t} e^{\frac{w}{t}} + e^{\frac{w}{t}}, \frac{\partial u}{\partial w} = e^{\frac{w}{t}}$

1.10 $f_x(x, y, z) = y - 10xy^3z^4, f_y(x, y, z) = x - 15x^2y^2z^4, f_z(x, y, z) = -20x^2y^3z^3$

1.11 $\frac{\partial w}{\partial x} = yz^2 e^{xyz}, \frac{\partial w}{\partial y} = xz^2 e^{xyz}, \frac{\partial w}{\partial z} = xyz e^{xyz} + e^{xyz}$

1.12 $f_x(x, y, z) = y \arcsin(yz), f_y(x, y, z) = \frac{xyz}{\sqrt{1-y^2z^2}} + x \arcsin(yz), f_z(x, y, z) = \frac{xy^2}{\sqrt{1-y^2z^2}}$

2) 2.1 $\frac{1}{5}$ 2.2 $-\frac{3}{13}$ 2.3 0

3) 3.1 $f_x(2, -3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x, -3) - f(2, -3)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(2+\Delta x)(-3)^2 - (2+\Delta x)^3(-3)] - [(2)(-3)^2 - (2)^3(-3)]}{\Delta x}$$

$$f_x(2, -3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(45 + 18\Delta x + 3(\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [45 + 18\Delta x + 3(\Delta x)^2] = 45$$

$$\begin{aligned}
f_y(2, -3) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(2, -3 + \Delta y) - f(2, -3)}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{[(2)(-3 + \Delta y)^2 - (2)^3(-3 + \Delta y)] - [(2)(-3)^2 - (2)^3(-3)]}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y(2\Delta y - 20)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [2\Delta y - 20] = -20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.2 \quad f_x(2, -3) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x, -3) - f(2, -3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 + \Delta x}{(2 + \Delta x) + (-3)^2} - \frac{2}{(2) + (-3)^2}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \left(\frac{9}{11(11 + \Delta x)} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{9}{11(11 + \Delta x)} \right) = \frac{9}{121}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y(2, -3) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(2, -3 + \Delta y) - f(2, -3)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{2 + (-3 + \Delta y)^2} - \frac{2}{2 + (-3)^2}}{\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y \left(\frac{12 - 2\Delta y}{11(11 - 6\Delta y + (\Delta y)^2)} \right)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{12 - 2\Delta y}{11(11 - 6\Delta y + (\Delta y)^2)} = \frac{12}{121}
\end{aligned}$$

$$4) \quad 4.1 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3yz - 2x}{2z - 3xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3yz - 2x}{2z - 3xy} \quad 4.2 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{xy + yz - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz + z^2}{1 - xy - yz}$$

$$4.3 \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - yz \cos(xyz)}{xy \cos(xyz) - 3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2 - xz \cos(xyz)}{xy \cos(xyz) - 3}$$

$$5) \quad 5.1 \quad f_{xx}(x, y) = 6xy^5 + 24x^2y, \quad f_{xy}(x, y) = 15x^2y^4 + 8x^3, \quad f_{yx}(x, y) = 15x^2y^4 + 8x^3,$$

$$f_{yy}(x, y) = 20x^3y^3$$

$$5.2 \quad f_{xx}(x, y) = 2m^2 \cos[2(mx + ny)], \quad f_{xy}(x, y) = 2mn \cos[2(mx + ny)],$$

$$f_{yx}(x, y) = 2mn \cos[2(mx + ny)], \quad f_{yy}(x, y) = 2n^2 \cos[2(mx + ny)]$$

$$5.3 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{v^2}{(u^2 + v^2)\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} = \frac{-uv}{(u^2 + v^2)\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{-uv}{(u^2 + v^2)\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{u^2}{(u^2 + v^2)\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$5.4 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-2y}{(1+y^2)^2}$$

$$6) \quad 6.1 \quad f_{xxy}(x, y) = 12xy, \quad f_{yyy}(x, y) = 72xy$$

$$6.2 \quad f_{tt}(x, t) = -c^3 x^2 e^{-ct}, \quad f_{txx}(x, t) = -2ce^{-ct}$$

$$6.3 \quad f_{xyz}(x, y, z) = 24 \sin(4x + 3y + 2z), \quad f_{yzz}(x, y, z) = 12 \sin(4x + 3y + 2z)$$

$$6.4 \quad f_{rss}(r, s, t) = -\frac{2}{s^2}, \quad f_{rst}(r, s, t) = 0$$

$$7) \quad 7.1 \quad \frac{dw}{dt} = 2 \sin t \cos t + e^t \cos t + 2e^{2t} + e^t \sin t$$

$$7.2 \quad \frac{dw}{dt} = -20t^3 \sin\left(5t^4 + \frac{4}{t}\right) + \frac{4}{t^2} \sin\left(5t^4 + \frac{4}{t}\right)$$

$$7.3 \quad \frac{dw}{dt} = \frac{e^{-t} + e^t}{1 + (1 - e^{-t} + e^t)^2}$$

$$7.4 \quad \frac{dw}{dt} = \sec(\cos t \sin t) \tan(\cos t \sin t) (\cos^2 t - \sin^2 t)$$

$$7.5 \quad \frac{dw}{dt} = 2e^{2t} \sin t + 3e^t \sin^4 t + e^{2t} \cos t + 12e^t \sin^3 t \cos t$$

$$7.6 \quad \frac{dw}{dt} = 6t^5 + 4t + 4t^3$$

$$7.7 \quad \frac{dw}{dt} = \tan t$$

$$8) \quad 8.1 \quad \frac{\partial z}{\partial s} = 2s \sin t \cos t, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = s^2 (\cos^2 t - \sin^2 t)$$

$$8.2 \quad \frac{\partial z}{\partial s} = te^{\frac{st+2s}{t}} + \frac{2e^{\frac{st+2s}{t}}}{t}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = se^{\frac{st+2s}{t}} + \frac{2se^{\frac{st+2s}{t}}}{t^2}$$

$$8.3 \quad \frac{\partial z}{\partial s} = te^{st \cos(\sqrt{s^2+t^2})} \cos(\sqrt{s^2+t^2}) - \frac{s^2 t e^{st \cos(\sqrt{s^2+t^2})} \sin(\sqrt{s^2+t^2})}{\sqrt{s^2+t^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = se^{st \cos(\sqrt{s^2+t^2})} \cos(\sqrt{s^2+t^2}) - \frac{st^2 e^{st \cos(\sqrt{s^2+t^2})} \sin(\sqrt{s^2+t^2})}{\sqrt{s^2+t^2}}$$

แบบฝึกหัด 6.5

1) 1.1 f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ มีค่าเท่ากับ $f\left(-1, \frac{1}{2}\right) = 11$

1.2 จุด $(2, -4)$ เป็นจุดอานม้า

1.3 จุด $(0, 0)$ เป็นจุดอานม้า,

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(1, 1)$ มีค่าเท่ากับ $f(1, 1) = 0$

f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $(-1, -1)$ มีค่าเท่ากับ $f(-1, -1) = 0$

1.4 f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $(0, 2)$ มีค่าเท่ากับ $f(0, 2) = e^4$

1.5 จุด $(1, -1)$ และ $(-1, 1)$ เป็นจุดอานม้า

1.6 จุด $(-1, 2)$ และ $(-1, -2)$ เป็นจุดอานม้า

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(0, 0)$ มีค่าเท่ากับ $f(0, 0) = 0$

f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ มีค่าเท่ากับ $f\left(-\frac{5}{3}, 0\right) = \frac{125}{27}$

1.7 จุด $(0, 0)$ เป็นจุดอานม้า

f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(2, 1)$ มีค่าเท่ากับ $f(2, 1) = -8$

1.8 f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(1, 1)$ มีค่าเท่ากับ $f(1, 1) = 3$

2) 2.1 ค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนโดเมน D คือ 9 และ -14 ตามลำดับ

2.2 ค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนโดเมน D คือ 13 และ 0 ตามลำดับ

2.3 ค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนโดเมน D คือ 83 และ 0 ตามลำดับ

2.4 ค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนโดเมน D คือ 2 และ 0 ตามลำดับ

- 3) กล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ต้องคือ กล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวด้านยาว 10 เซนติเมตร
- 4) จำนวนบวก 3 จำนวนที่มีผลรวมเป็น 100 ซึ่งทำให้ผลคูณของ 3 จำนวนมีค่ามากที่สุดคือ $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$
- 5) กล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีปริมาตรมากที่สุด ซึ่งมีพื้นที่ผิวเป็น 64 ตารางเซนติเมตร คือ กล่องทรงลูกบาศก์ที่มีความยาวด้านเป็น $\frac{8}{\sqrt{6}}$ เซนติเมตร
- 6) ตู้ปลาสี่เหลี่ยมมุมฉากที่ทำให้ค่าใช้จ่ายในการทำน้อยที่สุด มีความกว้าง ความยาว และความสูงเป็น 20, 20, 50 เซนติเมตร ตามลำดับ
- 7) ปริมาตรที่มากที่สุดของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่บรรจุในทรงกลมรัศมี r เท่ากับ $\frac{8}{3\sqrt{3}}r^3$

แบบฝึกหัด 7.1

- 1) 1.1 $x = -3t^2 - 4, y = t, t \in \mathbb{R}$
- 1.2 $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \theta, y = 1 + \sec \theta, \theta \in \mathbb{R} - \left\{ x \mid x = \frac{(2n-1)\pi}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$
- 1.3 $x = 1 + t^2, y = t, t \leq 1$
- 1.4 $x = 3 \cos \theta, y = 4 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ (การหาสมการอิงตัวแปรเสริมอาจมีได้หลายรูปแบบ เฉลยนี้เป็นแค่ตัวอย่างหนึ่งเท่านั้น)
- 2) 2.1 $y = \frac{1}{10}(x^2 + 16x + 69)$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ 2.2 $x = \sqrt{6y + 13}$ เมื่อ $y \geq -2$
- 2.3 $9x^2 + y^2 = 9$ 2.4 $4x^2 + 9y^2 = 36$
- 2.5 $4y^2 - 9x^2 + 20y + 61 = 0$ 2.6 $y = \sqrt{x}$

แบบฝึกหัด 7.2

- 1) 1.1 $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{9t^2 + 8}$ 1.2 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2t^2}$
- 1.3 $\frac{dy}{dx} = -\cot \theta$ 1.4 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t^3}$
- 1.5 $\frac{dy}{dx} = -e^{-2t}$ 1.6 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \csc(2t)$
- 2) 2.1 $2x - 3y + 1 = 0$ 2.2 $y = 2x - \sqrt{3}$

$$2.3 \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}$$

$$2.4 \quad y = -\frac{2}{e^2}x + \frac{2}{e^2}\ln 2 + \frac{1}{e^2}$$

$$2.5 \quad x + 4y + 8 = 0$$

$$2.6 \quad y = x$$

$$3) \quad 3.1 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{90t}{(9t^2 + 8)^3}$$

$$3.2 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{3t^6}$$

$$3.3 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{3}\csc^3 \theta$$

$$3.4 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{t^6}$$

$$3.5 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{-3t}$$

$$3.6 \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{8}\cot^3 2t$$

แบบฝึกหัด 7.3

$$1) \quad 1.1 \quad \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right) \quad 1.2 \quad (1,1) \quad 1.3 \quad \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$1.4 \quad \left(\frac{-7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2}\right) \quad 1.5 \quad (-3\sqrt{3}, -3) \quad 1.6 \quad (5,0)$$

$$1.7 \quad (0, -2) \quad 1.8 \quad (-5, 0) \quad 1.9 \quad (0, 0)$$

$$1.10 \quad (0, 0) \quad 1.11 \quad (0, 2) \quad 1.12 \quad \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$2) \quad 2.1 \quad (5, \pi) \quad 2.2 \quad \left(8\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \quad 2.3 \quad \left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$2.4 \quad \left(2, \frac{\pi}{2}\right) \quad 2.5 \quad \left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right) \quad 2.6 \quad \left(4, \frac{-\pi}{6}\right)$$

$$2.7 \quad \left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \quad 2.8 \quad \left(4, \frac{4\pi}{3}\right) \quad 2.9 \quad (5, 0)$$

$$2.10 \quad \left(2, \frac{-\pi}{2}\right) \quad 2.11 \quad \left(4, \frac{\pi}{3}\right) \quad 2.12 \quad \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$3) \quad 3.1 \quad (-5, 0) \quad 3.2 \quad \left(-8\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) \quad 3.3 \quad \left(-6, \frac{-\pi}{3}\right)$$

$$3.4 \quad \left(-2, \frac{-\pi}{2}\right) \quad 3.5 \quad \left(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) \quad 3.6 \quad \left(-4, \frac{5\pi}{6}\right)$$

3.7 $\left(-\sqrt{2}, \frac{-\pi}{4}\right)$

3.8 $\left(-4, \frac{\pi}{3}\right)$

3.9 $(-5, \pi)$

3.10 $\left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$

3.11 $\left(-4, \frac{-2\pi}{3}\right)$

3.12 $\left(-\sqrt{2}, \frac{-3\pi}{4}\right)$

4) 4.1 $\left(3, \frac{-7\pi}{4}\right), \left(-3, \frac{-3\pi}{4}\right), \left(-3, \frac{5\pi}{4}\right)$

4.2 $(1, \pi), (1, -\pi), (-1, 2\pi)$

4.3 $\left(1, \frac{-\pi}{2}\right), \left(-1, \frac{-3\pi}{2}\right), \left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$

4.4 $\left(3, \frac{7\pi}{4}\right), \left(-3, \frac{3\pi}{4}\right), \left(-3, \frac{-5\pi}{4}\right)$

4.5 $\left(2, \frac{-5\pi}{3}\right), \left(-2, \frac{-2\pi}{3}\right), \left(-2, \frac{4\pi}{3}\right)$

4.6 $\left(0, \frac{-11\pi}{6}\right), \left(0, \frac{-5\pi}{6}\right), \left(0, \frac{7\pi}{6}\right)$

4.7 $\left(3, \frac{3\pi}{4}\right), \left(3, \frac{-5\pi}{4}\right), \left(-3, \frac{7\pi}{4}\right)$

4.8 $\left(2, \frac{5\pi}{3}\right), \left(-2, \frac{2\pi}{3}\right), \left(-2, \frac{-4\pi}{3}\right)$

4.9 $(5, -2\pi), (-5, \pi), (-5, -\pi)$

4.10 $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right), \left(4, \frac{-4\pi}{3}\right), \left(-4, \frac{5\pi}{3}\right)$

4.11 $\left(3, \frac{-3\pi}{4}\right), \left(3, \frac{5\pi}{4}\right), \left(-3, \frac{-7\pi}{4}\right)$

4.12 $\left(2, \frac{-2\pi}{3}\right), \left(2, \frac{4\pi}{3}\right), \left(-2, \frac{-5\pi}{3}\right)$

5) 5.1 $r = \frac{6}{\cos \theta - 4 \sin \theta}$

5.2 $r^2 = 9$

5.3 $\tan \theta = 2$

5.4 $r = \frac{6}{\cos \theta}$

5.5 $r = \frac{-1}{\sin \theta}$

5.6 $r^2(9 + 7 \sin^2 \theta) = 144$

6) 6.1 $y = \frac{1}{2}$

6.2 $x^2 + y^2 = 4y$

6.3 $y^2 = 2x - x^2$

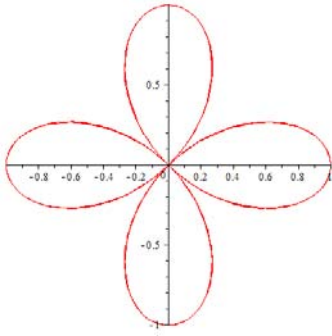
6.4 $x = \frac{2}{5}$

6.5 $2(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2} - x$

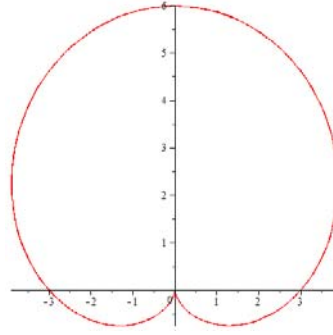
6.6 $x^3 + xy^2 = 2y^2$

แบบฝึกหัด 7.4

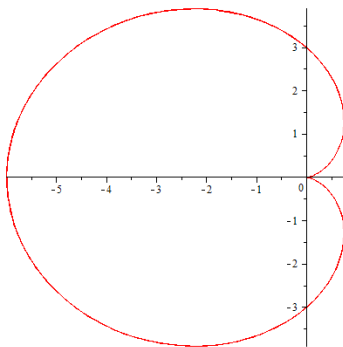
1) 1.1



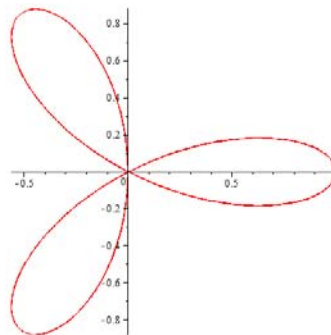
1.2



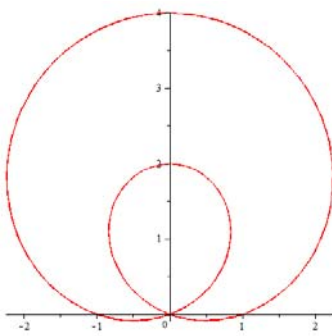
1.3



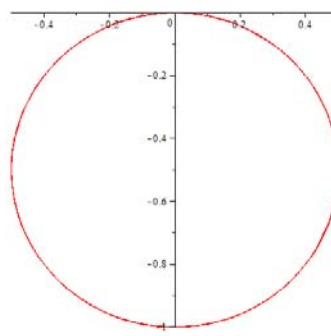
1.4



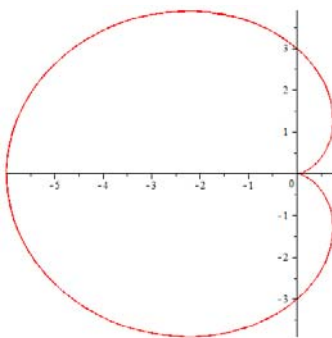
1.5



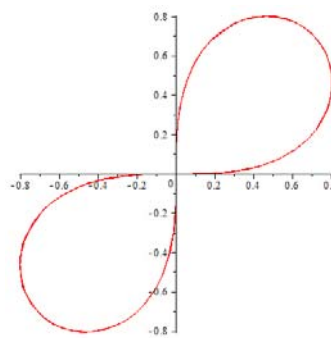
1.6

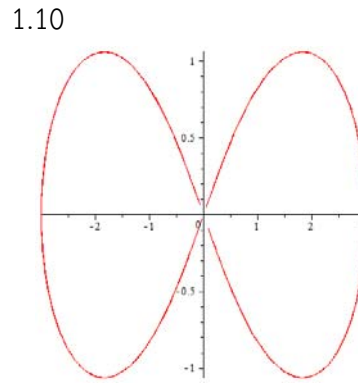
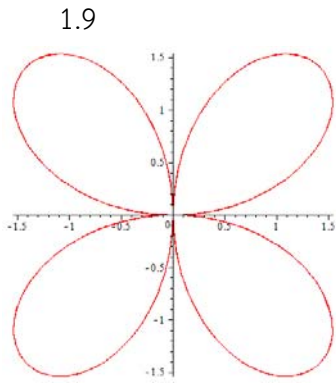


1.7



1.8





แบบฝึกหัด 7.5

1) 1.1 $\frac{9\pi}{2}$

1.2 9

1.3 8

1.4 $\frac{3\pi}{2}$

1.5 $\frac{3\pi}{2}$

1.6 $\frac{9\pi}{2}$

1.7 $\frac{3\pi}{2}$

1.8 $\frac{9\pi}{4}$

2) 2.1 $2 + \pi$

2.2 3π

2.3 8

2.4 1

2.5 $2 - \frac{\pi}{2}$

แบบฝึกหัด 8.1

1) 1.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ 1 ระดับชั้นที่ 1

1.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ 2 ระดับชั้นที่ 1

1.3 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ 4 ระดับชั้นที่ 2

1.4 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ระดับชั้นที่ 2

1.5 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 1 ระดับชั้นที่ 1

1.6 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ระดับชั้นที่ 1

1.7 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ 2 ระดับชั้นที่ 1

1.8 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่ 5 ระดับชั้นที่ 1

แบบฝึกหัด 8.2

1) 1.1 ไม่เป็น

1.2 เป็น

- | | | | |
|-----|---------|-----|---------|
| 1.3 | เป็น | 1.4 | ไม่เป็น |
| 1.5 | เป็น | 1.6 | เป็น |
| 1.7 | ไม่เป็น | 1.8 | เป็น |
-
- | | | | | |
|----|-----|------------------------------|-----|-------------------------------------|
| 2) | 2.1 | $y = \pm\sqrt{2\sin(x)+c}$ | 2.2 | $y = ce^{e^x}$ |
| | 2.3 | $y = e^{\sin(x)} + c$ | 2.4 | $y = \frac{c}{x}$ |
| | 2.5 | $y = ce^{-x\cos(x)+\sin(x)}$ | 2.6 | $y = \pm\sqrt{x^2 - 2\sqrt{2} + c}$ |
-
- | | | | | |
|----|-----|---------------------|-----|---|
| 3) | 3.1 | $y = e^{x^2-x}$ | 3.2 | $y = \pm\sqrt{-x^2+1}$ |
| | 3.3 | $y = 2e^{-\cos(x)}$ | 3.4 | $y = \frac{3}{2x^2} + \frac{x^3}{3} - \frac{41}{2}$ |

แบบฝึกหัด 8.3

- | | | | | |
|----|-----|---------------|-----|-------------------------------|
| 1) | 1.1 | สมการเชิงเส้น | 1.2 | สมการเอกพันธ์และสมการเชิงเส้น |
| | 1.3 | สมการเอกพันธ์ | 1.4 | สมการเชิงเส้น |
| | 1.5 | - | 1.6 | สมการเชิงเส้น |
| | 1.7 | สมการเชิงเส้น | 1.8 | สมการเอกพันธ์ |
-
- | | | | | |
|----|-----|--|-----|--|
| 2) | 2.1 | $y(x) = ce^{x(x-1)}$ | 2.2 | $y(x) = \pm \frac{\sqrt{x(x^5+5c)}}{\sqrt{5x^2}}$ |
| | 2.3 | $y(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}\sin(x) + ce^x$ | 2.4 | $y(x) = \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-2x^4+4c}}{2}$ |
| | 2.5 | $y(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} x \left(\sqrt{3} + 3 \tan \left(\frac{1}{2} (\ln(x) + c) \sqrt{3} \right) \right)$ | | |
| | 2.6 | $y(x) = x^2(c + \sin(x)) - x^3 \cos(x)$ | | |

แบบฝึกหัด 8.4

- | | | | | |
|----|-----|-------------------|-----|--|
| 1) | 1.1 | $x^2y^2 + 2x = C$ | 1.2 | $\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C$ |
|----|-----|-------------------|-----|--|

$$1.3 \quad \sin(x)\cos(y) + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = C$$

$$1.4 \quad e^x y + x - y = C$$

1.5 ไม่เป็นสมการแม่นตรง

$$1.6 \quad \frac{x^2}{2} - y \sin(x) = C$$

2) 2.1 $\frac{1}{y^2}, x + \frac{x^2}{y} = c$

2.2 $\frac{1}{y^2}, \frac{x}{y} + \ln|y| = c$

2.3 $\frac{1}{x^3}, \frac{-y}{x^2} + \ln|x| = c$

2.4 $\frac{1}{x^2}, \frac{-y}{x} + \frac{x^3}{3} + \ln|x| = c$

2.5 อ่านตัวอย่างในหนังสือได้

2.6 $x^{-\frac{1}{3}}, \left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{2}{3}}y^2 + \left(\frac{3}{8}\right)x^{\frac{8}{3}} = c$

แบบฝึกหัด 8.5

1) หลังจากผ่านไป 24 ชั่วโมงจำนวนของแบคทีเรียจะเพิ่มขึ้นเป็น $2^{24} = 16777216$ เท่าของจำนวนแบคทีเรียในตอนแรก

2) ให้ t เป็นเวลาซึ่งหน่วยเป็นชั่วโมงและ $x(t)$ เป็นจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง จะได้ว่าตัวแบบจำลองของจำนวนแบคทีเรียนี้คือ $x(t) = 1000 \cdot 3^{\frac{t-1}{3}}$

3) 3.1 ให้ t เป็นเวลาซึ่งหน่วยเป็นชั่วโมงและ $x(t)$ เป็นจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง จะได้ว่าตัวแบบจำลองของจำนวนแบคทีเรียนี้คือ $x(t) = 600 \cdot (1.4)^{\frac{t}{4}}$

3.2 1646 ตัว

3.3 $600 \cdot (1.4)^{84} \approx 1.1296 \times 10^{15}$ ตัว

3.4 $4 \log_{1.4}(4) \approx 16.48$ ชั่วโมง

4) 4.1 ให้ t เป็นเวลาซึ่งหน่วยเป็นชั่วโมงและ $x(t)$ เป็นจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่เมื่อเวลาผ่านไป t ชั่วโมง จะได้ว่าตัวแบบจำลองของจำนวนแบคทีเรียนี้คือ $x(t) = 50000 \cdot (0.9)^{\frac{t}{4}}$

3.2 26,572 ตัว

3.3 $\log_{0.9}(0.0625) \approx 26.32$ ชั่วโมง

5) ให้ t เป็นเวลาซึ่งหน่วยเป็นนาฬิกาและ $x(t)$ เป็นน้ำหนักของสปริงเมื่อเวลาผ่านไป t นาฬิกา จะได้ว่าตัวแบบจำลองของจำนวนแบคทีเรียนี้คือ $x(t) = \frac{150t}{3t + 70}$