ชุดฝึกหัด 9
การหาอนุพันธ์โดยกฎลูกโซ่

1. จงหาอนุพันธ์ f' ในข้อต่อไปนี้

1.1 $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$

1.2 $f(z) = \left(\frac{z}{z+1}\right)^3$

1.3 $f(w) = \frac{(3w+1)^4}{w}$

1.4 $f(t) = \left(\frac{3t^2+1}{t^3-1}\right)^2$

1.5 $f(x) = \left(\frac{x^3+4}{x^2-1}\right)^3$

1.6 $f(x) = (x^2-2)^3(3x^4+1)^2$

1.7 $f(x) = [5x + (3x+6x^2)^3]^4$

1.8 $f(x) = [2x - (3x^2+4x^3)^4]^2$

1.9 $f(x) = \frac{3}{x^5+2x^2-3}$

1.10 $f(x) = \frac{1}{(x^3-4x+1)^{100}}$

1.11 $f(x) = \frac{(3x^3-2x)^{-3}}{(x^2+5)^{-2}}$

1.12 $f(x) = \sqrt{3x^8 - 3 + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}}$

1.13 $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$

1.14 $f(x) = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+x}}}$

2. จงหาอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx}$ เมื่อกำหนด y ในรูปฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ในข้อต่อไปนี้

2.1 $y = |x|$

2.2 $y = |g(x)|$

2.3 $y = |5-x^2|$

2.4 $y = |2x-1|$

2.5 $y = |x^5|$

2.6 $y = (|x+1| - |x|)^2$

3. จงหาอนุพันธ์ที่กำหนดไว้ในข้อต่อไปนี้

3.1 $\frac{d}{dx} f(x^2+1)$

3.2 $\frac{d}{dx} g(\sqrt{x})$

3.3 $\frac{d}{dx} f(1-x^2)$

3.4 $\frac{d}{dx} f(\frac{x+1}{x-1})$

3.5 $\frac{d}{dx} f(\frac{1-x}{1+x})$

3.6 $\frac{d}{dx} \sqrt{g(x^2)}$

3.7 $\frac{d}{dx} \sqrt{f^2(x) - 3g(x^2)}$

4. จงหาอนุพันธ์ y' ของฟังก์ชันไม่เด่นชัดในข้อต่อไปนี้

4.1 $x^2y + xy^2 = 6(x^2+y^2)$

4.2 $x^{1/3} + y^{2/3} = 5$

4.3 $(x^3 + y)^4 = x$

4.4 $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 1$

4.5 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4$

4.6 $|x| + |y| = 1$

5. จงหา y' และ y" ในเทอมของ x และ y จากข้อต่อไปนี้

5.1 $xy + y^2 - x^2 = 5$

5.2 $xy + yx^2 = 2$

6. กำหนดให้ $h = fog$ โดยที่ $f'(2) = 6$, $f(1) = 4$, $g(1) = 2$ และ $g'(1) = -2$ จงหาค่าของ $h'(1)$

7. กำหนดให้ $f(x) = x^3+4$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ จงหา $(gof)'(x)$

8. กำหนดให้ $y = u^5+u$ และ $u = 4x^3+x-4$ จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 1$

9. จงหา $\frac{d}{dx} f(h(x))$ เมื่อกำหนด $\frac{d}{dx} f(x) = g(x)$ และ $h(x) = x^2$

10. กำหนดให้ $h(x) = f(x)g(x)$ โดยที่ $h''(0) = -12$, $f(x) = (x^4-3x+1)^3$, $g(0) = 1$ และ $g'(0) = 4$ จงหาค่าของ $g''(0)$

11. จงหา $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ เมื่อกำหนด $(x + y)^3 - 5x + y = 1$

12. กำหนดให้ $f(x) = 2x^3+x^2-6x+2$ เมื่อ $x > 0$ และ g เป็นฟังก์ชันผกผันของ f จงหาค่าของ $g'(2)$

13. กำหนดให้ $f(x) = 2x^3+x-3$ และ g เป็นฟังก์ชันผกผันของ f จงหาค่าของ $g'(-3)$ และ $g'(0)$

14. จงเขียนสมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x\sqrt{x + (x-1)^2}$ ที่จุด $(2, 2\sqrt{3})$

15. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดโดยสมการ $3(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ ที่จุด $(2, 1)$

16. กำหนด $f(x) = 2 + |x-3|$ จงพิจารณาว่า $f''(x)$ หาค่าได้ที่ $x = 3$ หรือไม่

17. จงหาค่า a และ b ที่ทำให้ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x \le 1 \\ \dfrac{1}{|x|}, & x > 1 \end{cases}$

เป็นฟังก์ชั่นมีอนุพันธ์ที่ $x = 1$

$3(x+y)^2(1+y') - 5 + y' = 0$

$(x+y)^3 -$

$3(x^2+y^2)^2 =$

เฉลยชุดฝึกหัด 9

1. 1.1 $f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\left(x - \frac{1}{x}\right)' = 3\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\left[1 - (-1)x^{-2}\right] = 3\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$

1.2 $f'(z) = 3\left(\frac{z}{z+1}\right)^2\left(\frac{z}{z+1}\right)' = 3\left(\frac{z}{z+1}\right)^2\left[\frac{(z+1) - z}{(z+1)^2}\right] = \frac{3z^2}{(z+1)^3}$

1.3 $f'(w) = \frac{4w(3w+1)^3(3) - (3w+1)^4}{w^2} = \frac{(3w+1)^3(9w-1)}{w^2}$

1.4
$$
\begin{aligned}
f'(t) &= 2\left(\frac{3t^2+1}{t^3-1}\right)\left[\frac{(t^3-1)(3t^2+1)' - (3t^2+1)(t^3-1)'}{(t^3-1)^2}\right] \\
&= 2\left(\frac{3t^2+1}{t^3-1}\right)\left[\frac{(t^3-1)(6t) - (3t^2)(3t^2+1)}{(t^3-1)^2}\right] = 2\left(\frac{3t^2+1}{t^3-1}\right)\left[\frac{6t^4- 6t- 9t^4-3t^2}{(t^3-1)^2}\right] \\
&= \frac{-6t\,(3t^2+1)(t^3+t+2)}{(t^3-1)^3}
\end{aligned}
$$

1.5
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3\left(\frac{x^3+4}{x^2-1}\right)^2\left[\frac{(x^2-1)(x^3+4)' - (x^3+4)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}\right] \\
&= 3\left(\frac{x^3+4}{x^2-1}\right)^2\left[\frac{3x^2(x^2-1) - 2x(x^3+4)}{(x^2-1)^2}\right] = 3\left(\frac{x^3+4}{x^2-1}\right)^2\left[\frac{3x^4-3x^2 - 2x^4-8x}{(x^2-1)^2}\right] \\
&= \frac{3x(x^3+4)^2(x^3-3x-8)}{(x^2-1)^4}
\end{aligned}
$$

1.6
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[(x^2-2)^3\right]'(3x^4+1)^2 + (x^2-2)^3\left[(3x^4+1)^2\right]' \\
&= 3(x^2-2)^2(2x)(3x^4+1)^2 + (x^2-2)^3(2)(3x^4+1)(12x^3) \\
&= 6x(x^2-2)^2(3x^4+1)^2 + 24x^3(3x^4+1)(x^2-2)^3
\end{aligned}
$$

1.7 $f'(x) = 4\left[5x + (3x + 6x^2)^3\right]^3\left[5 + 3(3x+6x^2)^2(3+12x)\right]$

1.8 $f'(x) = 2\left[2x - (3x^2+4x^3)^4\right]\left[2 - 4(3x^2+4x^3)^3(6x+12x^2)\right]$

1.9 $f'(x) = \left[3(x^5+2x^2-3)^{-1}\right]' = 3(-1)(x^5+2x^2-3)^{-2}(x^5+2x^2-3)' = \dfrac{-3(5x^4+4x)}{(x^5+2x^2-3)^2}$

1.10 $f'(x) = \dfrac{-100(x^3-4x+1)^{99}(3x^2-4)}{(x^3-4x+1)^{200}} = \dfrac{-100(3x^2-4)}{(x^3-4x+1)^{101}}$

1.11 $$f'(x) = \left[\frac{(x^2+5)^2}{(3x^3-2x)^3}\right]' = \frac{(3x^3-2x)^3(2)(x^2+5)(2x) - (x^2+5)^2(3)(3x^3-2x)^2(9x^2-2)}{(3x^3-2x)^6}$$
$$= \frac{4x(x^2+5)(3x^3-2x)^3 - 3(9x^2-2)(x^2+5)^2(3x^3-2x)^2}{(3x^3-2x)^6}$$

1.12 ให้ $u = 3x^8 - 3 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ แล้ว

$$\frac{du}{dx} = 24x^7 - \frac{1}{2}(x^2+4)^{-3/2}(2x) = 24x^7 - \frac{x}{\sqrt{x^2+4)^3}}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\left(24x^7 - \dfrac{x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}\right)$

1.13 ให้ $u = 1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, $v = 1+\sqrt{1+x}$ และ $w = 1+x$ ดังนั้น

$$f'(x) = \frac{d\sqrt{u}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{d}{dx}\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{d\sqrt{v}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{d}{dx}\left(1+\sqrt{1+x}\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot\frac{d\sqrt{w}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{w}}\cdot\frac{dw}{dx}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{w}}\cdot\frac{d}{dx}(1+x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{1}{2\sqrt{w}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

1.14 ให้ $u = 1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$, $v = 1+\dfrac{1}{1+x}$ และ $w = 1+x$ แล้ว

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{u^2}\frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{v}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{u^2}\right)\left(-\frac{1}{v^2}\right)\frac{dv}{dx} = \left(-\frac{1}{u^2}\right)\left(-\frac{1}{v^2}\right)\frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{w}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{u^2}\right)\left(-\frac{1}{v^2}\right)\left(-\frac{1}{w^2}\right)\frac{dw}{dx} = \left(-\frac{1}{u^2}\right)\left(-\frac{1}{v^2}\right)\left(-\frac{1}{w^2}\right)$$

2. 2.1 $y = |x| = \sqrt{x^2} = (x^2)^{1/2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2)^{1/2}} = \frac{x}{|x|}$$

2.2 โดยใช้ข้อ 2.1 และกฎลูกโซ่จะได้ $y' = \frac{g(x) \cdot g'(x)}{|g(x)|}$, $g(x) \neq 0$

2.3 โดยใช้สูตรของ 2.2 โดย $g(x) = 5-x^2$ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5-x^2)(5-x^2)'}{|5-x^2|} = \frac{-2x(5-x^2)}{|5-x^2|} = \frac{2x^3 - 10x}{|5-x^2|}$$

2.4 $y' = \frac{(2x-1)(2)}{|2x-1|} = \frac{4x-2}{|2x-1|}$

2.5 $y' = \frac{(x^5)(5x^4)}{|x^5|} = \frac{5x^9}{|x^5|}$

2.6 $y' = 2(|x+1| - |x|)\left[(|x+1|)' - (|x|)'\right] = 2(|x+1| - |x|)\left[\frac{x+1}{|x+1|} - \frac{x}{|x|}\right]$

3. 3.1 $\frac{d}{dx} f(x^2+1) = \frac{df(x^2+1)}{d(x^2+1)} \cdot \frac{d(x^2+1)}{dx} = f'(x^2+1)(2x) = 2x\, f'(x^2+1)$

3.2 $\frac{d}{dx} g(\sqrt{x}) = \frac{d\, g(\sqrt{x})}{d(\sqrt{x})} \cdot \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot g'(\sqrt{x})$

3.3 $\frac{d}{dx} f(1-x^2) = \frac{df(1-x^2)}{d(1-x^2)} \cdot \frac{d(1-x^2)}{dx} = -2x \cdot f'(1-x^2)$

3.4 ให้ $u = \frac{x+1}{x-1}$ แล้ว $\frac{du}{dx} = \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$ ดังนั้น

$$\frac{d}{dx} f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \frac{du}{dx} = f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)$$

3.5 เช่นเดียวกับข้อ 3.4 เราจะได้

$$\frac{d}{dx} f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = f'\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\left[\frac{(1+x)(-1) - (1-x)(1)}{(x+1)^2}\right] = \frac{-2}{(x+1)^2} \cdot f'\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

3.6 $\frac{d}{dx}\sqrt{g(x^2)} = \frac{1}{2\sqrt{g(x^2)}} \cdot \frac{d}{dx} g(x^2) = \frac{1}{2\sqrt{g(x^2)}} \cdot g'(x^2).(2x) = \frac{x\, g'(x^2)}{\sqrt{g(x^2)}}$

3.7 $\frac{d}{dx}\sqrt{f^2(x) - 3g(x^2)} = \frac{1}{2\sqrt{f^2(x) - 3g(x^2)}} \cdot \frac{d}{dx}\left[f^2(x) - 3g(x^2)\right]$

$= \frac{2f(x) . f'(x) - 3g'(x^2) . (2x)}{2\sqrt{f^2(x) - 3g(x^2)}}$

4. 4.1 $2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' = 6(2x + 2yy') = 12x + 12yy'$

หรือ $(x^2 + 2xy - 12y)y' = 12x - 2xy - y^2$

$\therefore\ y' = \frac{12x - 2xy - y^2}{x^2 + 2xy - 12y}$

4.2 $\frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0 \qquad \therefore\ y' = \left(-\frac{x^{-2/3}}{3}\right)\left(\frac{3}{2y^{-1/3}}\right) = -\frac{y^{1/3}}{2x^{2/3}}$

4.3 $4(x^3+y)^3(3x^2+y') = 1$ หรือ $12x^2(x^3+y)^3 + 4(x^3+y)^3y' = 1$

$\therefore\ y' = \frac{1 - 12x^2(x^3 + y)^3}{4(x^3 + y)^3}$

4.4 $\frac{-2}{x^3} + \frac{2}{y^3} . y' = 0 \qquad \therefore\ y' = (\frac{2}{x^3})(\frac{y^3}{2}) = (\frac{y}{x})^3$

4.5 $\frac{y - xy'}{y^2} + \frac{xy' - y}{x^2} = 0$ หรือ $\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}y' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0$

ดังนั้น $\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)y' = \frac{y}{x^2} - \frac{1}{y}$ หรือ $\frac{y^2-x^2}{xy^2} . y' = \frac{y^2-x^2}{x^2y}$

$\therefore\ y' = \frac{y^2-x^2}{x^2y} \cdot \frac{xy^2}{y^2-x^2} = \frac{y}{x} \quad (x^2 \neq y^2 \neq 0)$

4.6 $\frac{x}{|x|} + \frac{yy'}{|y|} = 0 \qquad \therefore\ y' = (-\frac{x}{|x|})(\frac{|y|}{y}) = (\frac{-x}{y})(\frac{|y|}{|x|}) = \frac{-x}{y}\frac{|y|}{|x|}$

5. 5.1 $y + xy' + 2yy' - 2x = 0$ .....(1)

จะได้ $(x+2y)y' = 2x-y$ หรือ $y' = \dfrac{2x-y}{x+2y}$

จาก (1), $y' + xy'' + y' + 2yy'' + 2(y')^2 - 2 = 0$ ทำให้ได้

$$(x+2y)y'' = 2 - 2y' - 2(y')^2 = 2\left[1 - \frac{2x-y}{x+2y} - \left(\frac{2x-y}{x+2y}\right)^2\right]$$

$$= 2\left[\frac{x^2+4xy+4y^2 - 2x^2-3xy+2y^2 - 4x^2+4xy - y^2}{(x+2y)^2}\right] = \frac{10(y^2+xy - x^2)}{(x+2y)^2}$$

$$\therefore \quad y'' = \frac{10(y^2+xy - x^2)}{(x+2y)^3}$$

5.2 $y + xy' + 2xy + x^2y' = 0$ .....(1)

จะได้ $(x + x^2)y' = -(y+2xy)$ หรือ $y' = -\dfrac{(y+2xy)}{x+x^2}$

จาก (1) , $y' + y' + 2xy' + xy'' + 2y + 2xy' + x^2y'' = 0$

หรือ $2y + (2 + 4x)y' + (x+x^2)y'' = 0$ หรือ $2y - \dfrac{2y(1+2x)^2}{x+x^2} + (x+x^2)y'' = 0$

$$\therefore \quad y'' = \frac{2y(1+2x)^2}{(x+x^2)^2} - \frac{2y}{(x+x^2)} = \frac{2y(3x^2 + 3x+1)}{(x+x^2)^2}$$

6. $h'(x) = (fog)'(x) = f'(g(x)) . g'(x)$

$\therefore$ $h'(1) = f'(g(1)) . g'(1) = f'(2) . (-2) = (6)(-2) = -12$

7. $f'(x) = 3x^2$ และ $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ แล้ว

$$(gof)'(x) = g'(f(x)) . f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} . (3x^2) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+4}}$$

8. $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{d(u^5 + u)}{du}.\frac{d(4x^3 + x - 4)}{dx} = (5u^4+1)(12x^2+1)$$

แต่เมื่อ $x = 1$ เราจะได้ $u = 4(1)^3 + 1 - 4 = 1$ เพราะฉะนั้น

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = (5(1)^4 + 1)(12(1)^2 + 1) = (6)(13) = 78$$

9. $\dfrac{d}{dx} f(h(x)) = f'(h(x)) . h'(x)$

แต่ $\dfrac{df(x)}{dx} = f'(x) = g(x)$ เราจะได้ $f'(h(x)) = g(h(x))$

ซึ่ง $h(x) = x^2$ เราจะได้ $h'(x) = 2x$ และ $g(h(x)) = g(x^2)$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{d}{dx} f(h(x)) = 2x\, g(x^2)$

10. $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ และ

$h''(x) = f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$

$= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$

$\therefore\ h''(0) = f''(0)g(0) + 2f'(0)g'(0) + f(0)g''(0)$

แต่ $f(x) = (x^4 - 3x + 1)^3$ ทำให้ $f'(x) = 3(x^4 - 3x + 1)^2(4x^3 - 3)$

และ $f''(x) = 6(x^4 - 3x + 1)(4x^3 - 3)^2 + 3(x^4 - 3x + 1)^2(12x^2)$

ทำให้ได้ $f'(0) = (3)(1)^2(-3) = -9$ และ $f''(0) = 6(1)(9) + (3)(1)^2(0) = 54$

เพราะฉะนั้น $-12 = (54)(1) + 2(-9)(4) + (1)g''(0)$ หรือ $g''(0) = 6$

11. $3(x+y)^2(1+y') - 5+y' = 0$ จะได้ $6(x+y)(1+y')^2 + 3(x+y)^2 y'' + y'' = 0$

หรือ $y'' = -\dfrac{6(x+y)(1+y')^2}{3(x+y)^2+1}$

แต่ $y' = \dfrac{5 - 3(x+y)^2}{3(x+y)^2+1}$ เพราะฉะนั้น $y'' = \dfrac{-216(x+y)}{[3(x+y)^2+1]^3}$

12. เนื่องจาก $g'(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$ และ $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(2x^3+x^2-6x+2) = 6x^2+2x-6$

ดังนั้น $g'(2) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{6(2)^2+2(2)-6} = \dfrac{1}{22}$

13. เนื่องจาก $g'(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$ และ $f'(x) = \dfrac{d}{dx}(2x^3+x-3) = 6x^2+1$

ดังนั้น $g'(-3) = \dfrac{1}{6(-3)^2+1} = \dfrac{1}{55}$ และ $g'(0) = \dfrac{1}{6(0)^2+1} = 1$

14. $y' = \sqrt{x+(x-1)^2} + \dfrac{x}{2\sqrt{x+(x-1)^2}}\cdot[1+2(x-1)]$

$= \sqrt{x+(x-1)^2} + \dfrac{x(2x-1)}{2\sqrt{x+(x-1)^2}} = \dfrac{4x^2-3x+2}{2\sqrt{x+(x-1)^2}}$

$\therefore\ y'(2) = 2\sqrt{3}$

ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด $(2, 2\sqrt{3})$ คือ

$y-2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(x-2)$ หรือ $y = 2\sqrt{3}(x-1)$

15. $6(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 25(2x - 2yy')$ หรือ

$6x(x^2 + y^2) + 6y(x^2+y^2)y' = 25x - 25yy'$ หรือ

$[6y(x^2+y^2) + 25y]y' = 25x - 6x(x^2+y^2)$

$$\therefore \quad y' = \frac{x[25 - 6(x^2+y^2)]}{y[6(x^2+y^2)+25]} \quad \text{และ} \quad y'\big|_{(2,1)} = \frac{2[25 - 6(4+1)]}{1[6(4+1) + 25]} = \frac{-2}{11}$$

ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (2, 1) คือ

$$y-1 = \frac{-2}{11}(x-2) \quad \text{หรือ} \quad 2x + 11y = 15$$

16. เนื่องจาก $f(x) = 2 + |x-3| = \begin{cases} 2+x-3 = x-1 & \text{เมื่อ } x \geqslant 3 \\ 2-x+3 = 5-x & \text{เมื่อ } x < 3 \end{cases}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{x - 1 - 2}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^+} \dfrac{x-3}{x-3} = 1$

แต่ $\lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{5 - x - 2}{x-3} = \lim\limits_{x\to3^-} \dfrac{-(x-3)}{x-3} = -1$

ซึ่งแสดงว่า $f'(x)$ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $x = 3$

17. เนื่องจากฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ $x = 1$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ ดังนั้น

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (ax^2+b) = a+b = \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{|x|} = 1$$

ทำให้ได้ $a+b = 1$ .....(1)

แต่ $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{ax^2 + b - a - b}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{a(x-1)(x+1)}{x-1} = 2a$

และ $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1/x - a - b}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1/x - 1}{x-1}$ (จาก (1))

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to1^+} \frac{-1}{x} = 1$$

ทำให้ได้ $2a = -1$ หรือ $a = \dfrac{-1}{2}$ ดังนั้น $b = \dfrac{3}{2}$