ชุดฝึกหัด 7
ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

จงเขียนเซตของจำนวนจริง x ซึ่ง $y = f(x)$ ที่กำหนดในข้อ 1–10 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ ตำแหน่ง x เหล่านั้น

1. $f(x) = x^2$

2. $f(x) = 1/x^2$

3. $f(x) = \begin{cases} x+2, & -1 \le x \le 1 \\ 3x, & 1 < x \le 5 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} x, & 1 \le x \le 2 \\ x^3, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} x, & x \ne 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x \ne 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ 2x-2, & x > 1 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \ne 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

10. $f(x) = |x| - x$

จงพิจารณาฟังก์ชันที่กำหนดให้ในข้อ 11–24 ว่าแต่ละฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง และเราจะสามารถกำหนดค่าของฟังก์ชันที่จุดซึ่งฟังก์ชันไม่มีความต่อเนื่องเหล่านั้น เพื่อให้เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องได้หรือไม่

11. $f(x) = x^2-2x+1$

12. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

13. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

14. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

15. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x-10}$

16. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

17. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

18. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

19. $f(x) = \begin{cases} x , & x \leq 1 \\ x^2 , & x > 1 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} -2x+3 , & x < 1 \\ x^2 , & x \geq 1 \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}+1 , & x \leq 2 \\ 3-x , & x > 2 \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} -2x , & x \leq 2 \\ x^2-4x+1 , & x > 2 \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} |x-2|+3 , & x < 0 \\ x+5 , & x \geq 0 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} 3+x , & x \leq 2 \\ x^2+1 , & x > 2 \end{cases}$

25. จงใช้คุณสมบัติความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ในการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันในข้อต่อไปนี้

25.1 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sin(1/x)}$

26. $\lim\limits_{x \to 1} \ln\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$

26. จงหาค่า c ที่จะทำให้ ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-b^2}{x-b} , & x \neq b \\ c , & x = b \end{cases}$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

27. จงเขียนความสัมพันธ์ของจำนวนคงค่า a, b, c และ d ที่ทำให้ฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} ax+b , & x \geq 0 \\ c-dx^2 , & x < 0 \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ $x = 0$

28. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดบนช่วงที่กำหนดหรือไม่

28.1 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , 1 \le x \le 2 \\ x & , 2 < x \le 3 \end{cases}$, บนช่วงปิด $[1, 3]$

28.2 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|} & , -1 \le x < 2 \\ \dfrac{-x}{2} & , x \ge 2 \end{cases}$ บนช่วงปิด $[-1, 2]$

29. จงแสดงว่า สมการ $x^3-2x^2-3x+1 = 0$ มีคำตอบใน $[0, 2]$

30. จงแสดงว่า สมการ $2x^3+4x^2-5x-4 = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริงลบ

เฉลยชุดฝึกหัด 7

1. เนื่องจาก $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันพหุนามซึ่งต่อเนื่องทุก ๆ จำนวนจริง x ดังนั้น f ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$

2. เนื่องจาก $f(x) = \frac{1}{x^2}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ซึ่งจะไม่ต่อเนื่องเฉพาะที่จุด x ที่ทำให้ $x^2 = 0$ แต่ $x^2 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ ดังนั้น $x = 0$ เท่านั้นที่ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ไม่ต่อเนื่อง หรือนั่นคือ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ต่อเนื่องบนเซต $\mathbb{R}-\{0\}$

3. เนื่องจาก $x+2$ และ $3x$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้น f จึงต่อเนื่องบน $[-1, 1) \cup (1, 5]$ เราจึงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่ ซึ่ง

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} (x+2) = 3$ และ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} 3x = 3$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 3 = f(1)$ จึงได้ว่า f ต่อเนื่อง ที่ $x = 1$ ด้วย

ดังนั้น f ต่อเนื่องบนเซต $[-1, 5]$

4. เช่นเดียวกับข้อ 3 ฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย $f(x) = x$ และ $f(x) = x^3$ ต่างเป็นพหุนาม จึงต่อเนื่องบน $(1, 2]$ และ $[0, 1)$ ตามลำดับ จึงพิจารณาว่า f จะต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่ แต่

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} x^3 = 1$ และ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} x = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1 = f(1)$ จึงได้ว่า f ต่อเนื่อง $x = 1$ ด้วย

ดังนั้น f ต่อเนื่องบนเซต $[0, 2]$

5. เนื่องจาก $2x-1$ และ 1 ต่างเป็นพหุนาม จึงต่อเนื่องบน $[0, 1)$ และ $(1, +\infty)$ ตามลำดับ และ

เพราะว่า $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} (2x-1) = 1 = \lim\limits_{x\to1^+} 1 = \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

ทำให้ได้ว่า $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1 = f(1)$ หรือ f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ ด้วย

เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องบนเซต $[0, +\infty)$

6. เพราะว่า $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} x = 1 \neq 2 = f(1)$ ดังนั้น f จึงไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ อย่างไรก็ตาม x เป็นพหุนาม จึงต่อเนื่องทุก ๆ x ทำให้สรุปได้ว่า f ต่อเนื่องบนเซต $\mathbb{R}-\{1\}$

7. เนื่องจาก $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ และ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$
f จึงไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แบบไม่ถูกยกออก และเพราะว่า $\frac{1}{x-1}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ซึ่งจะไม่ต่อเนื่องเฉพาะ x ที่ทำให้ $x-1$ เป็นศูนย์ หรือก็คือ $x = 1$ เท่านั้น เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องบนเซต $\mathbb{R}-\{1\}$

8. เนื่องจาก $x-1$ และ $2x-2$ เป็นพหุนาม จึงได้ว่า f ต่อเนื่องบน $[0, 1)\cup(1, +\infty)$ และเมื่อพิจารณาที่ $x = 1$ เราได้ว่า

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x-1) = 0 = \lim_{x\to 1^+} (2x-2) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

แต่ $f(1) = 1$ จึงทำให้ได้ $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$ หรือนั่นคือ f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

9. เพราะว่า $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2 = f(1)$ ดังนั้น f จึงต่อเนื่องที่ $x = 1$ และสำหรับ $x \neq 1$ เราได้ว่า $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ ทำให้เราสามารถเขียนนิยามของ f ได้อีกแบบหนึ่ง ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \ x \neq 1 \\ 2 & , \ x = 1 \end{cases}$$

และเพราะว่า $x+1$ เป็นพหุนาม f จึงต่อเนื่องบนเซต $\mathbb{R}$

10. เนื่องจาก $f(x) = |x| - x = \begin{cases} -2x & , \ x < 0 \\ 0 & , \ x \geq 0 \end{cases}$, และ

$-2x$ และ 0 ต่างเป็นพหุนาม เราจึงได้ขณะนี้ว่า f ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}-\{0\}$ และเมื่อพิจารณาที่ $x = 0$
เราจะได้ว่า $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-2x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$
ซึ่งแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 0$ ด้วย เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$

11. เนื่องจาก x^2-2x+1 เป็นพหุนามซึ่งต่อเนื่องทุกจำนวนจริง x จึงไม่มี x ที่ $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง

12. เนื่องจาก $\frac{x}{x^2+1}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ซึ่งจะไม่ต่อเนื่องเฉพาะ x ที่ทำให้ $x^2+1 = 0$
แต่ $x^2+1 > 0$ ทุก ๆ x เพราะฉะนั้นจึงไม่มีจำนวนจริง x ที่จะทำให้ $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง

13. เพราะว่า $\frac{x}{x^2-1}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ซึ่งจะไม่ต่อเนื่องเฉพาะ x ที่ทำให้ $x^2-1 = 0$
และ $x^2-1 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$ หรือ $x = -1$ เราจึงได้ว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

และ $x = -1$ แต่เพราะว่า

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = -\infty = \lim_{x\to -1^+} \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

และ

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = +\infty = \lim_{x\to -1^-} \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

ซึ่งแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และ $x = -1$ แบบไม่ถูกยกออก หรือนั่นคือเราไม่สามารถกำหนดค่าของ $f(1)$ และ $f(-1)$ ที่จะทำให้ f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือ $x = -1$

14. เพราะว่า $\frac{x-3}{x^2-9}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ซึ่งจะไม่ต่อเนื่องเฉพาะ $x = 3$ หรือ $x = -3$ เท่านั้น และ

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6} \quad \text{แต่}$$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to -3^+} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x+3} = +\infty$$

เพราะฉะนั้น f ไม่ต่อเนื่องแบบไม่ถูกยกออก ที่ $x = -3$ แต่ไม่ต่อเนื่องชนิดถูกยกออกที่ $x = 3$ เราจึงสามารถกำหนดค่า $f(3) = 1/6$ เพื่อให้ f ต่อเนื่องที่ $x = 3$ แต่ไม่สามารถกำหนดค่า $f(-3)$ เพื่อให้ f ต่อเนื่อง ที่ $x = -3$

15. เช่นเดียวกับข้อ 14 ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x-10} = \frac{x+2}{(x+2)(x-5)}$

จะไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$ และ $x = 5$ โดยที่

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{(x+2)(x-5)} = \lim_{x\to -2} \frac{1}{x-5} = -\frac{1}{7} \quad \text{แต่} \quad \lim_{x\to 5} \frac{x+2}{(x+2)(x-5)} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{x-5}$$

ทำให้ได้ $\lim_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$ และ $\lim_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$

เราจึงสามารถกำหนดค่า $f(-2) = -1/7$ เพื่อให้ f ต่อเนื่องที่ $x = -2$ แต่เราไม่สามารถกำหนดค่า $f(5)$ เพื่อทำให้ f ต่อเนื่องที่ $x = 5$

16. เช่นเดียวกับข้อ 15 ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ โดยที่

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{และ} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

เราจึงไม่สามารถกำหนดค่า $f(1)$ เพื่อทำให้ f ต่อเนื่องที่ $x = 1$

17. เนื่องจาก $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}$ ทำให้ได้

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

ดังนั้นเช่นเดียวกับข้อ 15 ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$

แต่ $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ เราจึงสามารถกำหนดค่า $f(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ เพื่อทำให้ f ต่อเนื่อง ที่ $x = 3$

18. เช่นเดียวกับข้อ 14 ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-2} = \dfrac{x-1}{(x-1)(x+2)}$ จะไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และ $x = -2$ โดยที่

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3} \quad \text{แต่} \quad \lim_{x\to -2}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to -2}\frac{1}{x+2}$$

ทำให้ได้ $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{1}{x+2} = -\infty$ และ $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{x+2} = +\infty$

เพราะฉะนั้นเราสามารถกำหนดค่า $f(1) = 1/3$ เพื่อทำให้ f ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่ไม่สามารถกำหนดค่า $f(-2)$ เพื่อทำให้ f ต่อเนื่องที่ $x = -2$

19. เนื่องจาก x และ x^2 เป็นพหุนาม จึงต่อเนื่องที่ทุกจำนวนจริง x เราจึงพิจารณาเฉพาะที่ $x = 1$ เท่านั้น

โดยที่ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$ และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$ ดังนั้น f จึงไม่มีจุดที่ไม่ต่อเนื่อง

20. เช่นเดียวกับข้อ 19 เราจะพิจารณาเฉพาะที่ $x = 1$ เท่านั้น โดยที่

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-2x+3) = 1$ และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$ ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ทุกจำนวนจริง x

21. เช่นเดียวกับข้อ 19 และข้อ 20 เราพิจารณาเฉพาะที่ $x = 2$ เท่านั้น โดยที่

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (\frac{x}{2}+1) = 2$ แต่ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3-x) = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ หรือ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

โดยทำให้ f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$ แบบไม่ถูกยกออก ซึ่งทำให้เราไม่สามารถกำหนดค่า $f(2)$ ใหม่เพื่อทำให้ f ต่อเนื่อง ที่ $x = 2$

22. เช่นเดียวกับข้อ 21 เราจะพิจารณาเฉพาะที่ $x = 2$ เท่านั้น โดยที่

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (-2x) = -4$ แต่ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2-4x+1) = -3$

ทำให้ได้ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ หรือ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$ แบบไม่ถูกยกออก จึงไม่สามารถกำหนดค่า $f(2)$ ใหม่เพื่อทำให้ f ต่อเนื่องที่ $x = 2$

23. เนื่องจาก $|x-2| = \begin{cases} x-2\ , x \geq 2 \\ 2-x\ , x < 2 \end{cases}$ ทำให้เราเขียนนิยาม f(x) ใหม่ได้ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 2-x+3 = 5-x\ , & x < 0 \\ x+5 & , x \geq 0 \end{cases}$$

เช่นเดียวกัน เราจะพิจารณาเฉพาะที่ x = 0 เท่านั้น ซึ่ง

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (5-x) = 5 = \lim_{x\to 0^+} (x+5) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

ทำให้ได้ $\lim_{x\to 0} f(x) = 5 = f(0)$ เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องที่ x = 0 ด้วย

24. เช่นเดียวกัน เราจะพิจารณาเฉพาะที่ x = 2 เท่านั้น ซึ่งจะเห็นว่า

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3+x) = 5 = \lim_{x\to 2^+} (x^2+1) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

ทำให้ได้ $\lim_{x\to 2} f(x) = 5 = f(2)$ ซึ่งแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ x = 2 ด้วย

25. 25.1 $\lim_{x\to +\infty} e^{\sin(1/x)} = e^{\lim_{x\to+\infty} \sin(1/x)} = e^{\sin(\lim_{x\to+\infty} 1/x)} = e^{\sin 0} = e^0 = 1$

25.2 $\lim_{x\to 1} \ln\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\right) = \ln\left(\lim_{x\to 1} (x+1)\right) = \ln 2$

26. เนื่องจาก $\lim_{x\to b} \frac{x^2-b^2}{x-b} = \lim_{x\to b} \frac{(x-b)(x+b)}{x-b} = \lim_{x\to b} (x+b) = 2b$ หรือ $\lim_{x\to b} f(x) = 2b$
และเพื่อให้ f ต่อเนื่องที่ x = b เราต้องได้ว่า f(b) = 2b นั่นคือ C = 2b

27. เพราะว่า $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (c-dx^2) = c$, และ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (ax+b) = b$
และเพื่อให้ $\lim_{x\to 0} f(x)$ หาค่าได้ เราจะต้องได้ว่า c = b และเพื่อให้ f ต่อเนื่องที่ x = 0 เราจะต้องได้ว่า f(0) = b = c แต่ f(0) = a(0) +b = b เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องที่ x = 0 ก็ต่อเมื่อ b = c

28. ฟังก์ชันจะมีค่าสูงสุดและต่ำสุดบนช่วงปิด ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชันนั้นเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เราจึงเพียงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ ต่อเนื่องบนช่วงปิดที่กำหนดให้หรือไม่เท่านั้น

28.1 เราพิจารณาเฉพาะที่ x = 2 เท่านั้น โดยที่

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (x+2) = 4\ , \quad \text{แต่} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x = 2$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้ จึงทำให้ f ไม่ต่อเนื่องที่ x = 2 นั่นคือ f ไม่มีค่าสูงสุดและไม่มีค่าต่ำสุดบน [1, 3]

28.2 เพราะว่า $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$ เราจึงเขียนนิยามของ $f(x)$ ใหม่ได้ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , -1 \leq x < 2 \\ -x/2, & x \geq 2 \end{cases}$$

ทำให้ได้ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -1 = f(2) = (-2/2)$ เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องทางซ้ายที่ $x = 2$ จึงสรุปได้ว่า f ต่อเนื่องบน $[-1, 2]$ ทำให้ f มีค่าสูงสุดและต่ำสุดบน $[-1, 2]$

29. เพราะว่า $f(x) = x^3-2x^2-3x+1$ เป็นพหุนาม จึงต่อเนื่องบน $[0, 2]$ และ
เนื่องจาก $f(2) = -5 < 0 < 1 = f(0)$ ทำให้ได้จากทฤษฎีบทค่ากลางว่า จะมีจำนวนจริง
$c \in (0, 2)$ ที่ทำให้ $f(c) = 0$ หรือนั่นคือมี $c \in (0, 2)$ ที่ทำให้ $c^3-2c^2-3c+1 = 0$
ซึ่งแสดงว่า c เป็นคำตอบของ $x^3-2x^2-3x+1 = 0$

30. เนื่องจาก $f(x) = 2x^3+4x^2-5x-4$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม จึงต่อเนื่องทุกจุดบนเส้นจำนวนจริง และจาก

$$f(0) = -4 < 0 < 3 = f(-1)$$

ทำให้ได้จากทฤษฎีบทค่ากลางว่า จะมีจำนวนจริง $c \in (-1, 0)$ หรือ $c < 0$ ที่ทำให้

$$f(c) = 2c^3+4c^2-5c-4 = 0$$

นั่นคือมี $c < 0$ เป็นคำตอบของสมการ $2x^3+4x^2-5x-4 = 0$