บทที่ 1
อินทิกรัล
(Integrals)

ในวิชาเรขาคณิต เราศึกษาสมบัติของเส้นตรงและรูปทรงหลายเหลี่ยมแบบต่าง ๆ เช่นการหาเงื่อนไขที่เส้นตรงสองเส้นขนานกัน หรือการหาพื้นที่ของรูปเหลี่ยมต่าง ๆ โดยอาศัยสูตรพื้นฐานของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยม สำหรับวงกลมนอกจากเราจะศึกษาสมบัติภายในวงกลมแล้วเรายังได้ศึกษาการหาความชันของเส้นสัมผัสวงกลม จนทำให้เราสามารถขยายแนวคิดนี้ไปสู่การหาความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งใด ๆ และทำให้ได้แนวคิดเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันในที่สุด ดังที่ได้ศึกษาแล้วในวิชาแคลคูลัส 1 ในบทนี้เราจะขยายแนวคิดของการหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมในวิชาเรขาคณิตไปสู่การหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งบนช่วงปิดช่วงหนึ่ง แนวคิดดังกล่าวนี้ ได้นำไปสู่การศึกษาเรื่องอินทิกรัลจำกัดเขต

อย่างไรก็ตามการหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งหรืออินทิกรัลจำกัดเขตโดยตรงจากนิยามค่อนข้างยุ่งยากมาก เราจึงศึกษาแนวคิดของนิวตันในการคำนวณอินทิกรัลจำกัดเขตด้วยวิธีการที่เป็นการดำเนินการผกผันกับการหาอนุพันธ์ เราจึงจะเริ่มต้นบทนี้ในหัวข้อ 1.1 ด้วยแนวคิดของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

1.1 ปฏิยานุพันธ์และอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

เมื่อกำหนดฟังก์ชันค่าจริง f ให้ เราอาจถามว่าอนุพันธ์ของ f คืออะไรและในทางกลับกันเราอาจถามว่าจะมีฟังก์ชัน F ซึ่งอนุพันธ์ของ F คือ f หรือไม่ นั่นคือ $F'(x)=f(x)$ และจะหา F ได้อย่างไร เราเรียกฟังก์ชัน F ว่า **ปฏิยานุพันธ์** (anti-derivative) ของ f บนช่วง I ถ้า $F'(x)=f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x\in I$ ตัวอย่างเช่น ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่นิยามโดย $f(x)=2x$ คือฟังก์ชัน F ซึ่งนิยามโดย $F(x)\ =x^2$

สังเกตว่าถ้าฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f แล้วฟังก์ชัน $F+C$ จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ f สำหรับทุกค่าคงตัว C เพราะว่า

$$\frac{d}{dx}\big(F(x)\ +\mathrm{C}\big)\ =\ \frac{d}{dx}F(x)\ +\frac{dC}{dx}\ \ =f(x)\ +0\ \ =f(x)$$

ดังนั้น ถ้าฟังก์ชัน f มีปฏิยานุพันธ์แล้ว f จะมีปฏิยานุพันธ์มากมายนับไม่ถ้วน ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $F_1(x)\ =x^3,\ F_2(x)\ =x^3+2,\ F_3(x)\ =x^3-100$ และ $F_4(x)\ =x^3+20$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $f(x)\ =\ 3x^2$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ทฤษฎีบท 1.1.1 ถ้าฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f บนช่วง I แล้วปฏิยานุพันธ์ทั้งหมดของ f บนช่วง I จะอยู่ในรูป $F+C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

บทพิสูจน์ ให้ฟังก์ชัน F และ G เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f จะได้ว่า

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

และทำให้ได้

$$\frac{d}{dx}[G(x)-F(x)] = \frac{d}{dx}G(x)-\frac{d}{dx}F(x) = f(x)-f(x) = 0$$

ซึ่งแสดงว่า $G(x)-F(x)$ เป็นค่าคงตัว นั่นคือจะมีค่าคงตัว C ที่ทำให้

$$G(x)-F(x) = \mathrm{C} \quad \text{หรือ} \quad G(x) = F(x)+C$$

เพราะฉะนั้น $G=F+C$ ❍

โดยสมบัติของอนุพันธ์ซึ่งกล่าวว่าอนุพันธ์ของผลบวกของฟังก์ชันคือผลบวกของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของผลคูณฟังก์ชันด้วยค่าคงตัวคือผลคูณด้วยค่าคงตัวของอนุพันธ์ เราสามารถพิสูจน์สมบัติของปฏิยานุพันธ์ได้ในทำนองเดียวกัน ดังจะกล่าวในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1.2 ถ้าฟังก์ชัน F และ G เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับและ k เป็นค่าคงตัว แล้วฟังก์ชัน kF และ $F \pm G$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน kf และ $f \pm g$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 1.1.3 จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $f(x) = \frac{1}{x}+2x$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $x \neq 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$ และ $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ เพราะฉะนั้นเมื่อกำหนดฟังก์ชัน F โดย $F(x) = \ln|x| + x^2 + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว จะได้

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\ln|x| + x^2 + \mathrm{C}\right] = \frac{1}{x}+2x = f(x)$$

ซึ่งแสดงว่า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ❍

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ตัวอย่าง 1.1.4 จงหาสมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ ซึ่งผ่านจุด $(2,-3)$ และมีความชันที่จุด (x, y)ใด ๆ คือ $2x - 3$

วิธีทำ เนื่องจากความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y)ใด ๆ คือ

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 3$$

เพราะฉะนั้น $f(x)$ คือปฏิยานุพันธ์ของ $2x-3$ ทำให้เราได้

$$f(x) = x^2 - 3x + C$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

แต่เราทราบว่าเส้นโค้ง $y = f(x)$ ผ่านจุด $(2,-3)$ ทำให้ได้ค่า C โดยการแทน $f(2) = -3$ ลงในสมการข้างต้นซึ่งจะได้ $C = -1$ เพราะฉะนั้นสมการของเส้นโค้งคือ

$$y = x^2 - 3x - 1$$

❍

เราใช้สัญลักษณ์ $\int f(x)dx$ แทนปฏิยานุพันธ์ใด ๆ ของ $f(x)$ นั่นคือ $$\int f(x)dx = F(x) + C$$ เมื่อ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f และ C เป็นค่าคงตัว

บทนิยาม 1.1.5 เราเรียก $\int f(x)dx$ ว่า **อินทิกรัลไม่จำกัดเขต** (indefinite integral) ของฟังก์ชัน f และเรียก f ว่า **อินทิแกรนด์** (integrand) ของ $\int f(x)dx$ และเราเรียกการหา $\int f(x)dx$ ว่า **การอินทิเกรต** (integration) โดยเรียก x ว่า **ตัวแปรของการอินทิเกรต** (integration variable)

จากความหมายของ $\int f(x)dx$ ทำให้ได้

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x) \quad \text{และ} \quad \int \frac{d}{dx} f(x)dx = f(x) + C}$$

โดยความหมายและสัญลักษณ์ของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต เราสามารถเขียนทฤษฎีบท 1.1.2 ได้อีกรูปแบบหนึ่งดังทฤษฎีบท 1.1.6

ทฤษฎีบท 1.1.6 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\int f(x)dx$ และ $\int g(x)dx$ หาได้และ k เป็นค่าคงตัว แล้ว

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
2. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ดังที่กล่าวมาแล้วว่าการหา $\int f(x)dx$ คือการหาปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ และจากสูตรของอนุพันธ์ ทำให้เราได้สูตรพื้นฐานการอินทิเกรตต่อไปนี้

สูตรพื้นฐานการอินทิเกรต

1. $\int dx = x + C$ และ $\int 0dx = C$	(จาก $\frac{dx}{dx} = 1$ และ $\frac{dC}{dx} = 0$)
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ สำหรับ $n \neq -1$	(จาก $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$)
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$ สำหรับ $x \neq 0$	(จาก $\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$) สำหรับ $x \neq 0$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	(จาก $\frac{de^x}{dx} = e^x$)
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	(จาก $\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a$)
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	(จาก $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$)
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	(จาก $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$)
8. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	(จาก $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$)
9. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$	(จาก $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$)
10. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$	(จาก $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$)
11. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$	(จาก $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$)
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$ เมื่อ $\lvert x\rvert < 1$	(จาก $\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$) เมื่อ $\lvert x\rvert < 1$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$ เมื่อ $\lvert x\rvert < 1$	(จาก $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$) เมื่อ $\lvert x\rvert < 1$
14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$	(จาก $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$)
15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + C$	(จาก $\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = \frac{-1}{1+x^2}$)
16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C$ เมื่อ $\lvert x\rvert > 1$	(จาก $\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$) เมื่อ $\lvert x\rvert > 1$
17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\csc^{-1} x + C$ เมื่อ $\lvert x\rvert > 1$	(จาก $\frac{d}{dx}\csc^{-1} x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$) เมื่อ $\lvert x\rvert > 1$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ตัวอย่าง 1.1.7 ในตัวอย่างนี้ จะแสดงการอินทิเกรตโดยใช้สูตรพื้นฐาน

1. $\int x^{-\frac{1}{3}}dx \;=\; \dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$

2. $\int\left(3x+\dfrac{4}{x}\right)dx=\int 3xdx+\int\dfrac{4}{x}dx=3\int xdx+4\int\dfrac{dx}{x}=\dfrac{3x^2}{2}+4\ln|x|+C$

3. $\int x^2\left(2\sqrt{x}+x\right)dx=\int\left(2x^2\sqrt{x}+x^3\right)dx=2\int x^{\frac{5}{2}}dx+\int x^3dx$

$$=\frac{2x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}+\frac{x^{3+1}}{3+1}+C=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{x^4}{4}+C$$

4. $\int(x+2)^2\,dx=\int\left(x^2+4x+4\right)dx=\int x^2dx+4\int xdx+4\int dx=\dfrac{x^3}{3}+2x^2+4x+C$

5. $\int\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx=\int\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}dx+\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2\sqrt{x}+C$

6. $\int\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^2\right)dx=\int\left(x^{-\frac{1}{6}}+2x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{7}{3}}+2x^2\right)dx$

$$=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+4\sqrt{x}+\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}+\frac{2}{3}x^3+C$$

❍

แบบฝึกหัด 1.1

1. พิจารณาฟังก์ชัน F และ f ซึ่งนิยามในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงแสดงโดยบทนิยามว่า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f พร้อมทั้งบอกปฏิยานุพันธ์ของ f ที่แตกต่างกันมาอีก 3 ฟังก์ชัน

   1.1 $f(x) \;=\; 3x^2+2$ และ $F(x) \;=\; x^3+2x+3$

   1.2 $f(x) \;=\; -0.04x+600$ และ $F(x) \;=\; -0.02x^2+\;600x$

   1.3 $f(x) \;=\; 3x^2+2x^{-2}+13$ และ $F(x) \;=\; x^3-\;2x^{-1}+\;13x\;+\;17$

   1.4 $f(x) \;=\; \dfrac{-5}{(2x-1)^2}$ และ $F(x)=\dfrac{3x+1}{2x-1}$

   1.5 $f(x) \;=\; e^{5x}$ และ $F(x) \;=\; \dfrac{1}{5}e^{5x}+\;9$

   1.6 $f(x) \;=\; \dfrac{2x+2}{x^2+2x}$ และ $F(x) \;=\; \ln\left(x^2+\;2x\right)$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

2. จงหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตในแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมตรวจสอบคำตอบ

2.1 $\int x^{-3}dx$ 2.2 $\int\left(2t^3-3t^2+5\right)dt$ 2.3 $\int x^{-\frac{5}{2}}dx$

2.4 $\int\left(4-2x^2\right)dx$ 2.5 $\int\left(x^{16}+3x^3\right)dx$ 2.6 $\int\left(x^{\frac{1}{2}}+3x^2\right)dx$

2.7 $\int\left(3x^{\frac{3}{4}}+16\right)dx$ 2.8 $\int\left(x^{-\frac{7}{4}}+2x^{\frac{2}{3}}\right)dx$ 2.9 $\int\frac{1}{3\sqrt{v^2}}dv$

2.10 $\int\left(4\sqrt{u^3}+\sqrt[3]{u}+2u^3\right)du$ 2.11 $\int\left(5u^{-2}+u^{-\frac{1}{2}}+u^{\frac{5}{3}}\right)du$ 2.12 $\int 3x^{-1}dx$

2.13 $\int x\left(3x^2+2\right)dx$ 2.14 $\int\left(2x^2-\frac{4}{x}\right)dx$ 2.15 $\int\frac{3x^2+1}{x}dx$

3. จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามและผ่านจุดที่กำหนด ในแต่ละข้อต่อไปนี้

3.1 $f(x) = x^2,\ (3,\ 12)$ 3.2 $f(x) = 2x^3+3x^2+1,\ (2,\ 15)$

3.3 $f(x)=x^{-\frac{3}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+4x^3,\ (4,7)$ 3.4 $f(x) = 2+\frac{1}{x},\ (e,\ 2e)$

4. กำหนดให้ $f(0)=0$, $f'(1)=2$ และ $f''(x)=x+1$ จงหา $f(x)$

5. ให้ $f'(x)=\frac{1}{2}x^3(x+1)^{-\frac{1}{2}}+3x^2(x+1)^{\frac{1}{2}}$ เมื่อ $f(3)=5$ จงหา $f(x)$

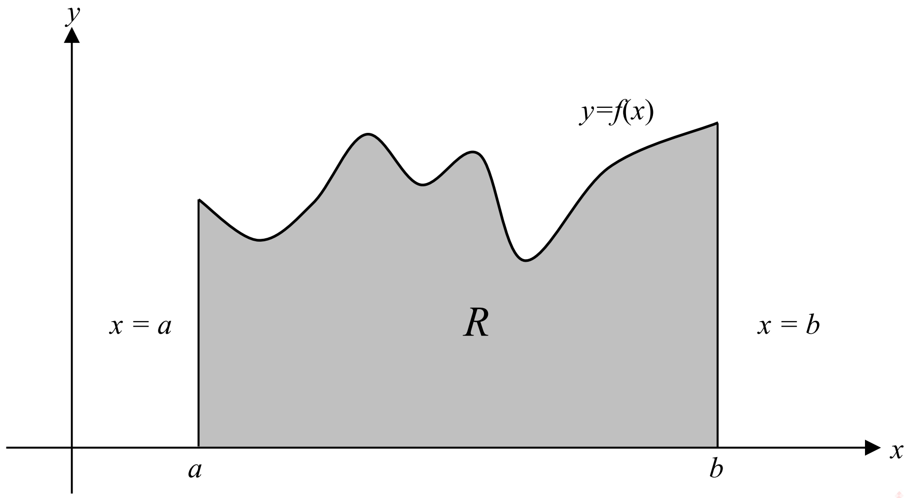
แนะนำ $f'(x)$ เขียนได้ในรูป $uv'+u'v$

1.2 อินทิกรัลจำกัดเขต

เราทราบวิธีคำนวณพื้นที่ของรูปทรงเรขาคณิตเช่นสามเหลี่ยม สี่เหลี่ยมหรือวงกลมมาแล้วในชั้นมัธยม และแม้แต่รูปหลายเหลี่ยมเราก็สามารถประยุกต์หาวิธีการคำนวณพื้นที่ด้วยการแบ่งรูปหลายเหลี่ยมนั้นออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าหรือสามเหลี่ยมหลาย ๆ รูปได้ เราจะใช้แนวคิดนี้พร้อมกับความรู้เรื่องลิมิตของฟังก์ชันมาประยุกต์หาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งบนช่วงปิดช่วงหนึ่ง

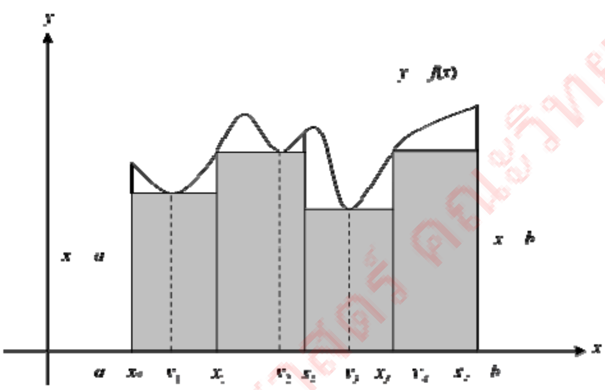
ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและไม่เป็นลบบนช่วงปิด $[a,\ b]$ และ R เป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ แกน x เส้นตรง $x=a$ และเส้นตรง $x=b$ ดังรูป 1.2.1

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

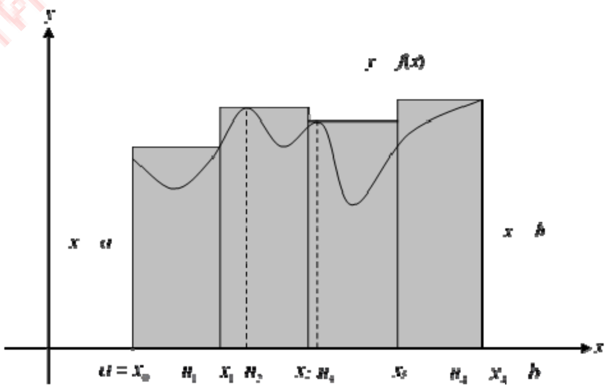


รูป 1.2.1

ในการคำนวณพื้นที่ของบริเวณ R เราจะแบ่งช่วงปิด $[a,\, b]$ ออกเป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน ด้วยจุด $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ ในแต่ละช่วงย่อย $[x_{i-1},\, x_i]$ เราสามารถสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าได้ 2 แบบ ที่มีความกว้างเป็น $x_i - x_{i-1}$ และมีความยาวเป็น $f(u_i)$ และ $f(v_i)$ เมื่อ u_i และ v_i อยู่ในช่วง $[x_{i-1},\, x_i]$ ซึ่ง $f(u_i)$ เป็นค่ามากสุดและ $f(v_i)$ เป็นค่าน้อยสุดบนช่วงดังกล่าว ตามรูป 1.2.2 (ก) และรูป 1.2.2 (ข)



รูป 1.2.2 (ก)



รูป 1.2.2 (ข)

จากนั้นสร้างผลบวกของสี่เหลี่ยมผืนผ้า n รูปเหล่านั้น ซึ่งเห็นได้ชัดว่า

$$\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_i x \quad \leq \quad \text{พื้นที่บริเวณ } R \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta_i x$$

เมื่อ $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ สำหรับแต่ละ $1 \leq i \leq n$ เราเรียก $\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_i x$ ว่า **ผลบวกล่าง** (lower sum) และเรียก $\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta_i x$ ว่า **ผลบวกบน** (upper sum) ของพื้นที่บริเวณ R

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

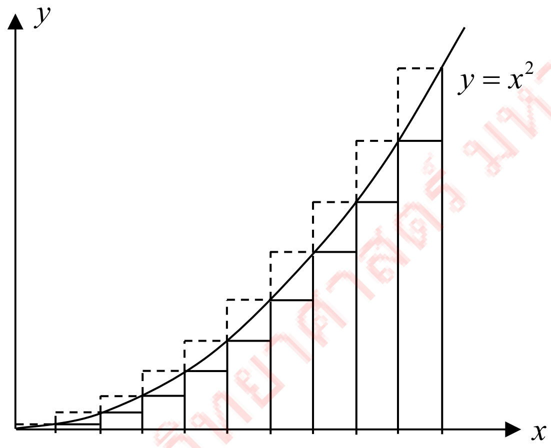
ถ้าเราเพิ่มจำนวนช่วงย่อยให้มากขึ้น เช่นให้ $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ เป็นจุดแบ่งช่วงที่เพิ่มขึ้นโดยการแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็น $2n$ ช่วงเท่า ๆ กัน จากรูป 1.2.3 จะเห็นว่าผลบวกล่างมีค่าเพิ่มขึ้นและผลบวกบนจะมีค่าลดน้อยลงและยังคงความสัมพันธ์กันในรูปอสมการ

$$\sum_{i=1}^{2n} f(v_i)\Delta_i x \quad \leq \quad \text{พื้นที่บริเวณ } R \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{2n} f(u_i)\Delta_i x$$

และผลบวกทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกับพื้นที่บริเวณ R มากขึ้น และเมื่อเรายิ่งเพิ่มจำนวนช่วงย่อยให้มากขึ้นไปอีก เราจะได้ความสัมพันธ์ในรูปลิมิตดังนี้

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(v_i)\Delta_i x \quad \leq \quad \text{พื้นที่บริเวณ} R \quad \leq \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta_i x$$

ถ้าลิมิตของผลบวกล่างเท่ากับลิมิตของผลบวกบน แล้วพื้นที่บริเวณ R ซึ่งอยู่ตรงกลางก็จะมีค่าเท่ากับลิมิตนั้นด้วย



รูป 1.2.3

หมายเหตุ การคำนวณพื้นที่ในลักษณะเช่นนี้เป็นแนวคิดของนักคณิตศาสตร์ชาวกรีกที่มีนามว่าอาร์คีมีดีส (Archimedes) เมื่อประมาณกว่า 200 ปีก่อนคริสต์ศักราช เราจึงเรียกวิธีการนี้ว่า **กระบวนการอาร์คีมีดีส** (Archimedian algorithm)

ตัวอย่าง 1.2.1 จงใช้กระบวนการอาร์คีมีดีส คำนวณพื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ แกน x เส้นตรง $x = 0$ และ $x = 2$

วิธีทำ แบ่งช่วงปิด $[0, 2]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน แล้วแต่ละช่วงย่อยจะมีความกว้างเท่ากับ $\dfrac{2-0}{n} = \dfrac{2}{n}$ หน่วยและทำให้ได้จุดแบ่งช่วงคือจุดต่อไปนี้

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0+\frac{2}{n}=\frac{2}{n},\ x_2 = x_1+\frac{2}{n}=\frac{4}{n}\ , \ \ldots\ ,\ x_i = \frac{2i}{n},\ \ldots\ ,\ x_n = \frac{2n}{n}=2$$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

เราเห็นได้ชัดว่า $v_i = x_{i-1} = \dfrac{2(i-1)}{n}$ และ $u_i = x_i = \dfrac{2i}{n}$ และในที่นี้ $f(x) = x^2$ เราจึงได้ผลบวกบนเท่ากับ

$$\sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3}$$

$$= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(\frac{8}{n^3}\right)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{8}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \frac{4}{3}(1)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

และผลบวกล่างเท่ากับ

$$\sum_{i=1}^{n} f(v_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2(i-1)}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{8}{n^3}(i-1)^2$$

$$= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \frac{8}{n^3}\left(\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}\right)$$

$$= \frac{8}{6}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{2n-1}{n}\right) = \frac{4}{3}(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

แต่เพราะว่า

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)(2) = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}(1)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

เราจึงได้พื้นที่ที่ต้องการเท่ากับ $\dfrac{8}{3}$ ตารางหน่วย ❍

ด้วยแนวความคิดจากกระบวนการอาร์คีมีดีส นักคณิตศาสตร์จึงให้ความหมายกว้าง ๆ ของผลรวมในลักษณะดังกล่าวเพื่อให้สามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่น ๆ ได้ด้วย ดังเช่นบทนิยามของอนุพันธ์ที่มีรากฐานจากกระบวนการคำนวณความชันของเส้นโค้ง ณ จุดต่าง ๆ แต่เพราะการให้นิยามจะต้องไม่ชี้เฉพาะเรื่องความชันของเส้นโค้ง ซึ่งต่อมาภายหลังดังที่เราทราบกันดีว่าเราสามารถประยุกต์อนุพันธ์ในหลาย ๆ สาขาวิชา

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วงปิด $[a, b]$ และเพื่อให้ได้ความหมายของผลรวมที่ครอบคลุมความหมายของผลบวกบนและผลบวกล่าง เราจะดำเนินการเป็นขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 แบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วง (แต่ละช่วงย่อยอาจมีความยาวช่วงเท่ากันหรือไม่ก็ได้) ด้วยจุด $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ โดยที่ $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ เราจะเรียกเซต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

$P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ว่า **ผลแบ่งกั้น** (partition) ของ $[a, b]$ และแทนความยาวของช่วงย่อยที่ i ด้วยสัญลักษณ์ $\Delta_i x$ นั่นคือ

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

และใช้สัญลักษณ์ $\|P\|$ แทน $\Delta_i x$ ที่มีค่ามากสุด

ขั้นที่ 2 เลือก x_i^* เป็นจุดใดก็ได้ในช่วงย่อยที่ i นั่นคือ

$$x_{i-1} \le x_i^* \le x_i$$

แล้วสร้างผลบวก n พจน์ต่อไปนี้

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta_i x = f\left(x_1^*\right)\Delta_1 x + f\left(x_2^*\right)\Delta_2 x + \ldots + f\left(x_n^*\right)\Delta_n x$$

และเรียกผลบวกนี้ว่า **ผลบวกรีมันน์** (Riemann sum) ของ f

ขั้นที่ 3 แบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ให้มีจำนวนของช่วงย่อยมากขึ้นเรื่อยๆ ในลักษณะที่ทำให้ $\|P\|$ เข้าใกล้ศูนย์

ถ้าผลบวกรีมันน์ของ f มีค่าเข้าใกล้จำนวนจริงค่าหนึ่ง โดยไม่ขึ้นกับวิธีการแบ่งช่วง $[a, b]$ ในขั้นตอนที่ 3 และไม่ขึ้นกับการเลือกจุด x_i^* ในแต่ละช่วงย่อยของ $[a, b]$ แล้วเรากล่าวว่า f **อินทิเกรตได้** (integrable) บน $[a, b]$ และเรียกจำนวนจริงนั้นว่า **อินทิกรัลจำกัดเขต** (definite integral) ของ f บน $[a, b]$ โดยเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)\,dx$

จากแนวคิดของการนิยามฟังก์ชันอินทิเกรตได้ข้างต้น เราสามารถให้บทนิยามเชิงคณิตศาสตร์ของฟังก์ชันอินทิเกรตได้ดังนี้

บทนิยาม 1.2.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วงปิด $[a, b]$ เรากล่าวว่า f **อินทิเกรตได้** บน $[a, b]$ ถ้ามีจำนวนจริง L ซึ่ง สำหรับแต่ละจำนวนจริงบวก ε จะมีจำนวนจริงบวก δ ที่ทำให้

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta_i x - L\right| < \varepsilon$$

สำหรับทุก ๆ ผลแบ่งกั้น $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ของ $[a, b]$ ซึ่ง $\|P\| < \delta$ และทุก ๆ การเลือกจุด $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ เมื่อ $1 \le i \le n$

เรียกจำนวนจริง L ดังกล่าวว่า **อินทิกรัลจำกัดเขต** ของ f บน $[a, b]$ โดยเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)\,dx$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

หมายเหตุ

1. ถ้า f อินทิเกรตได้ บน $[a, b]$ แล้วจำนวนจริง L ที่สอดคล้องตามบทนิยาม 1.2.2 จะมีเพียงหนึ่งเดียว

2. เราอ่านสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)\,dx$ ว่า "อินทิกรัลจาก a ถึง b ของ f" และเรียกการหาค่า $\int_a^b f(x)\,dx$ ว่า **การอินทิเกรต** (integration) เรียก $f(x)$ ว่า **อินทิแกรนด์** (integrand) เรียกจำนวนจริง a และ b ว่า **ลิมิตล่าง** (lower limit) และ **ลิมิตบน** (upper limit) ตามลำดับ และเรียก x ว่า**ตัวแปรของการอินทิเกรต**

โดยใช้ความรู้แคลคูลัสขั้นสูง เราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้

ทฤษฎีบท 1.2.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันอินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a, b]$

จากบทนิยาม 1.2.2 เราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2.4 ถ้า f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x$ โดยที่ $\Delta_i x = \dfrac{b-a}{n}$ และ $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, n$

หมายเหตุ 1. จากทฤษฎีบท 1.2.4 โดยทั่วไปแล้ว เราจะเลือก x_i^* เป็นจุดปลายทางซ้าย หรือจุดปลายทางขวา หรือจุดกึ่งกลางของช่วง $[x_{i-1}, x_i]$

2. จากทฤษฎีบท 1.2.3 และทฤษฎีบท 1.2.4 เราจะเห็นว่าลิมิตของผลบวกบนและลิมิตของผลบวกล่างในกระบวนการอาร์คิมีดีสจะเท่ากันเสมอ ดังนั้นในการหาพื้นที่ใต้กราฟโดยกระบวนการอาร์คิมีดีสจึงเป็นการเพียงพอที่จะหาลิมิตของผลบวกบนหรือลิมิตของผลบวกล่างอย่างใดอย่างหนึ่ง

3. ถ้า $a = b$ แล้ว $\int_a^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = 0$

4. ถ้า $f(x) = 1$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a,b]$ แล้วเราจะเขียนแทน $\int_a^b f(x)\,dx$ ด้วย $\int_a^b dx$

ตัวอย่าง 1.2.5 จงหาอินทิกรัลจำกัดเขตของ $f(x) = 512x - 32x^2$ บนช่วง $[0, 16]$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

วิธีทำ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันพหุนาม ดังนั้น f ต่อเนื่องบนช่วง $[0, 16]$ โดยทฤษฎีบท 1.2.3 f เป็นฟังก์ชันอินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[0, 16]$ และเราสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 1.2.4 ในการหา $\int_0^{16} f(x)\,dx$ ได้ดังนี้

แบ่งช่วง $[0, 16]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยเท่าๆ กัน แล้วแต่ละช่วงย่อยจะยาว $\Delta_i x = \dfrac{16-0}{n}$ ทำให้ได้จุดแบ่งช่วงคือ $0, \dfrac{16}{n}, \dfrac{32}{n}, \ldots, \dfrac{16i}{n}, \ldots, \dfrac{16n}{n} = 16$

เนื่องจาก x_i^* ในผลบวกรีมันน์ถูกเลือกเป็นตัวใดก็ได้ ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราจะเลือกเป็น $x_i^* = \dfrac{16i}{n}$ ซึ่งทำให้ได้

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{16i}{n}\right)\left(\frac{16}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[512\left(\frac{16i}{n}\right)-32\left(\frac{16i}{n}\right)^2\right]\left(\frac{16}{n}\right)$$

$$= 512\left(\frac{16}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n} i - 32\left(\frac{16}{n}\right)^3\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(512)(16)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(32)(16)^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_n = \frac{(512)(16)^2}{2}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{(32)(16)^3}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= (256)(16)^2(1)\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{(16)(16^3)}{3}(1)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

เพราะฉะนั้นอินทิกรัลที่ต้องการเท่ากับ

$$\int_0^{16} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = (256)(16)^2 - \frac{(16)(16)^3(2)}{3}$$

$$= (16)^4\left(1-\frac{2}{3}\right) = (16)^4\left(\frac{1}{3}\right) = 21845\,\frac{1}{3}$$ ❍

ตัวอย่าง 1.2.6 จงหา $\int_0^1 \left(x^3+4\right)dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x^3+4$ ต่อเนื่องบน $[0,1]$ ดังนั้น f อินทิเกรตได้บน $[0,1]$ และเราสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบท 1.2.3 ในการหา $\int_0^1 \left(x^3+4\right)dx$ ได้ดังนี้ แบ่งช่วงปิด $[0, 1]$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ออกเป็น n ช่วงย่อยเท่าๆ กัน แล้วแต่ละช่วงย่อยจะยาว $\Delta_i x = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$ หน่วยและทำให้ได้จุดแบ่งช่วงปิด $[0, 1]$ คือ $0, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{i}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n} = 1$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราจะเลือก x_i^* สำหรับแต่ละช่วงย่อยที่ i ในผลบวกรีมันน์ให้เป็นจุดปลายช่วงทางขวา $\dfrac{i}{n}$ และในที่นี้ $f(x) = x^3 + 4$ เราจึงได้

$$f\left(\frac{i}{n}\right) = \left(\frac{i}{n}\right)^3 + 4$$

ดังนั้น

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^3 + 4\right]\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^3 + 4\right]$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3 + \sum_{i=1}^{n} 4\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} i^3\left(\frac{1}{n}\right)^3 + 4n\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^3 + 4n\right] = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + 4n\right]$$

$$= \frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 4 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^2 + 4 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 4$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^1 (x^3 + 4)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 4 = \frac{1}{4} + 4 = 4\frac{1}{4}$$ ❍

ทฤษฎีบท 1.2.7 กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันอินทิเกรตได้บน $[a, b]$ แล้ว

1. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง
2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
3. ถ้า I เป็นช่วงปิดซึ่ง $I \subseteq [a, b]$ แล้ว f อินทิเกรตได้บน I
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ เมื่อ $c \in [a, b]$
5. ถ้า m และ M เป็นจำนวนจริงซึ่ง $m \le f(x) \le M$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a, b]$ แล้ว

$$m(b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b - a)$$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

6. ถ้า $f(x)\geq 0$ สำหรับทุก ๆ $x\in[a,\, b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$

7. ถ้า $f(x)\leq g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x\in[a,\, b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)\,dx\leq \int_a^b g(x)\,dx$

8. ฟังก์ชัน $|f|$ ที่นิยามโดย $|f|(x)=|f(x)|$ อินทิเกรตได้และ $\int_a^b f(x)\,dx\leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

หมายเหตุ โดยการพิสูจน์แบบอุปนัยร่วมกับสมบัติข้อ 2 ของทฤษฎีบท 1.2.7 จะได้ว่าถ้า $f_1, f_2,\, \ldots\, , f_n$ ต่างเป็นฟังก์ชันอินทิเกรตได้บน $[a,\, b]$ แล้ว $f_1+f_2+\ldots+f_n$ จะเป็นฟังก์ชันอินทิเกรตได้บน $[a,\, b]$ โดยที่

$$\begin{aligned}\int_a^b (f_1+f_2+\ldots+f_n)(x)\,dx &= \int_a^b [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]\,dx\\ &= \int_a^b f_1(x)\,dx+\int_a^b f_2(x)\,dx+\ldots+\int_a^b f_n(x)\,dx\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.2.8 ให้ $\int_0^1 dx=1$ และ $\int_0^1 (x^3+4)\,dx=\dfrac{17}{4}$ จงหาค่าของ $\int_0^1 x^3\,dx$ โดยใช้ทฤษฎีบท 1.2.7

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 1.2.7 ข้อ 1-2 จะได้ว่า $\dfrac{17}{4}=\int_0^1 (x^3+4)\,dx=\int_0^1 x^3\,dx+4\int_0^1 dx=\int_0^1 x^3\,dx+4$

เพราะฉะนั้น $\int_0^1 x^3\,dx=\dfrac{17}{4}-4=\dfrac{1}{4}$ ❍

ตัวอย่าง 1.2.9 ให้ f เป็นฟังก์ชันอินทิเกรตได้บน $[0,5]$ โดยที่ $\int_0^1 f(x)\,dx=10$, $\int_0^5 f(x)\,dx=4$ และ $\int_3^5 f(x)\,dx=3$ จงหาค่าของ $\int_1^3 f(x)\,dx$ โดยใช้ทฤษฎีบท 1.2.7

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 1.2.7 ข้อ 4 จะได้ว่า

$$\int_0^5 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^5 f(x)\,dx$$

นั่นแสดงว่า $\int_1^3 f(x)\,dx=4-10-3=-9$

❍

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

แบบฝึกหัด 1.2

1. พิจารณาเส้นโค้ง $y=2x^2$ บนช่วงปิด $[1,\ 2]$ แล้วทำตามคำสั่งต่อไปนี้

   1.1 จงวาดรูปบริเวณ R ในระนาบซึ่งอยู่ใต้เส้นโค้ง $y=2x^2$ เหนือแกน x ระหว่างเส้นตรง $x=1$ และ $x=2$

   1.2 แบ่งช่วงปิด $[1,\ 2]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยโดยให้มีขนาดของทุกช่วงย่อยเท่ากัน จงแสดงว่าความยาวของแต่ละช่วงย่อยเท่ากับ $\frac{1}{n}$

   1.3 จงแสดงว่าจุดปลายช่วงทางขวาของช่วงย่อยที่ i สำหรับ $i=1,2,\ldots,n$ คือ $1+\frac{i}{n}$

   1.4 สำหรับ $i=1,2,\ldots,n$ ถ้า A_i เป็นพื้นที่ซึ่งเป็นส่วนของ R บนช่วงย่อยที่ i จงแสดงว่า A_i มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความสูง $2\left(1+\frac{i}{n}\right)^2$ และกว้าง $\frac{1}{n}$ นั่นคือ

   $$A_i \le \frac{2}{n}+\frac{4i}{n^2}+\frac{2i^2}{n^3} \qquad \text{สำหรับทุกๆ } i=1,2,\ldots,n$$

   1.5 จงใช้เอกลักษณ์

   $$1+2+3+\ldots+n=\frac{n}{2}(n+1)$$

   และ $$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

   แสดงว่า $A_1+A_2+\ldots+A_n<2+2\left(1+\frac{i}{n}\right)^2$

2. จงทำซ้ำขั้นตอนของข้อ 1 กับเส้นโค้ง $y=9-x^2$ บนช่วงปิด $[0,\ 3]$

3. จงเขียนอินทิกรัล $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{1+x}$ ในรูปลิมิตของผลบวกรีมันน์โดยไม่ต้องคำนวณค่าลิมิต

4. ถ้าแบ่งช่วงปิด $[1,\ 5]$ ออกเป็น 4 ช่วงย่อยเท่าๆ กัน แล้วข้อใดบ้างที่เป็นผลบวกรีมันน์ของ $y=f(x)$ ซึ่งสอดคล้องกับการแบ่งช่วงดังกล่าว

   4.1 $f(1.5)+f(2)+f(2.5)+f(4)$ 4.2 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$

   4.3 $f(1.5)+f(3)+f(4)+f(5)$ 4.4 $f(1.5)+f(2.5)+f(3.5)+f(4.5)$

5. จงใช้ทฤษฎีบท 1.2.4 ของอินทิกรัลจำกัดเขตในรูปลิมิตของผลบวกรีมันน์ หาอินทิกรัลในข้อต่อไปนี้

   5.1 $\int_{1}^{3}x^3\,dx$ 5.2 $\int_{-2}^{-1}(x+1)^2\,dx$ 5.3 $\int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

1.3 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

เมื่อกำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่ง เราอาจตั้งคำถามเกี่ยวกับ f ได้ 2 คำถามคือ

1. พื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก a ถึง b มีค่าเท่ากับเท่าใด (หรืออินทิกรัลจำกัดเขตของ $f(x)$ บนช่วงปิด $[a, b]$ เป็นเท่าใด)

และ 2. อะไรคือปฏิยานุพันธ์ของ f

ดูเหมือนว่าคำถามทั้งสองจะไม่มีทางเกี่ยวข้องกันได้เลย แต่ในหัวข้อนี้เราจะแสดงแนวความคิดของเซอร์ไอแซก นิวตัน (Sir Isac Newton) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษซึ่งมีชีวิตอยู่ในช่วงคริสต์ศักราช 1643 - 1727 ที่แสดงการหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายอินทิกรัล ทำให้เราได้เห็นว่าปฏิยานุพันธ์ของ f เป็นตัวกำหนดค่าอินทิกรัลจำกัดเขตของ f บนช่วงปิดใด ๆ หรือกล่าวได้ว่าวิธีง่ายที่สุดในการคำนวณพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งหรืออินทิกรัลจำกัดเขตคือการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันบนขอบเขตที่ต้องการ และเพราะความสัมพันธ์ของอนุพันธ์และอินทิกรัลที่นิวตันได้แสดงไว้นี้มีความสำคัญมากและเป็นรากฐานของวิชาแคลคูลัส นักคณิตศาสตร์จึงให้ชื่อทฤษฎีบทที่แสดงความสัมพันธ์นี้ว่าทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (Fundamental Theorem of Calculus)

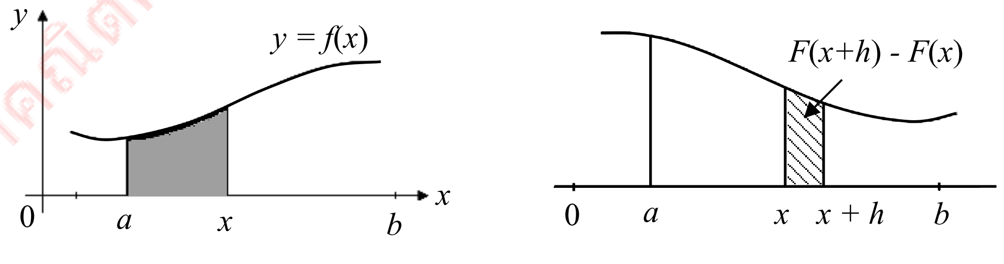
ทฤษฎีบท 1.3.1 (ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 1)
ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ F เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{สำหรับทุก ๆ } x \in [a,b]$$

แล้ว F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f

นั่นคือ $F'(x) = f(x)$ หรือ $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

บทพิสูจน์



(ก) (ข)

รูป 1.3.1

ในการแสดงว่า F หาอนุพันธ์ได้ และ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a,b]$ เราจะแสดงว่า

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

$\lim_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x\in[a,b]$ ให้ $x\in[a,b]$ แล้วจะได้ว่า

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\int_a^{x} f(t)\,dt+\int_x^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

สังเกตว่า $F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ เป็นบริเวณส่วนที่แรเงาของรูป 1.3.1(ข)

ต่อไปเราสังเกตว่าสำหรับแต่ละ $h>0$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[x,\, x+h]$ เราได้ว่า f มีค่ามากสุดและน้อยสุดบน $[x,\, x+h]$ ให้ M_h และ m_h เป็นค่ามากสุดและน้อยสุดของ f บน $[x,\, x+h]$ ตามลำดับ แล้วจะได้ว่า

$$m_h\le f(t)\le M_h$$

สำหรับทุก ๆ $t\in[x,\, x+h]$ ดังนั้น

$$m_h h\le \int_x^{x+h} f(t)\,dt\le M_h h$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\lim_{h\to 0^+} m_h\le \lim_{h\to 0^+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\le \lim_{h\to 0^+} M_h$$

เนื่องจาก M_h และ m_h เป็นค่ามากสุดและน้อยสุดของ f บน $[x,\, x+h]$ ดังนั้น เมื่อ $h\to 0^+$ จะได้ว่า M_h และ m_h จะเข้าใกล้ค่าเดียวกัน ซึ่งคือ $f(x)$ เพราะฉะนั้น

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

ดังนั้น $F'(x)=f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x\in[a,b]$ □

บทนิยาม 1.3.2 ถ้า $a<b$ และ f เป็นฟังก์ชันอินทิเกรตได้บน $[a,b]$ นิยาม

$$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

บทแทรก 1.3.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันอินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a, b]$ และ c เป็นค่าคงตัวใน $[a, b]$ ถ้า F เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt \quad \text{สำหรับทุก ๆ } x \in [a,b]$$

แล้ว F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f นั่นคือ

$$F'(x) = f(x) \text{ หรือก็คือ } \frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x)$$

บทพิสูจน์ จากบทนิยามของฟังก์ชัน F เราได้ว่า

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt = \begin{cases} \int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt & ; x \ge c \\ \int_a^c f(t)dt - \int_a^x f(t)dt & ; x < c \end{cases}$$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 1 เราได้ว่า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a, b]$ ซึ่ง $x \neq c$ ต่อไป เราจะแสดงว่า $F'(c) = f(c)$ ให้ $G(x) = \int_c^x f(t)dt$ สำหรับทุก ๆ $x \in [c, b]$ แล้วโดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 1 จะได้ว่า $G'(c) = f(c)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{G(c+h) - F(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{G(c+h) - G(c)}{h} \\ &= G'(c) = f(c) \end{aligned}$$

ให้ $H(x) = \int_a^c f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a, c]$ แล้วโดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 1 จะได้ว่า $H'(c) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^c f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right)\Bigg|_{x=c} = f(c)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{H(c+h) - H(c)}{h} \\ &= H'(c) = f(c) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $F'(c) = f(c)$ ดังนั้น เราจึงได้ว่า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a, b]$ $\square$

ตัวอย่าง 1.3.4 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

1. $f(x)=\int_0^x t^2 dt$ 2. $f(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$

3. $G(x)=\int_{\cos x}^{\sin x}\frac{1}{1-t^2}dt$ สำหรับ $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

วิธีทำ 1. โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 1 เราจะได้

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x t^2 dt = x^2$$

2. เนื่องจากลิมิตบนของอินทิกรัลคือ x^2 เราจึงยังใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 1 ทันทีไม่ได้ จะต้องใช้กฎลูกโซ่ของอนุพันธ์เข้าช่วย โดยให้ $u=x^2$ แล้ว $\frac{du}{dx}=2x$ และ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{d}{dx}\int_0^{u}\sqrt{1+t^2}\,dt = \left(\frac{d}{du}\int_0^{u}\sqrt{1+t^2}\,dt\right)\frac{du}{dx}$$

$$= \sqrt{1+u^2}\,2x = 2x\sqrt{1+x^4}$$

3. เพราะว่า $G(x)=\int_{\cos x}^{0}\frac{1}{1-t^2}dt+\int_0^{\sin x}\frac{1}{1-t^2}dt = \int_0^{\sin x}\frac{1}{1-t^2}dt-\int_0^{\cos x}\frac{1}{1-t^2}dt$

ดังนั้น

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{\sin x}\frac{1}{1-t^2}dt-\int_0^{\cos x}\frac{1}{1-t^2}dt\right)$$

$$= \left(\frac{d}{du}\int_0^{u}\frac{1}{1-t^2}dt\right)\frac{du}{dx}-\left(\frac{d}{dv}\int_0^{v}\frac{1}{1-t^2}dt\right)\frac{dv}{dx}$$ [เมื่อ $u=\sin x$ และ $v=\cos x$]

$$= \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}-\frac{1}{1-v^2}\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{1}{1-\sin^2 x}\frac{d(\sin x)}{dx}-\frac{1}{1-\cos^2 x}\frac{d(\cos x)}{dx}$$

$$= \frac{\cos x}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\sin^2 x} = \sec x + \operatorname{cosec} x$$ ❍

ตัวอย่าง 1.3.5 จงหาฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์คือ $\sin x^2$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย $\sin x^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0, a]$ ใด ๆ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 1 ฟังก์ชัน F ที่ต้องการคือ

$$F(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$$ ❍

ตัวอย่าง 1.3.6 จงหา $H'(2)$ เมื่อกำหนดให้ $H(x) = 3x\int_4^{x^2} e^{-\sqrt{t}}dt$

วิธีทำ ก่อนอื่นเราต้องหา $H'(x)$ สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ดังนี้

$$H'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x\int_4^{x^2} e^{-\sqrt{t}}dt\right) = \frac{d(3x)}{dx}\left(\int_4^{x^2} e^{-\sqrt{t}}dt\right) + 3x\left(\frac{d}{dx}\int_4^{x^2} e^{-\sqrt{t}}dt\right)$$

$$= 3\int_4^{x^2} e^{-\sqrt{t}}dt + (3x)(2x)e^{-\sqrt{x^2}} = 3\int_4^{x^2} e^{-\sqrt{t}}dt + 6x^2e^{-\sqrt{x^2}}$$

ดังนั้น $H'(2) = 3\int_4^4 e^{-\sqrt{t}}dt + 6(4)e^{-\sqrt{2^2}} = 0 + 24e^{-2} = 24e^{-2}$ ❍

ทฤษฎีบท 1.3.7 **(ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส** 2)
ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f ที่นิยามบน $[a, b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

บทพิสูจน์ ให้ G เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a, b]$ แล้วโดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 1 จะได้ว่า G เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บน $[a, b]$ ดังนั้น จาก F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บน $[a, b]$ ด้วย จึงได้ว่ามีค่าคงตัว C โดย $F(x) = G(x) + C$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a, b]$ เพราะฉะนั้น เราได้ว่า

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt - 0 = \int_a^b f(t)dt$$

เราจึงได้ $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ตามต้องการ ❍

เราอาจแทนค่า $F(b) - F(a)$ ได้ด้วยสัญลักษณ์

$$F(x)\Big|_a^b \quad \text{หรือ} \quad \big[F(x)\big]_a^b \quad \text{หรือ} \quad \left[\int f(x)dx\right]_a^b$$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ดังที่ได้กล่าวแล้วว่าสัญลักษณ์ $\int f(x)\,dx$ แทนปฏิยานุพันธ์ของ f ที่รวมค่าคงตัว กล่าวคือ $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ เมื่อ F เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f และ C เป็นค่าคงตัว อย่างไรก็ตามในการหาค่า $\left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$ เราจะได้

$$\left[\int f(x)dx\right]_a^b = \left[F(x)+C\right]_a^b = \left(F(b)+C\right)-\left(F(a)+C\right) = F(b)-F(a)$$
$$= \left[F(x)\right]_a^b$$

ดังนั้นการหาค่า $\left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$ จึงไม่จำเป็นต้องแสดงค่าคงตัว C

ตัวอย่าง 1.3.8 จงหาอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int_4^9 \left(3x^2-2x\right)dx$ 2. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x}$ 3. $\int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^3\right)dx$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 2 เราจะได้

1. $$\int_4^9 \left(3x^2-2x\right)dx = \left(x^3-x^2\right)\Big|_4^9 = \left[(9)^3-(9)^2\right]-\left[(4)^3-(4)^2\right]$$
$$= (9)^2(8)-(4)^2(3) = 648-48 = 600$$

2. $$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x} = \left[\ln|x|\right]_e^{e^2} = \ln\left|e^2\right|-\ln|e| = \ln e^2-\ln e$$
$$= 2\ln e-\ln e = 2-1 = 1$$

3. $$\int_0^1 \left(\sqrt{x}-x^3\right)dx = \left[\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$ ○

ตัวอย่าง 1.3.9 จงหา $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+\frac{n}{n+3}+\ldots+\frac{n}{n+n}\right)$

วิธีทำ เราจะเขียนลิมิตของผลบวกที่กำหนดให้ในรูปลิมิตของผลบวกรีมันน์ดังนี้

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}+\frac{n}{n+3}+\ldots+\frac{n}{n+n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

สังเกตว่าถ้าเราแบ่งช่วงปิด $[1, 2]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน แล้วแต่ละช่วงย่อยจะยาวเท่ากับ

$\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n}$ หน่วย และมีจุดแบ่งช่วงคือ $1+\frac{1}{n},1+\frac{2}{n},\ldots,1+\frac{i}{n},\ldots,1+\frac{n}{n}=2$ ดังนั้นผลบวก

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$ คือผลบวกรีมันน์ของ $f(x)=\frac{1}{x}$ บนช่วงปิด $[1,\,2]$ ซึ่งโดยความหมายของอินทิกรัลจำกัดเขต เราจะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right) = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

และโดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 2 เราจะได้

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \Big[\ln|x|\Big]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \frac{n}{n+3} + \ldots + \frac{n}{n+n}\right) = \ln 2$ ❍

หมายเหตุ สำหรับตัวอย่าง 1.3.9 ถ้าเราพิจารณาบนช่วงปิด $[0,\,1]$ ก็จะได้ว่า

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{1+\frac{3}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

เป็นผลบวกรีมันน์ของ $f(x) = \frac{1}{1+x}$ บนช่วงปิด [0, 1] ดังนั้นลิมิตของผลบวกจะเท่ากับ

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \Big[\ln|1+x|\Big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงหาอนุพันธ์ในข้อต่อไปนี้

1.1 $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{dt}{t^2}$

1.2 $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \left(t^2+5t\right)\,dt$

1.3 $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{-1}^{\sqrt{x}} 3^t\,dt$

1.4 $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^{\sin x} \sqrt{1+t^3}\,dt$

1.5 $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_2^x \sin t^2\,dt$

1.6 $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_2^x \frac{\sin t}{t}\,dt$

1.7 $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_t^3 \frac{\sin x}{x}\,dx$

1.8 $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(x^2\int_2^{x^2} \frac{\sin u}{u}\,du\right)$

1.9 $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^t \frac{\cos y}{1+y^2}\,dy$

1.10 $\displaystyle\frac{d}{dt}\left(\frac{\int_{2t}^{10}\sqrt{1+s}\,ds}{\sqrt{1+2t}}\right)$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

2. จงหาอินทิกรัลจำกัดเขตในข้อต่อไปนี้

2.1 $\int_4^9 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ 2.2 $\int_0^{\pi/3} \sec^2\theta d\theta$ 2.3 $\int_e^{e^2} \frac{dt}{t\ln t}$

2.4 $\int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ 2.5 $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos x^2 dx$

3. จงหาลิมิตในข้อต่อไปนี้

3.1 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 + \left(1+\frac{2}{n}\right)^5 + \ldots + \left(1+\frac{n}{n}\right)^5\right]$

3.2 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{n}\right)$

3.3 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2+1} + \frac{n^2}{n^2+4} + \frac{n^2}{n^2+9} + \ldots + \frac{n^2}{2n^2}\right)$

4. จงหาสมการเส้นโค้งเส้นหนึ่งซึ่งมีความชัน ณ จุด (x, y) ใดๆ เป็น $3x(x^2-1)$ และทราบว่าเส้นโค้งนี้ตัดแกน y ที่ $y = 2$

1.4 การประมาณอินทิกรัล

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสกล่าวว่า เราสามารถหาอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันต่อเนื่องได้บนทุกๆ ช่วงปิดโดยการหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันต่อเนื่องนั้น ๆ แล้วผลต่างของการแทนค่าลิมิตบนและลิมิตล่างจะคือค่าอินทิกรัลที่ต้องการซึ่งทำให้เราทราบว่า $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ แต่ถ้าถามว่า $\ln 2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด เรายังไม่สามารถบอกค่าที่แน่นอนได้ นอกจากนี้การทำงานจริงที่เราสามารถบอกค่าของฟังก์ชันได้เพียงบางจุดเป็นจำนวนจำกัดจุด เราก็ไม่สามารถบอกค่าอินทิกรัลจำกัดเขตที่แน่นอนของฟังก์ชันจากข้อมูลที่มีได้ เราต้องอาศัยการประมาณค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตในกรณีที่กล่าวมา ในหัวข้อนี้เราจึงจะศึกษาหาวิธีการประมาณอินทิกรัลจำกัดเขตโดยเริ่มต้นจากการประมาณค่าโดยนิยาม จนกระทั่งได้สูตรการประมาณอินทิกรัลจำกัดเขตที่ยังนิยมใช้กันอยู่ ตลอดจนศึกษาความเชื่อมั่นของการประมาณค่าที่ได้จากสูตรการประมาณเหล่านี้ อย่างไรก็ตามยังมีการประมาณอินทิกรัลจำกัดเขตด้วยวิธีอื่น ๆ อีกเช่นการประมาณด้วยอินทิกรัลของพหุนามเทย์เลอร์ เป็นต้น นักศึกษาจะได้ศึกษาในชั้นสูงต่อไป

จากบทนิยาม 1.2.2 เราทราบว่า $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x$ ในกรณีที่ f อินทิเกรตได้บนช่วงปิด $[a,b]$ เราอาจประมาณค่าอินทิกรัลจำกัดเขตโดยใช้ผลบวกรีมันน์ในรูปต่อไปนี้

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\approx\; \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta_i x$$

ในการหาค่าประมาณ จะเห็นว่ามีสิ่งที่เราจะต้องกำหนดขึ้นก่อน 2 อย่างคือความยาวของแต่ละช่วงย่อย $\Delta_i x$ และการเลือก x_i^* ในแต่ละช่วงย่อย ดังนั้นเราจึงควรเลือกสิ่งทั้งสองให้สะดวกต่อการคำนวณมากที่สุด เราเรียกการประมาณอินทิกรัลนี้ว่า***การประมาณด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า*** และมีชื่อเรียกแยกตามลักษณะการเลือก x_i^* เช่นถ้าเลือกให้ x_i^* เป็นจุดปลายช่วงย่อยทางซ้ายเราเรียกการประมาณนี้ว่า ***การประมาณด้วยจุดปลายซ้าย*** ถ้าเลือกให้ x_i^* เป็นจุดปลายช่วงย่อยทางขวาเราเรียกการประมาณนี้ว่า ***การประมาณด้วยจุดปลายขวา*** และถ้าเลือกให้ x_i^* เป็นจุดกึ่งกลางช่วง เราก็จะเรียกการประมาณนี้ว่า ***การประมาณด้วยจุดกึ่งกลาง***

ตัวอย่าง 1.4.1 จงประมาณอินทิกรัล $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ ด้วย $n = 10$

วิธีทำ แบ่งช่วงปิด $[1, 2]$ ออกเป็น 10 ช่วงย่อยเท่าๆ กัน แล้วแต่ละช่วงย่อยจะมีความยาวช่วงเท่ากับ $\frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10} = 0.1$ และมีจุดแบ่งช่วง 11 จุดคือ $1, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots, 1.9, 2$ ตารางข้างล่างนี้แสดงค่า $f\left(x_i^*\right)$ เมื่อเราเลือก x_i^* ของแต่ละช่วงย่อยให้เป็นจุดปลายซ้ายและจุดปลายขวา ตามลำดับ

การประมาณด้วยจุดปลายซ้าย			**การประมาณด้วยจุดปลายขวา**		
i	x_i^*	$f\left(x_i^*\right)=\frac{1}{x_i^*}$	i	x_i^*	$f\left(x_i^*\right)=\frac{1}{x_i^*}$
0	1.0	1.0000	1	1.1	0.9091
1	1.1	0.9091	2	1.2	0.8333
2	1.2	0.8333	3	1.3	0.7692
3	1.3	0.7692	4	1.4	0.7143
4	1.4	0.7143	5	1.5	0.6667
5	1.5	0.6667	6	1.6	0.6250
6	1.6	0.6250	7	1.7	0.5882
7	1.7	0.5882	8	1.8	0.5556
8	1.8	0.5556	9	1.9	0.5263
9	1.9	0.5263	10	2.0	0.5000
	ผลรวม	7.1877		ผลรวม	6.6877

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

เพราะฉะนั้นค่าประมาณด้วยจุดปลายซ้าย เท่ากับ $\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx (0.1)(7.1877) = 0.71877$

และค่าประมาณด้วยจุดปลายขวา เท่ากับ $\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx (0.1)(6.6877) = 0.66877$ ❍

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 1.4.1 ทำให้เราทราบว่า $0.66877 \le \ln 2 \le 0.71877$

เราอาจจะสรุปสูตรการประมาณค่าอินทิกรัลด้วยจุดปลายซ้ายและจุดปลายขวาของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่นิยามในช่วงปิด $[a,b]$ ดังนี้

1. สูตรการประมาณด้วยจุดปลายซ้าย

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right]$$

2. สูตรการประมาณด้วยจุดปลายขวา

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right]$$

ตัวอย่าง 1.4.2 จงประมาณอินทิกรัล $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ด้วยจุดปลายขวา โดยใช้ $n = 4$

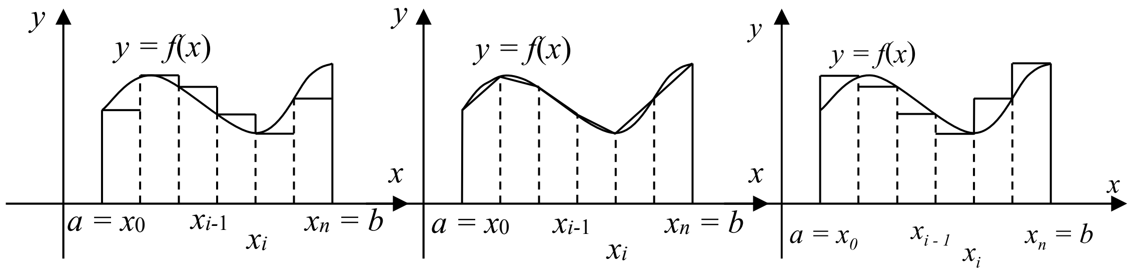
วิธีทำ แบ่งช่วงปิด $[0, 1]$ ออกเป็น 4 ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน แล้วแต่ละช่วงย่อยจะมีความยาวช่วงเท่ากับ $\frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$ และมีจุดแบ่งช่วง 5 จุดคือ 0 , 0.25 , 0.50 , 0.75 , 1 โดยมี x_i^* และ $f(x_i^*)$ ที่ $x_0, x_1, \ldots, x_5$ แสดงดังในตารางข้างล่างนี้

x_i^*	0	0.25	0.75	0.50	1.00
$(x_i^*)^2$	0	0.0625	0.2500	0.5625	1.0000
$f(x_i^*) = \frac{1}{1+(x_i^*)^2}$	1	0.9412	0.8000	0.6400	0.5000

เพราะฉะนั้น $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{4}(0.9412 + 0.8 + 0.64 + 0.5) = 0.7203$ ❍

พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งมีค่าไม่เป็นลบบนช่วงปิด $[a,b]$ สังเกตว่าในกรณีนี้อินทิกรัล $\int_a^b f(x)\,dx$ อาจพิจารณาว่าเป็นพื้นที่ใต้กราฟ $y = f(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$ ดังนั้นค่าของอินทิกรัลนี้อาจพิจารณาจากการประมาณค่าพื้นที่ใต้กราฟจาก $x = a$ ถึง $x = b$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร



การประมาณด้วยจุดปลายซ้าย การประมาณด้วยสี่เหลี่ยมคางหมู การประมาณด้วยจุดปลายขวา

รูป 1.4.1

จากรูป 1.4.1 จะเห็นว่าการประมาณด้วยจุดปลายซ้ายและจุดปลายขวายังคงมีส่วนต่างค่อนข้างมาก สังเกตว่าหากเราสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมูบนช่วงย่อยแต่ละช่วงแทนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ส่วนต่างระหว่างพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูบนแต่ละช่วงย่อยนั้นจะมีค่าน้อยกว่า ดังนั้นเราอาจใช้พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูเพื่อประมาณค่าของอินทิกรัลดังนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ เป็นเซตของจุดแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน แต่ละช่วงย่อยมีขนาด $\Delta_i x = \dfrac{b-a}{n}$ บนช่วงย่อยที่ i ลากเส้นตรงเชื่อมจุด $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ และ $(x_i, f(x_i))$ เราจะได้รูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีด้านคู่ขนานยาว $f(x_{i-1})$ และ $f(x_i)$ หน่วยและกว้าง $\Delta_i x = \dfrac{b-a}{n}$ หน่วย ดังนั้นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูบนช่วงย่อยที่ i คือ $\quad \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b-a}{n}\right)\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$

เนื่องจากช่วงปิด $[a, b]$ ถูกแบ่งออกเป็น n ช่วงย่อย ดังนั้นผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมดคือ

$$\frac{b-a}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$$

การสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมูเพื่อประมาณพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x)$ สรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.4.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ $\{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ เป็นเซตของจุดแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วงเท่า ๆ กัน แล้วอาจประมาณอินทิกรัล $\int_a^b f(x)\,dx$ ด้วย

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

การประมาณอินทิกรัลด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal rule)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

ตัวอย่าง 1.4.4 จงประมาณ $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูเมื่อ $n = 10$

วิธีทำ จากตารางในตัวอย่าง 1.4.1 เมื่อ $f(x) = \frac{1}{x}$ เราจะได้

$f(1.0)$	=	1.0000
$2f(1.1)$	=	1.8182
$2f(1.2)$	=	1.6666
$2f(1.3)$	=	1.5384
$2f(1.4)$	=	1.4286
$2f(1.5)$	=	1.3334
$2f(1.6)$	=	1.2500
$2f(1.7)$	=	1.1764
$2f(1.8)$	=	1.1112
$2f(1.9)$	=	1.0526
$f(2.0)$	=	0.5000
ผลรวม		13.8754

เพราะฉะนั้น

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] = \left(\frac{2-1}{20}\right)(13.8754) = 0.6938$$ ❍

ตัวอย่าง 1.4.5 จงประมาณ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู เมื่อกำหนด n ดังนี้

1. $n = 4$ 2. $n = 5$ 3. $n = 8$

วิธีทำ 1. จากตารางในตัวอย่าง 1.4.2 เมื่อ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ เราจะได้

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

$f(0.00)$	=1.0000
$2f(0.25)$	=1.8824
$2f(0.50)$	=1.6000
$2f(0.75)$	=1.2800
$f(1.00)$	=0.5000
ผลรวม	6.2624

แต่ $\frac{b-a}{2n}=\frac{1-0}{2(4)}=\frac{1}{8}=0.125$ เพราะฉะนั้น $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx (0.125)(6.2624)=0.7828$

2. จาก $\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{5}=0.2$ เราจะได้ตารางต่อไปนี้

x_i	x_i^2	$\frac{1}{1+x_i^2}$	ตัวคูณ j	$j\left(\frac{1}{1+x_i^2}\right)$
0.0	0.00	1.0000	1	1.0000
0.2	0.04	0.9615	2	1.9231
0.4	0.16	0.8621	2	1.7241
0.6	0.36	0.7353	2	1.4706
0.8	0.64	0.6097	2	1.2195
1.0	1.00	0.500	1	0.5000
			ผลรวม	7.8373

แต่ $\frac{b-a}{2n}=\frac{1-0}{2(5)}=\frac{1}{10}=0.1$ เพราะฉะนั้น $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx (0.1)(7.8373)=0.7837$

3. จาก $\frac{b-a}{n}=\frac{1}{8}$ เราจะได้ตารางต่อไปนี้

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

x_i	x_i^2	$\dfrac{1}{1+x_i^2}$	ตัวคูณ j	$j\left(\dfrac{1}{1+x_i^2}\right)$
0	0	1.0000	1	1.0000
1/8	1/64	0.9846	2	1.9692
1/4	1/16	0.9412	2	1.8824
3/8	9/64	0.8767	2	1.7534
1/2	1/4	0.8000	2	1.6000
5/8	25/64	0.7191	2	1.4382
3/4	9/16	0.6400	2	1.2800
7/8	49/64	0.5664	2	1.1328
1	1	0.5000	1	0.5000
			ผลรวม	12.5568

แต่ $\dfrac{b-a}{2n}=\dfrac{1}{16}$ เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\approx\left(\frac{1}{16}\right)(12.5568)=0.7848$ ❍

ตัวอย่าง 1.4.6 จงประมาณ $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx$ ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูเมื่อ $n = 4$

วิธีทำ จาก $\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{1}{4}=0.25$ เราจะได้ตารางต่อไปนี้

x_i	$e^{-x_i^2}$		ตัวคูณ j	$j\,e^{-x_i^2}$
0.00	e^{0}	= 1.000	1	1.000
0.25	$e^{-(0.25)^2}$	= 0.940	2	1.880
0.50	$e^{-(0.5)^2}$	= 0.779	2	1.558
0.75	$e^{-(0.75)^2}$	= 0.570	2	1.140
1.00	e^{-1}	= 0.368	1	0.368
			ผลรวม	5.946

แต่ $\dfrac{b-a}{2n}=\dfrac{1}{8}$ เพราะฉะนั้น $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx\left(\frac{1}{8}\right)(5.964)=0.743$ ❍

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ในการประมาณค่าสิ่งใดก็ตาม เราย่อมต้องการทราบว่าค่าประมาณที่จะนำไปใช้นั้นมีค่าต่างไปจากค่าจริงเท่าใด และเราเรียกผลต่างระหว่างค่าจริงของอินทิกรัลกับค่าประมาณของอินทิกรัลนั้นว่า **ค่าคลาดเคลื่อน** (Error) นั่นคือ

$$\text{ค่าประมาณ - ค่าคลาดเคลื่อน} \le \int_a^b f(x)\,dx \le \text{ค่าประมาณ + ค่าคลาดเคลื่อน}$$

ด้วยเหตุนี้การคำนวณค่าคลาดเคลื่อนหรือการกล่าวถึงค่าคลาดเคลื่อน จึงต้องควบคู่กับการคำนวณค่าประมาณทุกครั้ง สำหรับท้ายหัวข้อนี้เราจะแนะนำวิธีคำนวณค่าคลาดเคลื่อนของสูตรการประมาณค่าด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

การประมาณอินทิกรัลด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู ให้ค่าถูกต้องสำหรับพหุนามเชิงเส้น (เพราะว่าเราประมาณด้วยพื้นที่ภายใต้เส้นตรงที่เชื่อมโยงระหว่างจุด 2 จุด)

$$P_1(x) = ax + b$$

ซึ่งพหุนามเหล่านี้มีอนุพันธ์อันดับสองเป็นศูนย์ทุกจุดในช่วงของการอินทิเกรต แต่ฟังก์ชัน f ที่เราต้องการประมาณอินทิกรัล อาจมีอนุพันธ์อันดับสองไม่เป็นศูนย์ที่บางจุดในช่วงของการอินทิเกรต จึงพอจะเชื่อได้ว่าอนุพันธ์อันดับสองของ f เป็นตัวกำหนดค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

โดยประยุกต์ความรู้ในวิชาแคลคูลัสขั้นสูงเข้าช่วย เราพบว่าถ้า M_2 เป็นค่าสูงสุดของ $|f''(x)|$ บนช่วงของการอินทิเกรต $[a, b]$ ตามลำดับ แล้ว

$$\boxed{\text{ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู} \le \frac{(b-a)M_2h^2}{12} = \frac{(b-a)^3 M_2}{12n}}$$

เมื่อ h เป็นความยาวของทุกช่วงย่อยที่แบ่ง $[a, b]$ ออกเท่า ๆ กัน และ n เป็นจำนวนช่วงย่อย

สังเกตว่า h^2 เป็นตัวชี้ให้เห็นว่า ถ้าแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกโดยให้แต่ละช่วงย่อยที่แบ่งขึ้นใหม่สั้นลงกว่าเดิมครึ่งหนึ่ง แล้วค่าคลาดเคลื่อนที่ได้จากการประมาณด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูจะลดลง 4 เท่า

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ตัวอย่าง 1.4.14 จงประมาณค่าของ $\frac{\pi}{4}$ พร้อมทั้งบอกค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นด้วย

วิธีทำ โดยการประมาณด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูในตัวอย่าง 1.4.5 ข้อ 1 เราได้ค่าประมาณ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0.7828$ แต่โดยสูตรพื้นฐานการอินทิเกรต จะได้

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x\Big|_0^1 = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0 = \frac{\pi}{4}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\pi}{4} \approx 0.7828$

ในการคำนวณค่าคลาดเคลื่อน เราต้องการหา M_2 ซึ่งเป็นค่ามากสุดของ $|f''(x)|$ ในช่วง $[0, 1]$ เมื่อ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ นั่นคือเราต้องหาจุดวิกฤตจาก $f'''(x)$ ซึ่งจากการคำนวณอนุพันธ์ เราได้

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} \quad , \quad f'(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2},$$

$$f''(x)=\frac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3} \quad , \quad f'''(x)=24x\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)^{-4}$$

แต่ถ้า $0<x<1$ แล้ว $f'''(x)>0$ ซึ่งแสดงว่า f'' ไม่มีจุดวิกฤตในช่วง $(0, 1)$ เพราะฉะนั้นค่ามากสุดของ $|f''(x)|$ เกิดขึ้นที่จุดปลายช่วง $x = 0$ เราจึงได้ $M_2 = |f''(0)| = 2$ และเมื่อ $a = 0, b = 1$ และ $h = \frac{1}{4}$ เราจะได้

$$\text{ค่าคลาดเคลื่อน} \le \frac{(1-0)(2)}{(12)\left(4^2\right)} = \frac{1}{96} \approx 0.0104$$

เพราะฉะนั้น

$$0.7828 - 0.0104 < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < 0.7828 + 0.0104$$

ทำให้ได้

$$0.7724 < \frac{\pi}{4} < 0.7932 \quad \text{หรือ} \quad 3.0896 < \pi < 3.1728$$ ❍

ตัวอย่าง 1.4.15 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $|f''(x)| \le 10$ สำหรับทุก ๆ x ในช่วงปิด $[1, 5]$ และเราต้องการประมาณ $\int_1^5 f(x)\,dx$ ด้วยค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.01 อยากทราบว่าเราจะต้องแบ่งช่วง $[1, 5]$ ออกเป็นช่วงย่อย ๆ เท่า ๆ กันให้มีความยาวของแต่ละช่วงย่อยไม่เกินเท่าใด เมื่อประมาณด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

วิธีทำ ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมูไม่เกิน $\dfrac{(b-a)M_2h^2}{12}$

เมื่อ $b - a = 5 - 1 = 4$, $M_2 \le 10$ และ h เป็นความยาวของแต่ละช่วงย่อยของการแบ่ง $[1, 5]$ เราจึงได้

$$\frac{40}{12}h^2 \le 0.01 \qquad \text{ซึ่งสมมูลกับ} \qquad h^2 \le \frac{12}{40}(0.01) = 0.0030$$

และทำให้ได้ $\quad h \approx \sqrt{0.003} \approx 0.054$ $\bigcirc$

ตัวอย่าง 1.4.16 ถ้าต้องการประมาณค่า $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{2+x^2}$ ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู โดยให้มีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกิน 5×10^{-4} เราจะต้องแบ่งช่วง $[0, 2]$ ออกอย่างน้อยกี่ช่วงย่อย

วิธีทำ เนื่องจากค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู $\le \dfrac{(b-a)M_2h^2}{12}$

เมื่อ $h = \dfrac{b-a}{n}$ เป็นความยาวของแต่ละช่วงย่อยที่ได้จากการแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อย n ช่วงย่อยที่เท่าๆ กัน และ M_2 เป็นค่าสูงสุดของ $|f''(x)|$ บนช่วง $[a, b]$ ถ้า $\dfrac{(b-a)M_2h^2}{12} \le 5\times10^{-4}$ แล้ว ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณด้วยสี่เหลี่ยมคางหมู $\le 5\times10^{-4}$

และจากโจทย์เราจะได้

$$f''(x) = \frac{-2(2-3x^2)}{(2+x^2)^3} \text{ และ } \frac{(b-a)M_2h^2}{12} = \frac{(2-0)M_2}{12}\left(\frac{2-0}{n}\right)^2 = \frac{2M_2}{3n^2}$$

เมื่อ M_2 เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $\left|\dfrac{-2(2-3x^2)}{(2+x^2)^3}\right|$ บน $[0,2]$ ซึ่งจะได้ว่า $M_2 = \dfrac{1}{2}$

ดังนั้น $$5\times10^{-4} \ge \frac{2M_2}{3n^2} = \frac{1}{n^2}$$

นั่นคือ $$n^2 \ge \frac{10^4}{15}$$

จะได้ว่า $$n \ge 666.67$$

แสดงว่าถ้าเราแบ่งช่วง $[0, 2]$ ออกอย่างน้อย 667 ช่วงย่อย เราจะได้ค่าประมาณที่มีค่าคลาดเคลื่อนไม่เกินตามที่โจทย์กำหนด $\bigcirc$

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงประมาณค่าอินทิกรัลในข้อต่อไปนี้ด้วยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู

   1.1 $\int_1^5 \frac{dx}{x}$; 2 ช่วงย่อย

   1.2 $\int_1^7 \frac{dx}{x}$; 4 ช่วงย่อย

   1.3 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$; 4 และ 8 ช่วงย่อย

   1.4 $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$; 6 ช่วงย่อย

   1.5 $\int_1^5 e^{-x^2} dx$; 6 ช่วงย่อย

   1.6 $\int_0^3 x^3 dx$; 6 ช่วงย่อย

2. จงคำนวณค่าสัมบูรณ์ของค่าคลาดเคลื่อนในการประมาณค่าอินทิกรัลในข้อ 1

3. ตารางข้างล่างนี้แสดงค่าอุณหภูมิ $f(t)$ ในรูปฟังก์ชันของเวลา t

เวลา	1	2	3	4	5	6	7
อุณหภูมิ	81	75	80	83	78	70	60

   3.1 จงใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมูประมาณ $\int_1^7 f(t)\,dt$

   3.2 จงใช้ผลของข้อ 3.1 หาค่าประมาณของอุณหภูมิเฉลี่ย

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร